# Differenzierte Beurteilung mathematischer Kompetenzen durch Analyse von Schüleraktivitäten beim Lösen mathematischer Aufgaben – Entwicklung und Erprobung eines Konzeptes

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades Dr. rer. nat.
im Fach Didaktik der Mathematik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
der Humboldt-Universität zu Berlin

von
Jana Risse, geb. Wetzel
geb. am 03.12.1974 in Löbau

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin
Prof. Dr. Dr. h. c. Ch. Markschies

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
Prof. Dr. W. Coy

Gutachter/Gutachterinnen:

1. Prof. Dr. R. Bruder

2. Prof. Dr. S. Blömeke

3. Prof. Dr. W. Schulz

Tag der Verteidigung: 20.02.2008

# Zusammenfassung

Mit der vorliegenden Arbeit wurde ein Konzept zur differenzierten Beurteilung und Rückmeldung mathematischer Kompetenzen entwickelt und exemplarisch erprobt. Damit liegt ein Beurteilungskonzept vor, dass fachdidaktischen Anforderungen an einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht genügt aber auch alltagstauglich ist. Es erlaubt dem Lehrer seinen Schülern ihre Stärken und Schwächen bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben differenziert und konkret aufzuzeigen und Hinweise zum selbständigen Lernen zu geben.

Die Differenzierung in die vier Kompetenzbereiche darstellend-interpretativ, heuristisch-experimentell, formal-operativ und kritisch-argumentativ spiegelt fachdidaktische Zielsetzungen an den Mathematikunterricht wider. Das mathematische Grundwissen bildet als Grundlage der Ausprägung von Kompetenzen die fünfte Beurteilungskomponente.

Für den spezifischen Zweck der differenzierten Beurteilung wurde ein Aufgabenanalyseinstrument entwickelt. Dieses vereint Kriterien an Aufgaben zum Leisten, allgemeine Kriterien der Aufgabenqualität und Kriterien verbunden mit der Anregung vielseitiger mathematischer Kompetenzen. Darüber hinaus werden kompetenzspezifische Anforderungen beschrieben.

Die Beurteilung der bei der Aufgabenbearbeitung dargelegten Kompetenzen erfolgt durch kompetenz- und aufgabenspezifische Beurteilungskriterien. Individuelle Rückmeldungsbögen enthalten für die erfassten Kompetenzen kriterienorientierte Beurteilungen und lernfördernde Hinweise.

Bei der exemplarischen Erprobung des Konzeptes in drei mathematisch profilierten Klassen zeigten sich unterschiedliche Leistungsverteilungen für die einzelnen Kompetenzbereiche. Es wurden zum einen Stärken und Schwächen der Schüler deutlich. Zum anderen zeigten aufgabenabhängige Unterschiede innerhalb der Kompetenzbereiche, dass die Kompetenzdarlegungen von der Art der Aufgabe oder vom speziellen angesprochenen Inhalt abhängen.

In einer weiteren Untersuchung wurden die mit einer Aufgabe intendierten Aktivitäten den tatsächlich ausgeführten gegenübergestellt und aus der Umsetzung verschiedener Aufgaben Hinweise zur Aufgabengestaltung für die differenzierte Beurteilung im Mathematikunterricht abgeleitet.

# Danksagung

Bei der Erstellung dieser Arbeit wurde ich von vielen Menschen unterstützt, denen ich an dieser Stelle herzlich danke.

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Herrn Prof. Dr. Schulz für das in mich gesetzte Vertrauen bei der selbständigen Forschung auf einem stark diskutierten Gebiet, für die beständige Unterstützung und auch für das persönliche Verständnis. Frau Prof. Dr. Bruder danke ich für die vielen wertvollen Hinweise, die sie mir als Expertin auf dem Gebiet der Förderung und Beurteilung mathematischer Kompetenzen geben konnte. Frau Prof. Blömeke danke ich für ihre nichtmathematikdidaktische Sicht auf meine Arbeit, die so manche Selbstverständlichkeit in Frage stellte und damit zur Ausschärfung meiner Gedanken und deren Darstellung beitrug. Viele Anregungen und Hinweise beider Gutachterinnen hoffe ich bei meiner weiteren Arbeit auf dem Gebiet der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen umsetzen zu können.

Für Anregungen und konstruktive Kritik danke ich allen Mitarbeitern der Arbeitsgruppe Mathematik und ihre Didaktik am Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin. Aus den Gesprächen mit meinen Kollegen konnte ich viel lernen, insbesondere auch durch die praxisorientierte Perspektive der abgeordneten Lehrer.

Ich danke ebenso allen beteiligten Schülern und Lehrern, ohne die die schulpraktische Erprobung des entwickelten Konzeptes nicht möglich gewesen wäre.

Mein besonderer Dank gilt meiner Familie für ihr Verständnis in der nicht ganz einfachen Zeit während der Erstellung dieser Arbeit und vor allem meinem Mann für seine nicht nachlassende Unterstützung und seinen aufmunternden Beistand.

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

Die Vielfalt mathematischen Arbeitens ist gekennzeichnet durch Aktivitäten, wie Entwickeln von Lösungsstrategien, Aufstellen und Prüfen von Vermutungen, Formalisieren, Verallgemeinern, graphisch Darstellen, Interpretieren, Modellieren, Nutzen von Algorithmen und Kalkülen, Argumentieren. H. Winter bündelte bereits 1975 „die vielseitigen Aktivitäten beim wirklichen Lernen von Mathematik“ zu allgemeinen Lernzielen. Die Anregung vielseitiger Aktivitäten, mit dem Ziel der Förderung entsprechender mathematischer Fähigkeiten, ist eine der wichtigsten Aufgaben des Mathematikunterrichts. Die Vereinbarung von Bildungsstandards durch die Kultusministerkonferenz stellt die Förderung allgemeiner mathematischer Fähigkeiten bzw. Kompetenzen noch stärker in den Mittelpunkt der mathematikdidaktischen Diskussion. Die fachdidaktische Umsetzung der Kompetenzorientierung erfordert entsprechenden Unterricht. Ein konkreter Ansatzpunkt ist dabei die Entwicklung von Aufgaben, die Schüler zu vielseitigen und anspruchsvollen mathematischen Aktivitäten anregen und entsprechende Kompetenzen fördern und fordern.

Darüber hinaus ist es wichtig, den Schülern ihre Stärken und Schwächen innerhalb des Spektrums mathematischer Kompetenzen bewusst zu machen. Aussagekräftige Rückmeldungen helfen ihnen, ein realistisches mathematisches Selbstbild zu entwickeln und an ihren Fähigkeiten zu arbeiten. Die Mathematiknote allein kann diesen Anforderungen nicht gerecht werden. Bestenfalls stellt sie eine Mittelung der Bewertungen unterschiedlicher mathematischer Kompetenzen dar, welche individuelle Stärken und Schwächen verdeckt. Häufig spiegelt sie durch die einseitige Konstruktion herkömmlicher Klassenarbeiten überwiegend formale Fertigkeiten eines Schülers wider. Die Beurteilung und Rückmeldung von Schülerleistungen ist eine Komponente des gesamten Unterrichtskonzeptes. Ist der Unterricht auf die Förderung vielseitiger mathematischer Fähigkeiten ausgerichtet, sollte er von einer differenzierten Beurteilung und transparenten Rückmeldung bereits erworbener Kompetenzen begleitet werden. Ziel dieser Arbeit ist es, ein in den alltäglichen Mathematikunterricht integrierbares Konzept für eine differenzierte Beurteilung und individuelle Rückmeldung mathematischer Kompetenzen zu entwickeln.

Mathematische Aktivitäten sind zum einen grundlegend für den Erwerb fachlicher Kompetenzen. Zum anderen zeigen sich bereits aufgebaute Kompetenzen in der Ausführung von Aktivitäten. In der Analyse von Schüleraktivitäten wird deshalb der Ansatzpunkt einer kompetenzorientierten Leistungsbeurteilung gesehen. Zur Differenzierung mathematischer Aktivitäten findet die Systematisierung von Lechner (2002, S. 255ff.) Anwendung. Die vier Aktivitätsbereiche darstellend-interpretativ, heuristisch-experimentell, formal-operativ und kritisch-argumentativ verdeutlichen unterschiedliche Aspekte mathematischen Arbeitens und spiegeln die allgemeinen mathematischen Kompetenzen der KMK-Bildungsstandards und fachdidaktische Zielstellungen wider. Von einer in diese Bereiche differenzierten Beurteilung von Schülerleistungen wird erwartet, dass sie Stärken und Schwächen eines Schülers im Spektrum mathematischer Kompetenzen aufdeckt. Das mathematische Grundwissen, eine wichtige Grundlage der Ausprägung von Kompetenzen, bildet eine fünfte Komponente der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen.

Die Basis der Beurteilung mathematischer Kompetenzen ist die Ausführung mathematischer Aktivitäten, die im Unterricht durch Aufgaben angeregt werden. Im ersten Kapitel dieser Arbeit werden die Verbindungen zwischen den Komponenten des Beurteilungskonzeptes, Aufgaben – Aktivitäten – Beurteilung, hergestellt. Nach einer Darstellung der lerntheoretischen Bedeutung von Schüleraktivitäten wird ausgelotet, welche fachlichen Aktivitäten für das Mathematiklernen und somit für eine Leistungsbeurteilung in diesem Fach relevant sind. Die Differenzierung mathematischer Aktivitäten in die vier Aktivitätsbereiche heuristisch-experimentell, darstellend-interpretativ, formal-operativ und kritisch-argumentativ wird beschrieben und anderen fachdidaktischen Systematisierungen gegenübergestellt. Einen weiteren Schwerpunkt des ersten Kapitels bildet die Beschreibung von Kriterien für ein Konzept der Leistungsbeurteilung, das Anforderungen eines kompetenzorientierten Unterrichts genügt. Abschließend werden im ersten Kapitel vorliegende Konzepte der differenzierten Begutachtung von Schülerleistungen diskutiert.

Die differenzierte Beurteilung mathematischer Kompetenzen stellt spezifische Anforderungen an Aufgaben als Grundlage der Leistungsbeurteilung. Diese ergeben sich aus der Beurteilungssituation, aus Ansprüchen an Aufgabenqualität allgemein und schließlich aus der Zielstellung, vielseitige mathematische Aktivitäten einzubeziehen. Zur Einordnung der erbrachten Schülerleistungen ist es außerdem wichtig, die mit einer Aufgabe verbundenen kompetenzspezifischen Anforderungen zu beschreiben. Zur Untersuchung dieser Kriterien bedarf es einer systematischen Aufgabenanalyse, die auf diese Zielsetzung zugeschnitten ist. In Kapitel 2 erfolgt die Entwicklung eines solchen Instruments sowie dessen Veranschaulichung bei der Konstruktion und Modifikation von Aufgabenbeispielen.

Das dritte Kapitel stellt das entwickelte Konzept der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen vor. Nach einer notwendigen Abgrenzung des Beurteilungsgegenstandes werden die Bausteine des Konzeptes im Einzelnen beschrieben und begründet. Ein Schwerpunkt ist dabei die Erarbeitung kompetenz- und aufgabenspezifischer Beurteilungskriterien. Das Konzept wird für die Umsetzung in der Sekundarstufe II konkretisiert und anhand der Kriterien für kompetenzorientierte Beurteilungsformen reflektiert.

Das vierte Kapitel berichtet von der exemplarischen Erprobung des Beurteilungskonzeptes in der Sekundarstufe II. In drei Fallstudien wurde das Konzept in abweichenden Organisationsformen im schulischen Umfeld umgesetzt. An exemplarischen Schülerarbeiten wird gezeigt, dass bereits an einzelnen Aufgaben bestimmte Kompetenzausprägungen sichtbar werden können. Die Dokumentation von Kompetenzdarlegungen über mehrere Aufgaben zeigt neben stabilen individuellen Stärken und Schwächen auch deutliche aufgabenabhängige Schwankungen. Die Erprobung verdeutlicht, wie anhand der differenzierten Beurteilung Hinweise zur Gestaltung der mathematischen Förderung gewonnen werden können und gibt einen Eindruck zur Akzeptanz der differenzierten Beurteilung durch die Schüler.

Bezieht sich die Analyse von Aufgabenbearbeitungen auf die individuell ausgeführten Aktivitäten, steht der Lösungsprozess des Schülers im Mittelpunkt. Ergebniszentrierte Bewertungsverfahren sind nicht mehr ausreichend. Die ausgeführten Aktivitäten sind zu selektieren, zu analysieren und einzuordnen. Erst dann kann eine kriteriengeleitete Beurteilung erfolgen. In der didaktischen Diskussion wird als ein Merkmal der Aufgabenqualität die Offenheit der Aufgabe genannt. Methodisch offene Aufgaben erlauben Schülern unterschiedliche Zugänge und Lösungsstrategien. Dies hat zur Folge, dass die von den Schülern bei der Bearbeitung einer Aufgabe ausgeführten Aktivitäten deutlich von den mit der Aufgabe intendierten Aktivitäten abweichen können. Die individuellen Wege der Schüler sind bei der Beurteilung anzuerkennen. Sollen die Schüler aber Stärken und Schwächen bezüglich ausgewählter Aktivitätsbereiche erfahren, sind auch spezifische Aktivitäten anzuregen. In einer weiteren, in Kapitel 5 dargelegten, Untersuchung wird anhand ausgewählter Aufgaben exemplarisch die Vielfalt der ausgeführten Aktivitäten verdeutlicht und den intendierten Aktivitäten gegenübergestellt. Ziel dieser Untersuchung war es, Hinweise auf Aufgabenmerkmale zu erhalten, welche die Anregung vielseitiger und spezifischer

Aktivitäten unterstützen, was insbesondere für die Validität von Beurteilungsaufgaben wichtig ist.

Im abschließenden sechsten Kapitel werden die Erfahrungen mit den entwickelten Instrumenten, dem System der Analyse von Beurteilungsaufgaben und dem Konzept der differenzierten Leistungsbeurteilung, reflektiert und Anregungen für die schulische Umsetzung der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen gegeben.

# 1 Schüleraktivitäten als Indikatoren mathematischer Kompetenzen

Kognitive Fähigkeiten äußern sich darin, dass Aktivitäten ausgeführt werden können, die als Ausprägungen (Indikatoren) dieser Fähigkeiten angesehen werden (vgl. Fischer/Malle 1985, S. 281, Lompscher 1972, S. 17) und können deshalb nur über die Analyse dieser Aktivitäten erkannt werden (vgl. Lompscher 1972, S. 17). Aus der zielgerichteten und erfolgreichen Ausführung bestimmter Aktivitäten, z. B. beim Lösen von Aufgaben, wird auf das Vorhandensein entsprechender Kompetenzen geschlossen (vgl. Blum et al. 2005, S. 268). Umgekehrt wird davon ausgegangen, dass durch das Durchführen von (mathematischen) Aktivitäten entsprechende (mathematische) Fähigkeiten erworben werden können (vgl. Fischer/Malle 1985, S. 281). Mathematische Aktivitäten haben somit grundlegende Bedeutung sowohl für die Förderung und Entwicklung mathematischer Fähigkeiten bzw. mathematischer Kompetenzen als auch für deren Beurteilung und Rückmeldung. Bevor auf die Bedeutung von Schüleraktivitäten aus lerntheoretischer Sicht und die Verbindungen zwischen Aufgaben – Aktivitäten – Beurteilung eingegangen wird, wird das in dieser Arbeit verwendete Kompetenzkonzept beschrieben und begründet.

Das Konzept der Kompetenz wird in verschiedensten wissenschaftlichen Bereichen eingesetzt, ohne dass eine einheitliche Theorie oder eine Grundlage für eine Definition und Klassifikation gefunden werden kann (vgl. Weinert 2001, S. 46). Weinert beschreibt 2001 verschiedene Ansätze, Kompetenz zu definieren, zu beschreiben, zu interpretieren (vgl. auch Klieme 2004, S. 11). Drei dieser Ansätze sind für die Abgrenzung des in dieser Arbeit verwendeten Kompetenzbegriffes von besonderer Bedeutung:

- Allgemeine intellektuelle Kompetenzen: Kompetenzen werden als kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten verstanden, die es einer Person ermöglichen in unterschiedlichen Situationen anspruchsvolle Aufgaben zu meistern.
- Spezialisierte intellektuelle Kompetenzen: Kompetenzen entsprechen einer Klasse kognitiver Voraussetzungen, über die eine Person verfügen muss, um in einem speziellen Inhaltsgebiet gute Leistungen zu erzielen.
- Kognitive Kompetenzen in Verbindung mit motivationalen Handlungsmustern: Kompetenz ist zu sehen als Verbindung zwischen kognitiven Voraussetzungen und motivationalen Orientierungen, die für erfolgreiche Problembehandlungen notwendig sind.

An anderer Stelle verwendet Weinert die folgende Definition, die in Deutschland inzwischen zum Referenzzitat für Bemühungen um Bildungsstandards und Kompetenzmodelle geworden ist (vgl. Klieme 2004, S. 11/12, Klieme et al. 2003, S. 72):

> „Dabei versteht man unter Kompetenzen die bei Individuen verfügbaren oder von ihnen erlernbaren Fähigkeiten und Fertigkeiten, bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können.“ (Weinert 2002, S.27/28)

In Bezug auf den Allgemeinheitsgrad der einbezogenen Fähigkeiten und die Einbeziehung affektiver Dispositionen ist in dieser Arbeit das Verständnis der Schriften zu den Bildungsstandards leitend, da sie für das schulische Umfeld richtungsweisend sind.

Klieme et al. (2003, S. 72) verstehen Kompetenz als „eine Disposition, die Personen befähigt, bestimmte Arten von Problemen erfolgreich zu lösen, also konkrete Anforderungssituationen eines bestimmten Typs zu bewältigen“. Forschungsbefunde sprechen gegen zu große Erwartungen an eine breite Anwendbarkeit von (Schlüssel-) Kompetenzen (vgl. Klieme 2004, S. 12): Inhaltspezifischen Kompetenzen wird eine große Rolle bei der Lösung schwieriger Aufgaben zugesprochen; ihr Mangel kann nicht adäquat von allgemeinen (Schlüssel-) Kompetenzen ausgeglichen werden (vgl. Weinert 2001, S. 53). Die Beschreibung allgemeiner Fähigkeiten als Aspekte von Fachkompetenzen in den Bildungsstandards ist somit lernpsychologisch angemessen (vgl. Klieme 2004, S. 12).

Des Weiteren konzentrieren sich die in den Bildungsstandards angesprochenen fachlichen Kompetenzen auf kognitive Leistungsbereiche (vgl. Klieme 2004, S. 12). Diese, aus pragmatischen Gründen nachvollziehbare, Einschränkung wird bewusst benannt und es wird darauf hingewiesen, dass ebenso motivationale und handlungsbezogene Merkmale zum Kompetenzbegriff gehören. Auch diese Begrenzung wird in dieser Arbeit übernommen. Die nicht zufriedenstellenden Erklärungsmöglichkeiten für bestimmte Ergebnisse unterstreichen jedoch den Zusammenhang zwischen der Schülerleistung und der allgemeinen Lerneinstellung sowie der situationsbezogenen Motivation eines Schülers (vgl. Kapitel 5).

Klieme und Leutner (2006, S. 4) begegnen der Diskussion des Kompetenzbegriffes, indem sie Kompetenzen auffassen als „kontextspezifische kognitive Leistungsdispositionen, die sich funktional auf Situationen und Anforderungen in bestimmten Domänen beziehen“. Daran angelehnt werden in dieser Arbeit mathematische Kompetenzen verstanden als kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die sich auf Aufgaben und Anforderungen im Fach

Mathematik beziehen. Dieses Begriffsverständnis rechtfertigt die synonyme Verwendung der Begriffe „Kompetenzen“ bzw. „Fähigkeiten und Fertigkeiten“ in dieser Arbeit.

Kompetenz in diesem Verständnis kann nur leistungsbezogen erfasst und gemessen werden (vgl. Klieme et al. 2003, S. 73). Die Beurteilung aufgebauter mathematischer Kompetenzen eines Schülers ist folglich nur auf Grund der Beurteilung seiner Leistungen bei der Bewältigung konkreter mathematischer Aufgaben möglich. Insofern wird die Beurteilung mathematischer Kompetenzen als Leistungsbeurteilung eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts gesehen. Die Beziehung zwischen Kompetenz und Leistung wird dabei jedoch moderiert durch situationsbezogene Bedingungen, aktuelle kognitive und affektive Merkmale des Schülers, Merkmale der Umgebung, Merkmale der Aufgabe u. a. (vgl. Weinert 2001, S. 47ff.). Deshalb können Kompetenzen nicht durch einzelne isolierte Leistungen dargestellt und erfasst werden: „Der Bereich von Anforderungssituationen, in denen eine bestimmte Kompetenz zum Tragen kommt, umfasst immer ein mehr oder weniger breites Leistungsspektrum“ (Klieme et al. 2003, S. 74). Rahmen und Methode der Kompetenzerfassung in dieser Arbeit werden in Kapitel 3 beschrieben.

Aufgaben, Aktivitäten und Beurteilung sind die wesentlichen Komponenten des Konzeptes der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen: Aufgaben[1] sind der schulische Anlass, Schüler zu Aktivitäten anzuregen. Schüleraktivitäten sind als Indikatoren für mathematische Kompetenzen die Grundlage der Beurteilung. Eine differenzierte Beurteilung bedingt entsprechend vielseitige Aktivitäten, die nur durch hinreichend gehaltvolle Aufgaben initiiert werden können. In diesem ersten Kapitel werden Grundlagen zu den Komponenten Aktivitäten – Aufgaben – Beurteilung herausgearbeitet, auf denen ein Konzept zur Beurteilung mathematischer Kompetenzen, durch Analyse von Schüleraktivitäten bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben, aufgebaut werden kann.

[1] Die Bedeutung der Aufgaben liegt für diese Arbeit in erster Linie in der zielorientierten Aktivierung der Schüler. Aufgaben können somit weit gefasst als jegliche Aufforderung der Schüler zum Lernhandeln gesehen werden („Handlungsaufforderungen“, vgl. Bruder 1988, S. 193 und Anhang I, S. 22). Die Aufgaben der Umsetzung des Beurteilungskonzeptes entsprechen jedoch, auf Grund ihrer Komplexität und der Eingrenzung des Beurteilungsgegenstandes (vgl. 3.1), Aufforderungen zur Bearbeitung und Auseinandersetzung mit einer spezifischen mathematischen Situation (vgl. Neubrand, J. 2002, S. 17).

## 1.1 Lerntheoretische Bedeutung von Schüleraktivitäten

Die Bedeutung von Schüleraktivitäten für die Qualität und Effektivität des Unterrichts ergibt sich zuerst aus lerntheoretischen Überlegungen. Unbestritten ist: „Gelernt wird im Prinzip nur, was Inhalt des aktiven Lernens der Schüler ist“ (Weinert 2002, S. 24). Für den Lernerfolg eines Schülers ist entscheidend, wie viel Zeit er mit der aktiven Bearbeitung welcher Aufgaben verbringt (vgl. Weinert 2002, S. 24). Renkl (1991, S. 14ff.) arbeitet aus unterschiedlichen Theorien zum mathematischen Wissenserwerb die gemeinsame Annahme heraus, dass „mathematisches Wissen durch fortgesetzte aktive Auseinandersetzung mit Aufgaben erworben wird” (vgl. Lompscher 1972, S. 92). Die „kognitive Aktivierung der Lernenden” (Blum et al. 2005, S. 267) wird als eines der wichtigsten Kriterien für die Qualität des Mathematikunterrichts gesehen.

Nach dem Tätigkeitskonzept zurückgehend auf Rubinstein, Leont´ev, Lompscher u. a. entwickeln sich kognitive Fähigkeiten aus kognitiven Tätigkeiten (vgl. Lompscher 1972, S. 32, Rubinstein 1969, S. 110). Die Bedeutung eigener Handlungen für das Lernen wird auch in der konstruktivistischen Lerntheorie hervorgehoben.

### 1.1.1 (Mathematik-)Lernen als aktive Wissenskonstruktion

Nach der konstruktivistischen Lerntheorie werden durch die menschliche Wahrnehmung nicht reale Gegebenheiten abgebildet, wie sie „an sich“ sind, sondern individuelle Modelle (Konstrukte) entworfen, deren Objektivität nicht geprüft werden kann (vgl. Lindemann 1999, S. 1). Der Wert aufgebauter kognitiver Strukturen wird nach ihrer Funktion in der erlebten Wirklichkeit bemessen (vgl. von Glasersfeld 1999, S. 501). Nicht die wahre Beschreibung der Realität, sondern die Brauchbarkeit („Viabilität”) des Modells ist entscheidend. Begriffe, Anschauungen, Hypothesen und Theorien werden verdrängt, wenn sie in ihrer Anwendung nicht brauchbar sind (vgl. von Glasersfeld 1999, S. 501). An dieser groben Skizze konstruktivistischer Ideen wird bereits die Bedeutung von Aktivitäten für das Lernen in zweierlei Hinsicht deutlich: Der Aufbau von Konstrukten, aber auch das Prüfen der Brauchbarkeit aufgebauter Konstrukte ist nur durch geeignete Aktivitäten möglich.

Aus dem konstruktivistischen Verständnis vom lernenden Subjekt ergeben sich Folgerungen für das Lernen im Mathematikunterricht:

- Wichtig für den Konstruktionsprozess ist die individuell erworbene kognitive Struktur des Lernenden (vgl. Leuders, 2001, S. 78). Subjektive Erfahrungen sind Ausgangs- und Bezugspunkt der Gestaltung und Entwicklung individueller Beziehungen mit der Umwelt (vgl. Werning 1998, S. 40). Konsequenzen sollten die Individualisierung des Lernprozesses, Schülerorientierung und kumulatives Lernen sein (vgl. Leuders 2001, S. 78ff.).
- Lernen entspricht der aktiven Konstruktion von Wissen. Unterricht dient der Anregung, individuelle Konstruktionen zu hinterfragen, zu überprüfen, weiterzuentwickeln, zu verwerfen oder zu bestätigen etc. (vgl. Werning 1998, S. 40). Das macht eine stärkere Berücksichtigung schüleraktiver Arbeitsformen und ausführliche Phasen der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen notwendig (vgl. Leuders 2001, S. 78). Lernerfolge hängen von anregungsreichen Lernumgebungen ab, die Eigenkonstruktionen der Lernenden anstiften, z. B. lebensnahe, ganzheitliche Problemstellungen, die an Erfahrungen und Interessen der Lernenden anknüpfen (vgl. Hefendehl-Hebeker 1999, S. 39).
- Da Modelle vornehmlich nach ihrer Viabilität bewertet werden (vgl. Leuders 2001, S. 82, von Glasersfeld 1999, S. 501), entsteht Lernmotivation vor allem durch praktische Erfolge, weniger durch äußere Leistungsanreize (vgl. Rustemeyer 1999, S. 475). Wichtig für das Prüfen aufgebauter Konstrukte ist auch sozialer Austausch, Lernen wird zum aktiven Prozess in kollegialen Bezügen (vgl. Rustemeyer 1999, S. 475). Daraus erwächst die Bedeutung individueller Rückmeldungen, z. B. vom Lehrer oder Mitschülern an den Schüler, und der gemeinsamen Reflexion von Lernprozessen.

Die Herausbildung mathematischer Einsicht im Kopf der Lernenden ist ein „empfindlicher Prozess, der von außen nicht im Detail gesteuert werden kann“ (Hefendehl-Hebeker 2003, S. 109). Die innere Struktur bestimmt, wie sich ein Lernender mit Anregungen von außen auseinandersetzt. Folge dieser Beeinflussungsfaktoren ist eine „Unsicherheitsrelation“ (Werning 1998, S. 40) zwischen den Zielen des Lehrenden und den (Lern-)Handlungen des Lernenden. Eine Konsequenz dieser Erkenntnis ist die Notwendigkeit flexibler Beurteilungsformen, die von Schülern gezeigte Leistungen würdigen, auch wenn sie nicht vom Lehrer geplant wurden.

### 1.1.2 Schüleraktivitäten im Beziehungsnetz des Unterrichts

Leont´ev (1982) bezeichnet als Handlung[2] den einem bewussten Ziel untergeordneten Prozess. Realisierte Handlungen sind für ihn Komponenten der menschlichen Tätigkeiten. Ähnlich schreiben Christiansen und Walther:

> „Human activity proceeds through a system of actions, which are goaldirected processes caused by the motive of the activity. The activity is realized through these actions, which can be regarded as its components. Activity exists only in actions, but activity and actions are different entities." (Christiansen/Walther 1986, S. 255)

Jede Schüleraktivität kann analog in Teilaktivitäten aufgefächert werden. Beim graphischen Darstellen einer Funktion wird ein Koordinatensystem gezeichnet, werden Punkte eingetragen, verbindende Linien gezogen etc. Derartige Aufspaltungen sind jedoch nur soweit sinnvoll, wie die Teilaktivitäten für die Förderung der Schüler relevant sind. Bei einer weiteren Differenzierung gewinnen motorische Handlungen oder unbewusste, automatisierte Vorgänge an Bedeutung.[3] Unter einer mathematischen Aktivität wird in dieser Arbeit eine für das Lernen von Mathematik sinnvolle Einheit bewusster Handlungen verstanden.

*Ein Modell menschlicher Handlungen*

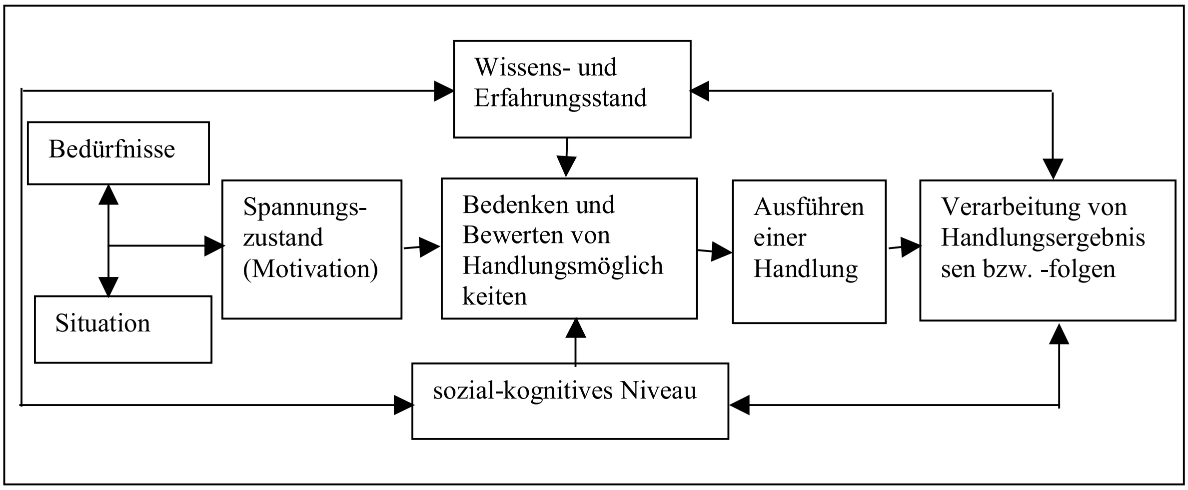



Abb. 1/1: Allgemeine Modellvorstellung menschlichen Handelns (Quelle: Tulodziecki/Herzig/Blömeke 2004, S. 37)

---

[2] Für die Zielsetzung dieser Arbeit ist es nicht notwendig, wie z. B. bei Leont´ev (1982), zwischen Aktivitäten/Tätigkeiten und Handlungen zu unterscheiden. Nach Tulodziecki, Herzig und Blömeke (2004, S. 33) lassen sich Lernaktivitäten als Handlungen verstehen (vgl. S. 11).

[3] Was eine sinnvolle Einheit ist, hängt auch vom Alter der Schüler ab. Wenn z. B. zu Beginn der Schulzeit das „Ausführen der Grundrechenoperationen" eine anspruchsvolle mathematische Tätigkeit ist, verliert diese im Sinne einer zu fördernden Kompetenz an Bedeutung, obwohl die Operationen notwendig bleiben.

Das Modell menschlichen Handelns nach Tulodziecki, Herzig und Blömeke (2004, S. 37) verdeutlicht das komplexe Beziehungsnetz um menschliche Aktivitäten (vgl. Abb. 1/1).

Aktivitäten sind objektorientiert (vgl. Christiansen/Walther 1986, S. 255, nach Leont´ev[4] z. B. 1982, S. 101/102) und situationsbedingt: Jede menschliche Tätigkeit entspringt einem spezifischen Bedürfnis, das in einer bestimmten Situationen aktiviert wird (vgl. Tulodziecki/Herzig/Blömeke 2004, S. 35). Bedürfnisse können im Rahmen einer zielgerichteten Aktivität zum Motiv werden, welches die Handlung aktiviert, und auf bestimmte Ziele hinsteuert (vgl. Scheibe 1989, S. 183, 190). Neben dem Ziel ist eine Aktivität gekennzeichnet von Bedingungen, die festlegen, wie das Ziel erreicht werden kann (vgl. Christiansen/Walther 1986, S. 255).

Die aus den wechselseitigen Beziehungen zwischen Bedürfnis und Situation entstehende Motivation fordert eine Entscheidung zugunsten einer der bewussten Handlungsmöglichkeiten (vgl. Tulodziecki/Herzig/Blömeke 2004, S. 35). Überlegungen dazu werden beeinflusst durch das bereichsspezifische Wissen, individuelle Erfahrungen, intellektuelle Fähigkeiten und Werthaltungen (vgl. Tulodziecki/Herzig/Blömeke 2004, S. 35).

Nach der Ausführung der Handlung werden die Handlungsergebnisse und -folgen verarbeitet, was zu Modifikationen der Elemente des Beziehungsnetzes und neuen Handlungsmustern führt. Rückmeldungen von außen können diesen Prozess beeinflussen.

*Aktivitäten des Lernens*

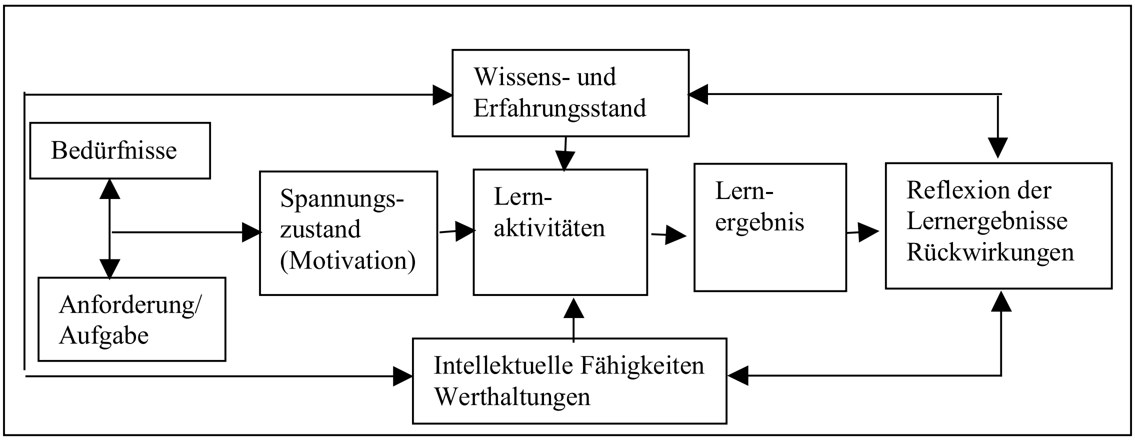



Abb. 1/2: Kognitionstheoretisches Lernmodell (Quelle: Tulodziecki, Herzig, Blömeke 2002, S. 55)

Abbildung 1/2, das kognitionstheoretische Lernmodell nach Tulodziecki, Herzig und Blömeke (2002, S. 55), verdeutlicht das Beziehungsgeflecht von Lernhandlungen. In der

[4] Leont´ev (1975, 1982) beschreibt ausführlich die Beziehungen zwischen „Tätigkeit, Persönlichkeit und Bewusstsein" und die Bedeutung von Tätigkeiten für das Lernen.

kognitionstheoretischen, speziell in der konstruktivistischen Auffassung vom Lernen, wird angenommen, dass Lernaktivitäten „zum Aufbau, zur Veränderung oder zur Ausdifferenzierung kognitiver Strukturen beitragen“ (Tulodziecki/Herzig/Blömeke 2004, S. 54, vgl. 1.1.1). Aktivitäten sind die Grundlage der Beziehungen eines Menschen zu seiner Umwelt (vgl. Christiansen/Walther 1986, S. 254). Potenziell sind alle Aktivitäten Lernaktivitäten, da sie auf den Wissens- und Erfahrungsstand, die intellektuellen Fähigkeiten und auch die Lernhaltungen wirken können. Damit ergeben sich gemeinsame Strukturen und Elemente in den Beziehungsnetzen für Aktivitäten allgemein und für Lernaktivitäten. Unterschiede entsprechen Konkretisierungen auf Grund der spezifischen Bedingungen des Lernens in der Schule.

In der Schule findet Lernen statt, indem die vom Lehrer gestellten Aufgaben zum Gegenstand der Aktivitäten der Schüler werden (vgl. Christiansen/Walther 1986, S. 260, S. 290ff). Hier kann sich Lernen nicht nur auf Aktivitäten stützen, die von individuellen Bedürfnissen und Interessen herrühren. Aufgaben, die persönliche Interessen des Lernens ansprechen, können jedoch zu einer starken Motivierung führen (vgl. 2.2.1).

Rückmeldungen ermöglichen es, extern gesammelte Daten mit inneren Modellen zu vergleichen und können Aktivitäten anregen, die Unstimmigkeiten ausgleichen (vgl. Christiansen/Walther 1986, S. 257). Beim schulischen Lernen wird bei der Reflexion der Lernergebnisse der Lehrer, der auch die Lernanforderungen stellt, eine entscheidende Rolle spielen.

*Aktivitäten als Vorstufe von Strategien*

An lebensweltbezogenen Aufgaben kann verdeutlicht werden, welche unterschiedlichen Motive Lehrer und Schüler mit einer Aufgabe verbinden können. An der Fragestellung „Welches ist für mich der günstigste Internetanbieter?“[5] können Jugendliche (z. B. der 8. Klasse) durchaus persönliches Interesse haben. In eine solche reale Situation eingespannt, erfasst ein Schüler selten die allgemeine Bedeutung seiner aktuellen Aktivitäten. Das Ergebnis der Aufgabe ist das Ziel seiner Tätigkeit. Für die fachbezogene Entwicklung des Schülers und somit unter fachdidaktischen Gesichtspunkten spielt das Ergebnis selbst eine geringere Rolle. Die Motive des Lehrers bei der Planung der Aufgabe betreffen den erhofften Lernprozess. Seine Intention könnte es sein, dass die Aktivitäten dazu beitragen, das

[5] Christiansen und Walther (1986, S. 261) erläutern die hier wiedergegebenen Zusammenhänge an der Fragestellung „How much does it cost to keep a dog?“.

Modellieren realer Situationen (hier z. B. anhand linearer Funktionen) zu lernen.[6]

Wird eine solche Aufgabe gestellt, werden nur einige Schüler die intendierten Aktivitäten spontan ausführen. Die Entwicklung geeigneter Handlungen und Handlungsschemata muss durch den Lehrer unterstützt werden (vgl. Christiansen/Walther 1986, S. 261). Notwendig dafür ist eine Reflexion, bei der mathematische Aktivitäten vorgestellt und diskutiert werden und den Schülern deutlich wird, dass Aktivitäten bewusst und zielorientiert gestaltet werden können. Wurde eine Aufgabe, unter Ausführung inhaltsgebundener Aktivitäten gelöst, und liegen Resultate und (unterschiedliche) Lösungswege vor, „geht es darum, explizit herauszuarbeiten, worin der Lernzuwachs aus dieser Aufgabe besteht" (Bruder 2006, S. 137). Dabei sind z. B. eingesetzte (mathematische) Begriffe und Verfahren als allgemeine Konzepte oder inhaltsgebundene Aktivitäten als (allgemeine) heuristische Strategien herauszuarbeiten und „in ihrer Tragweite und ihrer Übertragbarkeit auf andere Anwendungskontexte bewusst zu machen" (Bruder 2006, S. 137). Die Vorbildwirkung des Lehrers kann zu bewusster und unbewusster Übernahme von Aktivitäten durch die Schüler führen. Wichtig ist aber ebenso das Ausprobieren eigener Ideen, Vermutungen, sprachlicher Formulierungen etc. (vgl. Christiansen/Walther 1986, S. 261).

In Zusammenhang mit der Generalisierung von Aktivitäten zu kognitiven Strategien (vgl. Christiansen/Walther 1986, S. 261) werden die mit einer Aufgabe verbundenen Aktivitäten zwei Ebenen zugeordnet (vgl. Walther 1985, S. 38, Christiansen/Walther 1986, S. 261):

- Ebene 1 ist bestimmt durch das Objekt der Schüleraktivitäten, den mathematischen Gegenstand oder den betreffenden Sachgegenstand.
- Ebene 2 bezieht sich auf die (über Ebene 1)[7] zu entwickelnden und zu festigenden Lernhandlungen[8].

Auf Grund der sich ergänzenden Wirkung sind beiderlei Aktivitäten im Unterricht ausgewogen anzusprechen (vgl. Walther 1985, S. 38). Eine einseitige Betonung inhaltsgebundener Aktivitäten von Ebene 1 kann zu unbeweglichen Lösungsverfahren und deren mecha-

---

[6] Im Detail könnte er seine Schüler mit der Aufgabe zu folgenden mathematischen Aktivitäten anregen wollen: Entwerfen eines geeigneten Vorgehens, Sammeln notwendiger Daten (Anbieter auflisten, aktuelle Tarife notieren, Internetnutzung abschätzen etc), Systematisieren der Daten, Transformieren, Reorganisieren, Berechnen, Veranschaulichen der Ergebnisse, Bewerten der Eignung des verwendeten Modells.

[7] Kognitive Handlungen werden in aktuellen Situationen ausgelöst. Durch Wiederholung in gleich- und verschiedenartigen Situationen werden diese Handlungen allmählich verfestigt und verallgemeinert, d. h. vom konkreten Inhalt abgelöst und auf verschiedene Inhalte und Situationen übertragen (vgl. Lompscher 1972, S. 33).

[8] Gemeint sind intellektuelle Grundtechniken und allgemeine kognitive Strategien, bezugnehmend auf Wittmann (1981, S. 53).

nischer Anwendung führen. Bei einer Fixierung auf allgemeine Strategien der Ebene 2 dagegen bleiben Lernhandlungen sinnleer und formal, da sie nicht gegenstandsnah entwickelt worden sind (vgl. Walther 1985, S. 38). Das Verhältnis beider Ebenen kann durch Aufgabentext und Umsetzung im Unterricht gesteuert werden (vgl. Walther 1985, S. 38).

Mathematische Aktivitäten dienen somit dem Aufbau von Kenntnissen und der Herausbildung von Handlungsschemata bzw. Strategien. Diese Zusammenhänge werden bei der Beurteilung von Kompetenzen genutzt. Von einer Beurteilung der Güte einer Aktivität wird auf das Vorhandensein der entsprechenden Kompetenz geschlossen. Dieser Schluss von der aufgabenbezogenen Leistung auf die Kompetenz ist prinzipiell unsicher (vgl. 1.5.5). Die Sicherheit eines solchen Schlusses ist zunächst für die aufgabenbezogene Kompetenzeinschätzung zu verbessern, indem ausführliche und gut nachvollziehbare Schüleräußerungen gefordert werden. Zur Beurteilung einer Kompetenz sind unterschiedliche Aufgaben zu unterschiedlichen Aspekten einer Kompetenz und zu unterschiedlichen mathematischen Inhalten heranzuziehen.

**Verdichtung und Schlussfolgerung**

Kognitive Strukturen sind in konstruktivistischer Sicht wertvoll, wenn sie sich bei vielseitigen Aktivitäten und in vielseitigen Anwendungssituationen als brauchbar erweisen. Aktivitäten wirken in dieser Weise auf die innere Struktur und verfügbaren Handlungsmuster. Beim schulischen Lernen werden Aktivitäten durch Aufgaben angeregt und organisiert. Aus inhaltsgebundenen Aktivitäten gilt es weiter allgemeine Strategien zu entwickeln. Dafür ist die Art der Schüleraktivitäten, beeinflussbar durch die Aufgabenauswahl, und die Reflexion der aufgabenbezogenen Aktivitäten wichtig. Eine Analyse der individuellen Schüleraktivitäten verbunden mit einer differenzierten Beurteilung und individuellen Rückmeldung sollte die Schüler sowohl bei der Entwicklung geeigneter kognitiver Modelle, als auch bei der Entwicklung von Kompetenzen unterstützen.

## 1.2 Anforderungen an das Spektrum mathematischer Aktivitäten aus fachlicher, fachdidaktischer und gesellschaftlicher Perspektive

Für das Lernen von Mathematik und die Entwicklung mathematischer Kompetenzen ist nicht nur wichtig, dass die Schüler aktiv sind, sondern auch, welche Aktivitäten sie ausführen. In diesem Abschnitt wird herausgearbeitet, welche Aktivitäten im Mathematikunterricht explizit angeregt, beobachtet und auch beurteilt werden sollten. Bedeutsam sind dabei Aktivitäten, die den besonderen Charakter des Faches Mathematik und des Lernens von Mathematik widerspiegeln, aber auch solche, die allgemeinen Bildungszielen entsprechen.

### 1.2.1 Fachlich und fachdidaktisch bedeutsame Schüleraktivitäten

Damit sich Mathematikunterricht nicht von der Fachwissenschaft und ihrer allgemeinen Bedeutung abkoppelt, darf der Unterricht fachwissenschaftliche Bezugspunkte (Inhalte und Methoden) nicht aus den Augen verlieren (vgl. Leuders 2003, S. 15). Eine Möglichkeit die Struktur des Faches zu beschreiben sind fundamentale Ideen bzw. Leitideen (zur Übersicht z. B. Heymann 1996, S. 161ff., Humenberger/Reichel 1995, S. 1ff.). Leitideen vereinigen Inhalte gleicher Struktur verschiedener mathematischer Fachgebiete und durchziehen ein Curriculum spiralförmig. Die zunehmende Popularität von Leitideen wird auch als „Antwort auf die Überflutung mit unverbundenem Detailwissen und auf das Problem der Stofffülle und Stoffisolation“ (Tietze/Klika/Wolpers 2000, S. 37) gesehen.
Mit der Entwicklung und Anwendung der in den Katalogen fundamentaler Ideen genannten Begriffe[9] sind spezifische Aktivitäten verbunden, z. B. Zahl – zählen, ordnen; Raum – räumlich darstellen, räumliche Darstellungen lesen/interpretieren; Funktion – funktionale Zusammenhänge erkennen, darstellen, beschreiben; Algorithmus – Algorithmen erstellen, anwenden. Andere fundamentale Ideen stellen direkt mathematische Tätigkeiten heraus: Modellieren, Linearisieren, Geometrisieren, Koordinatisieren, Strukturieren.

Neben spezifischen Inhalten zeichnet sich Mathematik durch charakteristische Methoden aus. H. Winter (1975, S. 116) beschreibt Mathematik treffend durch vier Aspekte, die auf wichtige mathematische Aktivitäten hinweisen und im Folgenden skizziert werden.

---

[9] In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (KMK 2004) und für den Hauptschulabschluss (KMK 2005) strukturieren die Leitideen Zahl, Messen, Raum und Form, Funktionaler Zusammenhang, Daten und Zufall die mathematischen Inhalte der Sekundarstufe I. In der gymnasialen Oberstufe ziehen sich durch die Sachgebiete Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik die Leitideen Funktionaler Zusammenhang, Grenzprozesse/Approximation, Modellieren, Messen, Algorithmus, Räumliches Strukturieren/Koordinatisieren, Zufall (vgl. KMK 2002).

*Mathematik als beweisende Wissenschaft*

Die Methode, welche wohl am stärksten mit der Mathematik assoziiert wird, ist das Beweisen. Die Gültigkeit von Aussagen wird in der Mathematik nicht wie in anderen Wissenschaften empirisch (Experimente, Untersuchungen) nachgewiesen. Eine neue Aussage wird durch Regeln des logischen Schließens deduktiv auf bereits bewiesene Sätze oder gesetzte Axiome zurückgeführt. Die logische Strenge wird als ein zentraler Aspekt mathematischen Denkens gesehen (vgl. Winter 1975, S. 109, Walsch 2000, S. 28): „hier gehört die logisch begründende Rechtfertigung, die Analyse der Begründung sozusagen mit zum Inhalt“ (Winter 1975, S. 109).

*Mathematik als schöpferische Wissenschaft*

Charakteristisch für die Mathematik als Wissenschaft sind auch ihre forschenden und entdeckenden Prozesse. Dabei wird die Mathematik oft als „Wissenschaft der Muster”[10] gesehen (vgl. Devlin 2002, Devlin 2006, Stewart 2001, Wittmann 2003). Nach Stewart leben wir in einem „Universum voller Muster“ (2001, S. 11) und Mathematik ist „die mehr oder weniger systematische Art und Weise, die Regeln und Strukturen, die hinter einigen beobachtbaren Mustern oder Regelmäßigkeiten verborgen sind, ans Licht zu bringen.“ (Stewart 2001, S. 24). Die z. T. auch gegensätzlichen mathematischen Erkenntnistheorien (zur Übersicht z. B. Leuders 2003, S. 19ff.) stimmen darin überein, dass die Prozesse des Erkenntnisgewinns, also der Musterentdeckung, auf schöpferischen Aktivitäten beruhen. Bei vielen heuristischen Aktivitäten, wie Verallgemeinern, Analogisieren, Strukturieren, wird wiederum das Vorhandensein von Mustern vorausgesetzt. Ohne schöpferische Aktivitäten kann, so H. Winter (1975, S. 107), wirkliche Mathematik nicht erlernt werden. Die Intuition „ist in der kreativen Mathematik stets vorhanden und sie motiviert und leitet selbst die abstraktesten Denkvorgänge“ (Courant 1974, S. 195).

*Mathematik als formale Wissenschaft*

Typisch für mathematisches Arbeiten ist weiterhin die Formalisierung. Eigenschaften von Objekten und Zusammenhänge zwischen verschiedenen Objekten werden auf ihre mathematische Struktur abstrahiert und durch Systeme der symbolischen Darstellung beschrie-

---

[10] Die Wirkung dieser populär gewordenen Bezeichnung für Mathematik liegt nicht zuletzt in ihrer Kürze. Devlin erweitert die Definition zu „Mathematik ist die Wissenschaft von Ordnungen, Mustern, Strukturen und logischen Beziehungen” (2006, S. 97). Da aber Mathematiker unter dem Begriff „Muster ” alle Elemente der erweiterten Definition einschließen, hält auch er den kurzen Ausdruck für umfassend (Devlin 2006, S. 97).

ben. Durch die Formalisierung werden semantische Bezüge ausgeblendet, Verallgemeinerungen weit über das Anschauliche hinaus möglich und Denkschritte präzisiert (vgl. Winter, H. 1975, S. 114). „Das Formale in Gedankengängen herauszuarbeiten und damit mehr Transparenz und Einsicht in Zusammenhänge zu schaffen“ (Hefendehl-Hebeker 2003, S. 108) ist ein besonderes Anliegen der Mathematik. Die mathematische Lösung von Problemen erfolgt durch formale Operationen auf der symbolisch-abstrakten Ebene. Dabei sichern Algorithmen „Gedankengänge ein für alle Male ab und entlasten den Geist zugunsten produktiven Denkens“ (Winter 1975, S. 114).

*Mathematik als anwendbare Wissenschaft*

Die Entwicklung der Mathematik erhielt wichtige Impulse durch ihre Anwendbarkeit und die breite Anwendbarkeit ist Zeichen der Vielseitigkeit des Faches (vgl. Humenberger/Reichel 1995, S. 13). Der Wirklichkeitsbezug der Mathematik kommt ebenfalls einem wesentlichen Aspekt der geistigen Existenz des Menschen nach: „dem Bestreben, Wirklichkeit zu beherrschen, d. h. Voraussagen zu treffen, ökonomisch zweckmäßige Entscheidungen zu treffen, Technik zu betreiben“ (Winter 1975, S. 112). Die wesentlichen Aktivitäten bei der Anwendung von Mathematik in außermathematischen Situationen werden im Modellbildungskreislauf (z. B. Westermann 2003, Kieme/Neubrand/Lüdtke 2001, vgl. 1.3.3) deutlich.

Die Vielfalt der Aktivitäten beim Betreiben von Mathematik wird eindrucksvoll von Hefendehl-Hebeker (2003) verdeutlicht. Aktivitäten zu den vorgestellten vier Aspekten mathematischen Arbeitens benennt H. Winter (1975). In dieser Arbeit findet sich ein systematischer Katalog mathematischer Aktivitäten in Abschnitt 1.3, der bei veränderter Strukturierung die vier Aspekte von Mathematik nach H. Winter (vgl. 1.3.2) berücksichtigt.

### 1.2.2 Gesellschaftlich und individuell bedeutsame Schüleraktivitäten

Erwartungen und Forderungen an den Mathematikunterricht werden von unterschiedlichen Teilen der Gesellschaft formuliert (vgl. Leuders 2001, S. 37ff., Weinert 1999, S. 21): Wirtschaf, Universität, erwachsenen Nichtmathematikern und den Schülern selbst. In den vielschichtigen Anforderungen an mathematische Bildung treten unterschiedliche Komponenten hervor (vgl. Leuders 2003), die z. T. auch in fachdidaktischen Konzepten der mathematischen Allgemeinbildung (vgl. Winter 1995, Heymann 1996) betont werden:

- Mit *Mathematischer Bildung als Vordergrundbildung* ist eine funktionale, abrufbare mathematische Grundbildung gemeint (vgl. Leuders 2003, S. 49ff.): elementare mathematische Techniken („Kulturtechniken“, Zech 1996, S. 59, „Bürgerliches Rechnen“, Winter, H. 1995), Fähigkeiten zum Umgang mit Zahlen und Größen, zur Orientierung in Raum und Zeit und zum Verständnis stochastischer Zusammenhänge (vgl. Wittmann 1981, S. 45). Dabei geht es vorwiegend nicht um die Reproduktion von Kenntnissen und Methoden und die kontextfreie Darlegung technischer Fertigkeiten, sondern darum, mathematisches Denken und mathematische Konzepte in vielfältigen Situationen einzusetzen (vgl. Leuders 2003, S. 50ff., Winter, H. 1995).
- *Mathematik als Hintergrundbildung* heißt, die grundlegende und spezifische Bedeutung der Mathematik für Technik, Wissenschaft, Wirtschaft, Kultur zu kennen (vgl. Leuders 2003, S. 54/55, Zech 1996, S. 60). Mathematikunterricht sollte den Schülern ermöglichen, mathematische Konzepte als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen (vgl. Winter 1995).
- *Mathematische Bildung als Expertenbildung* bezieht sich auf den Bedarf an mathematisch qualifizierten Fachkräften, die auch mit spezielleren Aspekten des Faches vertraut sind (vgl. Leuders 2003, S. 56/57).
- *Mathematische Bildung als personale Bildung* beschreibt den spezifischen Beitrag des Faches Mathematik zur kognitiven Entwicklung von Kindern insgesamt. Von besonderer Bedeutung ist dabei der Erwerb heuristischer Fähigkeiten (vgl. Winter, H. 1995). Ebenso sind Argumentieren, Darstellen, rationales und logisches Denken, aber auch konzentriertes Arbeiten, exaktes Arbeiten, Beharrlichkeit, konstruktiver Umgang mit Fehlern Beispiele allgemein[11] wichtiger Fähigkeiten, die besonders im Mathematikunterricht gefördert werden können.

[11] Weinert (1999, S. 29) weist auf einen (qualitativ) antiproportionalen Zusammenhang zwischen Allgemeinheitsgrad und Wirksamkeit einer Kompetenz hin. Allgemeine Kompetenzen müssen deshalb auf unterschied-

### 1.2.3 Schüleraktivitäten als Beiträge zu allgemeinen Lernzielen und zur Umsetzung von Bildungsstandards

Aus gesellschaftlichen Anforderungen und dem besonderen fachlichen Charakter ergeben sich allgemeine Lernziele[12] für den Mathematikunterricht, d. h. Ziele, die fachbezogene Tätigkeiten beschreiben, jedoch nicht an ein mathematisches Gebiet gebunden sind (vgl. Zech 1996, S. 54). Die Umsetzung von Lernzielen erfolgt durch (Schüler-)Aktivitäten, welche „ein Bindeglied zwischen mathematischen Inhalten und allgemeinen Lernzielen“ (Fischer/Malle 1985, S. 278) darstellen. Die Beschreibung durch Aktivitäten, als Ausprägungen der Lernziele, stellt neben der Festlegung des zu erwerbenden Wissens und Könnens in Lehrplänen und der Angabe von Aufgaben in Lehrbüchern, eine dritte Möglichkeit der Präzisierung allgemeiner Lernziele dar (vgl. Fischer/Malle 1985, S. 296ff.). Für die praktische Umsetzung ist die Verbindung von Inhalten, Aktivitäten und konkreten Aufgaben wichtig (vgl. 1.4), wie sie neben Fischer und Malle (1985, S. 282ff.) von H. Winter (1975), Bürger (1981) und Lechner (2002, S. 260ff.) vorgenommen wird.

Obwohl seit langem und fortlaufend auf die Bedeutung allgemeiner Lernziele hingewiesen wird, gelingt die Umsetzung im Unterricht bisher nicht zufriedenstellend:

> „Die internationalen Vergleichsstudien TIMSS und PISA[13] haben gezeigt, dass die mathematische Bildung unserer deutschen Schüler nicht den in Lehrplänen und didaktischen Zielvorstellungen formulierten Ansprüchen genügt und die Leistungen im Vergleich mit anderen Ländern nur im Mittelfeld liegen, allgemeiner: dass unser Bildungssystem nicht effektiv ist.“ (Blum et al. 2005, S. 266).

Als eine Reaktion auf die unbefriedigenden Lernerfolge der deutschen Schüler hat die Kultusministerkonferenz 2003 die Einführung von Bildungsstandards beschlossen, u. a. auch für das Fach Mathematik. Damit wird (verbindlich) festgelegt, welche allgemeinen mathematischen Kompetenzen die Schüler bis zu gewissen Stationen ihres Bildungsgangs (Abschluss Klasse 4, Hauptschulabschluss, Mittlerer Schulabschluss) erworben haben sollen (vgl. Blum 2005, S. 267/268, KMK 2004, KMK 2005, Heymann 2004, S. 7/8). Der Ansatz, Kompetenzen in den Mittelpunkt zu rücken, wird als ein vernünftiger und vielversprechender Mittelweg zwischen unverbindlichen allgemeinen Zielformulierungen und

---

lichen Allgemeinheitsebenen und in enger Verbindung mit der Vermittlung inhaltlichen Wissens erworben werden (vgl. Weinert 1999, S. 29). Der Transfer auf außermathematische Probleme stellt sich nicht von selbst ein, sondern ist durch geeignete didaktische Vermittlungen zu unterstützen (vgl. Winter 1995).

[12] Eine umfassende Analyse und Ordnung von Lernzielen für den Mathematikunterricht findet sich in Wittmann 1981 (S. 46ff.) und Zech 1996 (S. 54ff.). Die allgemeinen Lernziele des Mathematikunterrichts von Winter (1975) werden in 1.3.2 vorgestellt.

[13] Zu den Ergebnissen dieser Studien siehe z. B. Baumert/Lehmann 1997 und Baumert et al. 2001.

unerfüllbaren Feinlernzielkatalogen gesehen (vgl. Blum 2005, S. 268). Das für die Bildungsstandards zum Mittleren Schulabschluss und zum Hauptschulabschluss verwendete Kompetenzmodell orientiert sich eng an dem für PISA entwickelten und dort erprobten Modell (vgl. OECD 2003, S. 40ff.). Unterschieden werden neben sechs Kompetenzbereichen fünf inhaltliche Leitideen und drei Anforderungsbereiche (vgl. Blum 2005, S. 269, KMK 2004, KMK 2005, Tab. 1/1). Damit werden die für mathematisches Arbeiten in der Mittelstufe relevanten kognitiven und inhaltlichen Tätigkeiten weitgehend abgedeckt (vgl. Blum 2005, S. 269).

Tab. 1/1: Kompetenzbereiche, Leitideen und Anforderungsbereiche der Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss und den Hauptschulabschluss im Fach Mathematik.

<table>
<tr><th colspan="3">Allgemeine mathematische Kompetenzen</th><th>Mathematische Leitideen</th></tr>
<tr><td colspan="3">K1 Mathematisch argumentieren</td><td>L1 Zahl</td></tr>
<tr><td colspan="3">K2 Probleme mathematisch lösen</td><td>L2 Messen</td></tr>
<tr><td colspan="3">K3 Mathematisch modellieren</td><td>L3 Raum und Form</td></tr>
<tr><td colspan="3">K4 Mathematische Darstellungen verwenden</td><td>L4 Funktionaler Zusammenhang</td></tr>
<tr><td colspan="3">K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen</td><td rowspan="2">L5 Daten und Zufall</td></tr>
<tr><td colspan="3">K6 Kommunizieren</td></tr>
<tr><td>Anforderungs-bereiche</td><td>(AB I) Reproduzieren</td><td>(AB II) Zusammenhänge herstellen</td><td>(AB III) Verallgemeinern und Reflektieren</td></tr>
</table>

Da Bildungsstandards anzustrebende „fachliche und fachübergreifende Basisqualifikationen" formulieren (KMK 2004, S. 3), hat das Erwerben der dort benannten Kompetenzen, insbesondere deren inhaltliche Konkretisierungen, die Stellung von Lernzielen.[14] In Abschnitt 1.3.2 wird gezeigt, dass sich die allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards, die allgemeinen Lernziele von H. Winter und die in dieser Arbeit verwendete Differenzierung mathematischer Kompetenzen, zurückgehend auf die Aktivitätsbereiche von Lechner, weitestgehend entsprechen.

[14] In Lehrplänen wurden bisher die Kenntnisse, Fähigkeiten und Einstellungen, die Schüler beim schulischen Lernen erwerben sollen, in Lernzielen und -inhalten aufgelistet und zeitlich angeordnet (vgl. KMK 2003, S. 7). Bildungsstandards formulieren bzgl. zentraler Kompetenzbereiche „die zu erreichende Zielebene bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe bzw. einem bestimmten Abschluss, während Lehrpläne den Weg zur Zielerreichung beschreiben und strukturieren" (KMK 2003, S, 7). Für die schulpraktische Umsetzung können die inhaltlichen Konkretisierungen der aufzubauenden allgemeinen mathematischen Kompetenzen, wie sie in den Bildungsstandards Mathematik und in neuen Rahmenplänen formuliert werden als Lernziele aufgefasst werden, die es zeitlich zu- und anzuordnen gilt.

**Verdichtung und Schlussfolgerung**

Mathematik ist eine beweisende, schöpferische, formale und anwendbare Wissenschaft. Diese fachliche Charakteristik, verbunden mit gesellschaftlichen Anforderungen, erfordert ein breites Spektrum von Schüleraktivitäten im Mathematikunterricht, um allgemeine Lernziele und die Bildungsstandards für den Mathematikunterricht umzusetzen.

## 1.3 Systematisierung mathematischer Aktivitäten

Um einschätzen zu können, ob eine Aufgabe vielseitige mathematische Aktivitäten anspricht, ist eine geeignete Systematisierung mathematischer Aktivitäten zu finden. In diesem Abschnitt wird das in dieser Arbeit verwendete System der Systematisierung in vier „Qualitäten mathematischen Arbeitens“ von Lechner (2002, S. 255ff.) vorgestellt. Eine Gegenüberstellung mit den allgemeinen Lernzielen von Winter und den Bildungsstandards für das Fach Mathematik verdeutlicht, inwiefern das gewählte System Anforderungen an den Mathematikunterricht berücksichtigt. Eine geeignete Systematisierung mathematischer Aktivitäten liefert als Unterscheidung entsprechender Kompetenzbereiche die Grundlage einer differenzierten Beurteilung und Rückmeldung mathematischer Kompetenzen.

### 1.3.1 Systematisierung nach Qualitäten mathematischen Arbeitens

Die „für ein produktives mathematisches Arbeiten erforderlichen Fertigkeiten und Fähigkeiten“ ordnet Lechner (2002, S. 255ff.) vier Aktivitätsbereichen („Qualitäten“) zu.[15]

*Darstellend-interpretatives Arbeiten*

umfasst Aktivitäten, die Übersetzungen von Situationen, Zuständen, Prozessen aus der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik und wieder zurück betreffen, aber auch Aktivitäten der Übersetzung zwischen verschiedenen mathematischen Darstellungen.

z. B.: zwischen Darstellungsformen übersetzen (z. B. Realität↔Modell, Algebra↔Geo metrie, Term↔Grafik), mathematische Sachverhalte verbal oder formal beschreiben, graphisch darstellen (auch mit Computeralgebrasystemen), schematisch darstellen, allgemeine Zusammenhänge mit konkreten Daten veranschaulichen, Darstellungen interpretieren

---

[15] Diese Systematik wurde vom Rahmenplan der AHS Oberstufe (bmbwk, 2004) übernommen und ist eine Weiterentwicklung früherer in österreichischen Lehrplänen und didaktischen Arbeiten verwendeten Ordnungen (vgl. Fischer/Malle 1985, S. 279, Bürger 1981, S. 283).

*Heuristisch-experimentelles Arbeiten*

bezieht sich auf Aktivitäten des zielgerichteten Entdeckens, Experimentierens, Vermutens. Dazu zählt die Variation von Parametern, das Ausführen von Simulationen, das Untersuchen von Spezial- und Grenzfällen sowie das Übergehen zu Verallgemeinerungen.

z. B.: Probleme finden, Kenntnisse/vertraute Methoden kombinieren – eine Lösungsstrategie entwickeln, Beispiele finden, charakteristische Eigenschaften herausarbeiten, probieren/systematisch probieren, heuristische Strategien angeben, experimentieren, analysieren, abstrahieren, konkretisieren, analogisieren, verallgemeinern, spezialisieren, Fragen nach Zusammenhängen stellen

*Formal-operatives Arbeiten*

beinhaltet die kalkülhaften und algorithmischen Aktivitäten des Mathematikunterrichts, d. h. alle Aktivitäten, die mit der Anwendung von Verfahren, Rechenmethoden, Techniken usw. zu tun haben.

z. B.: Operationen/Umformungen durchführen, Umformungsschritte erläutern/Rechenregeln dazu angeben, Gleichungen lösen, geometrische Konstruktionen durchführen, statistische Kenngrößen ermitteln, Verfahren/Algorithmen ausführen, Algorithmen erstellen, mit Rechenwerkzeugen umgehen

*Kritisch-argumentatives Arbeiten*

umfasst Aktivitäten, die das Argumentieren, Begründen, Beweisen betreffen, ebenso das kritische Überprüfen von Eigenschaften und Vermutungen und das Vornehmen von Fallunterscheidungen.

z. B.: Aussagen präzisieren, definieren, mathematische Begriffe in Bezug auf ihre Bedeutung/Entwicklung/Erweiterung diskutieren, begründen, die Vollständigkeit einer Argumentation überblicken, mit logischen Schlussweisen arbeiten, mathematische und außermathematische Begründungen vergleichen, beweisen (direkt, indirekt, induktiv), Beweismethoden kennen, erklären und vielseitig anwenden, Exaktheitsniveaus hinterfragen, Eigenschaften/Vermutungen/Ergebnisse überprüfen, Fallunterscheidungen vornehmen, die beschränkte Gültigkeit von Aussagen erkennen, Voraussetzungen feststellen

Im folgenden Abschnitt wird verdeutlicht, dass eine Differenzierung in die vier vorgestellten Aktivitätsbereiche allgemeine Lernziele des Mathematikunterrichts und die KMK-

Bildungsstandards widerspiegelt und als Unterscheidung wichtiger Kompetenzbereiche für differenzierte Beurteilungen potenziell geeignet ist.

### 1.3.2 Vergleich der gewählten Systematisierung mit Bereichen allgemeiner Lernziele und den Kompetenzbereichen der Bildungsstandards

Um allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht zu gewinnen, untersucht H. Winter 1975 mathematische Grundtätigkeiten, die sich aus der alltäglichen allgemeinen Denkpraxis entwickelt haben und von denen er annimmt, dass bei ihrer Entwicklung allgemeine kognitive Fähigkeiten beeinflusst werden können. Seine vier Bereiche allgemeiner Lernziele sieht er als Versuch, „die vielfältigen Aktivitäten beim Lernen von Mathematik zu bündeln und ihre genetischen Wurzeln freizulegen“ (H. Winter 1975, S. 107): Der Unterricht soll dem Schüler Möglichkeiten geben,

- schöpferisch tätig zu sein.
- rationale Argumentation zu üben.
- die praktische Nutzbarkeit der Mathematik zu erfahren.
- formale Fertigkeiten zu erwerben.

Werden die zugehörigen Aktivitäten verglichen, stimmen die Bereiche schöpferisch Tätigsein (H. Winter) und heuristisch-experimentell (Lechner) sowie rationale Argumentation (H. Winter) und kritisch-argumentativ (Lechner) überein. Bezüglich der beiden weiteren Komponenten gibt es keine entsprechende Deckung, jedoch deutliche Zusammenhänge.

H. Winter fasst den Bereich der formalen Fertigkeiten breiter als Lechner den Bereich formal-operativ. Neben den kalkülhaften Fertigkeiten ordnet H. Winter hier auch die Prozesse des Formalisierens, des Übertragens in die formale Darstellung, ein (z. B. codieren, decodieren, Beziehungen zwischen Gegenstands- und Sprachbereich beschreiben). Letztere Aktivitäten zählt Lechner zum darstellend-interpretativen Arbeiten.

Der entscheidende Unterschied zwischen beiden Systemen ist, dass H. Winter im Gegensatz zu Lechner das Anwenden der Mathematik in außermathematischen Situationen als separates Gebiet mathematischer Aktivitäten herausstellt. Die dort zugeordneten Aktivitäten (z. B. schematisieren, messen, tabellieren, die Fragestellung in mathematischer Sprache formulieren, mathematisch sinnvolle Fragestellungen finden) sind bei Lechner im darstellend-interpretativen, formal-operativen oder heuristisch-experimentellen Bereich enthalten.

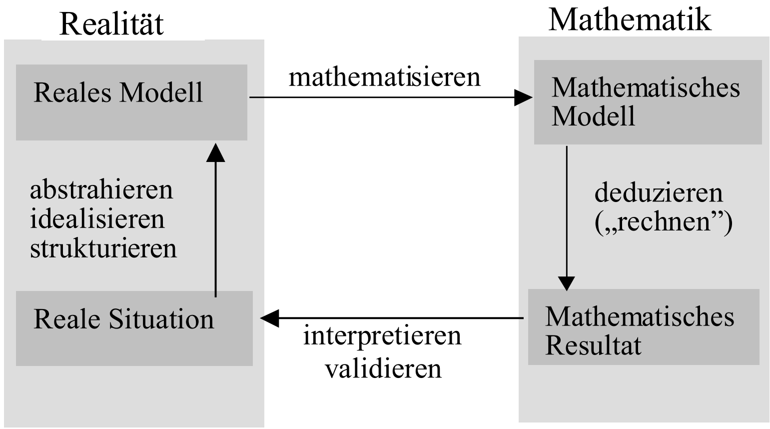



Abb. 1/3: Modellbildungskreislauf nach Westermann 2003, S. 157

Wie vielfältig und unterschiedlich die Tätigkeiten beim Modellieren außermathematischer Situationen sind, wird am Modellbildungskreislauf (vgl. Abb. 1/3 nach Westermann 2003, S. 157) deutlich. Zunächst wird die reale Situation abstrahiert, idealisiert, strukturiert. Erst das vereinfachte reale Modell ist der Mathematisierung zugänglich. Diese Tätigkeiten sind heuristisch-experimentell: Wesentliche Strukturen sind zu erkennen und von unwesentlichen zu trennen. Das reale Modell wird in ein mathematisches Modell umgewandelt, die natürliche Beschreibung in eine mathematisch-symbolische oder graphische Darstellung übersetzt. Variablen werden definiert, Gleichungen, Funktionen, Matrizen etc. aufgestellt. Dabei treten heuristisch-experimentelle (eine geeignete Darstellung finden/entwickeln, Zusammenhänge zwischen verschiedenen Darstellungen erkennen/herstellen) und darstellend-interpretative Aktivitäten auf. Wird im nächsten Schritt auf mathematischer Ebene ein (formales) Ergebnis bestimmt, sind überwiegend formal-operative Aktivitäten auszuführen. Auch dabei können heuristisch-experimentelle Aktivitäten notwendig werden, z. B. wenn erst ein geeignetes Vorgehen zu entwickeln ist. Schließlich ist das mathematische Resultat zu interpretieren und das verwendete Modell zu validieren. Bezüglich der Aktivitäten ist es günstig, diesen Schritt aufzugliedern (vgl. Klieme/Neubrand/Lüdtke 2001, S. 144). Bei der Rückübersetzung des formalen Ergebnisses in die Sprache des Kontextes werden darstellende Aktivitäten angesprochen. Eventuell sind hier erneut heuristische Aktivitäten notwendig, z. B. wenn aus mehreren formalen Lösungen die im Kontext sinnvollen herauszustellen sind. Bei der Validierung des verwendeten Modells sind kritisch-argumentative Aktivitäten erforderlich: Das Modell ist bezüglich seiner Eignung kritisch zu betrachten und zu bewerten. Es wird deutlich, dass bei genauer Betrachtung mathematische Anwendungen alle vier Aktivitätsbereiche von Lechner ansprechen.[16]

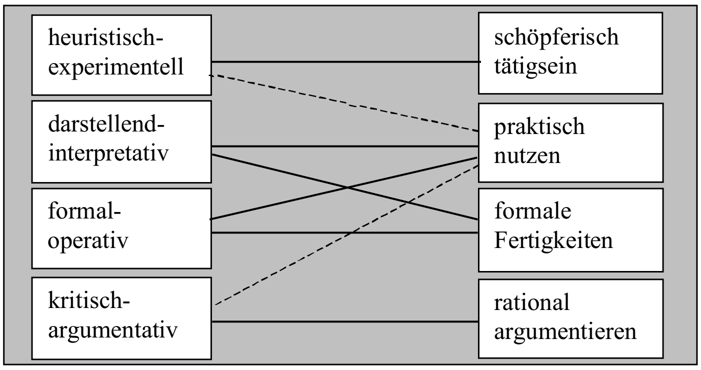



Abb.1/4: Verbindungen zwischen den Bereichen allgemeiner Lernziele von H. Winter und den Aktivitätsbereichen von Lechner. Durchgezogene Linien verdeutlichen direkte Verbindungen, gestrichelte Linien stehen für weniger offensichtliche Verbindungen, die erst bei einer genauen Analyse der zugehörigen Bereiche aufgedeckt werden.

Abbildung 1/4 verdeutlicht die Verbindungen zwischen den Aktivitätsbereichen von Lechner und den allgemeinen Lernzielen von Winter und zeigt, dass bei einer Verwendung des Systems von Lechner alle wichtigen Aspekte des Faches Mathematik (vgl. 1.2.1) berücksichtigt werden. Bezüglich der Systematisierung von Aktivitäten unterscheidet das System von Lechner deutlicher nach der Struktur der Aktivität und der damit verbundenen Anforderung. Die Anforderungen von (außermathematischen) Anwendungen liegen eher in der Notwendigkeit von Verknüpfungs- und Übersetzungsvorgängen als in der Tatsache, dass es sich um einen außermathematischen Kontext handelt. Das zeigt sich auch in der Verallgemeinerung von Modellierung auf innermathematische Kontexte (vgl. Neubrand, J. 2002, S. 104, Neubrand, M. et al. 2002, S. 102). Allein durch einen außermathematischen Kontext entsteht noch keine höhere Anforderung (vgl. Neubrand, M. et al. 2002, S. 112). Der kognitive Anspruch der Aufgabe ergibt sich dagegen aus der Komplexität der Modellierung (Neubrand, M. et al. 2002, S. 112), d. h. aus der Anzahl und Komplexität der herzustellenden Zusammenhänge und der Anzahl und Komplexität der vorzunehmenden Übersetzungen zwischen Darstellungen. Ob sich dabei die Kompetenzen des heuristisch-experimentellen und darstellend-interpretativen Bereichs trennen lassen, ist offen.

Eine weitere für den Unterricht geeignete Systematik mathematischer Aktivitäten sind die allgemeinen Kompetenzen der Bildungsstandards für das Fach Mathematik (KMK 2004,

[16] Die Zuordnung der Aktivitäten zeigt sich hier auch als eine Frage der Auflösung. Oft wird erst bei einer tiefgehenden Prozessanalyse deutlich, wie vielfältig die notwendigen Aktivitäten sind. Wuschansky (1989, S. 66) verdeutlicht an einer scheinbar einfachen Rechenaufgabe, wie umfangreich und vielschichtig die einbezogenen Kompetenzen sind, wenn der Lösungsvorgang genau analysiert wird.

KMK 2005, vgl. 1.2.3). In Abb. 1/5 wird verdeutlicht, welche Aktivitätsbereiche zu den Kompetenzbereichen der Bildungsstandards beitragen. Auch hier gibt es direkte Entsprechungen, welche durch die vier durchgezogenen Linien gekennzeichnet sind. Zu den Kompetenzen des mathematischen Modellierens tragen, wie oben erläutert wurde, alle vier Aktivitätsbereiche bei. Eine Besonderheit stellen die Kompetenzen des Kommunizierens dar. Sowohl kritisch-argumentative als auch darstellend-interpretative Aktivitäten tragen zu dieser Kompetenzgruppe bei. Hier ist jedoch die Grenze zwischen den fachlich-inhaltlichen und den sozial-kommunikativen Kompetenzen der Handlungskompetenz erreicht. Das Beurteilungskonzept dieser Arbeit wird bewusst auf den fachlich-inhaltlichen und methodischen Bereich begrenzt (vgl. 3.1.1). Für die Beurteilung von Selbst- und Sozialkompetenz sind erweiterte Methoden notwendig. Bis auf diese Einschränkung werden die Kompetenzen der Bildungsstandards durch die vier Aktivitätsbereiche von Lechner abgedeckt. Eine ausgewogene Berücksichtigung der vier Aktivitätsbereiche von Lechner ist somit eine gute Basis für die Umsetzung der Bildungsstandards. Die Differenzierung in vier Bereiche anstelle von sechs Bereichen wird für die Beurteilung mathematischer Kompetenzen als günstig erachtet, da Überschneidungen so verringert werden und die Rückmeldung an die Schüler in vertretbarer Komplexität stattfinden kann.

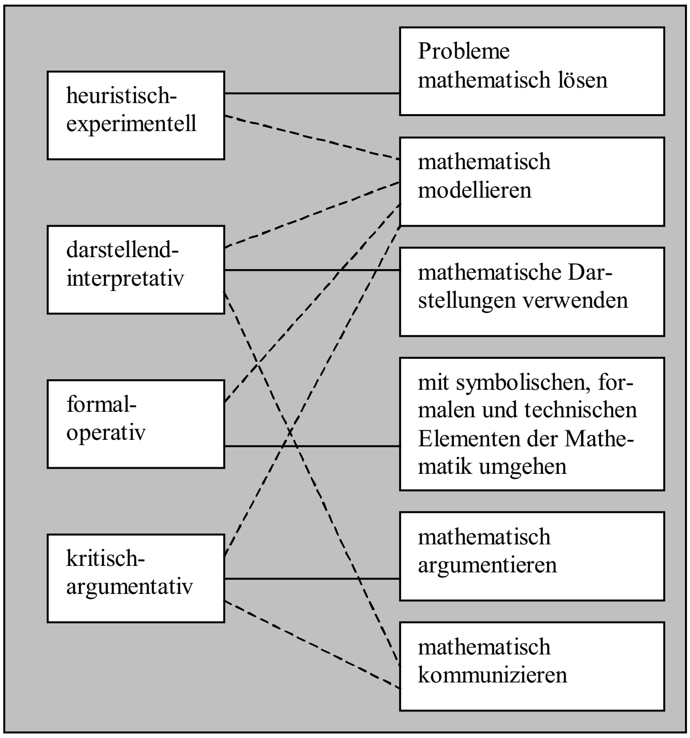



Abb. 1/5: Überblick über die Verbindungen zwischen den Kompetenzbereichen der Bildungsstandards und den Aktivitätsbereichen von Lechner. Durchgezogene Linien verdeutlichen direkte Verbindungen, gestrichelte Linien stehen für weniger offensichtliche Verbindungen, die erst bei einer genauen Analyse der zugehörigen Bereiche aufgedeckt werden.

**Verdichtung und Schlussfolgerung**

Die vier Aktivitätsbereiche von Lechner (2002, S. 255ff.) bilden ein geeignetes System, mathematische Aktivitäten zu ordnen. Es schließt sowohl die durch die Bildungsstandards geforderten mathematischen Kompetenzen als auch die allgemeinen Lernziele des Mathematikunterrichts von H. Winter ein. Die Systematisierung nach darstellend-interpretativen, heuristisch-experimentellen, kritisch-argumentativen und formal-operativen Aktivitäten kann genutzt werden, um Unterrichtsqualität in Bezug auf eine ausgewogene mathematische Aktivierung zu bewerten. In erster Linie bietet sie aber eine ausreichend differenzierende und dennoch handhabbare Möglichkeit, Aufgaben, die gezielt mathematische Aktivitäten anregen, auszuwählen (vgl. Kapitel 2), um entsprechende mathematische Kompetenzen zu beurteilen und in differenzierter Form zurückzumelden (vgl. Kapitel 3).[17]

## 1.4 Aufgaben – Elemente der Organisation und Steuerung von Schüleraktivitäten

> „Unter pädagogischer Perspektive sind Aufgaben als die zentralen Elemente des Mathematikunterrichtes anzusehen, die sowohl die Schüler- wie die Lehrertätigkeit determinieren.“ (Neubrand, J. 2002, S. 4/5)
>
> „Mathematische Aufgaben sind für das Lernen von Mathematik, für den Unterricht, für die Unterrichtsvorbereitung und für die Evaluation des Wissenstandes der Schüler von zentraler Bedeutung. Aufgaben sind die schulgemäßen Formen für mathematische Probleme, mit deren Hilfe der Wissenserwerb in der Schule organisiert wird.“ (Bromme/Seeger/ Steinbring 1990, S. 1)

Die beiden Zitate demonstrieren die Bedeutung von Aufgaben für zwei wesentliche Aspekte dieser Arbeit[18]: die Anregung von Schüleraktivitäten und die Beurteilung mathematischer Kompetenzen.

---

[17] Eine gewisse Überlappung der Aktivitätsbereiche ist nicht vermeidbar. Vor allem heuristische Aktivitäten werden auch in den anderen Bereichen benötigt, z. B. um Fallunterscheidungen vorzunehmen. Für die Beurteilung wird versucht diese Überlappung einzugrenzen, indem konkrete und genaue Beurteilungskriterien formuliert werden (vgl. 3.2.2 sowie Anhang 1.3 und 1.4).

[18] Die Zitate weisen auch auf die generelle Bedeutung von Aufgaben für das Lernen von Mathematik und die Gestaltung und Organisation des Mathematikunterrichts hin. Als „Indikatoren für die realisierte Art von Selbsttätigkeit im Unterricht“ (Neubrand, J. 2002, S. 3) erhalten Aufgaben beispielsweise bei der Evaluation und Verbesserung von Unterricht Bedeutung (vgl. Leuders 2001). Einen Überblick zum Thema Aufgaben im Mathematikunterricht geben z. B. J. Neubrand (2002, S. 14ff.) und Leuders (2001, S. 94ff.). Die vielfältigen Funktionen des Lösens von Aufgaben im Unterricht werden von Bruder 1988 (S. 198a) zusammengestellt.

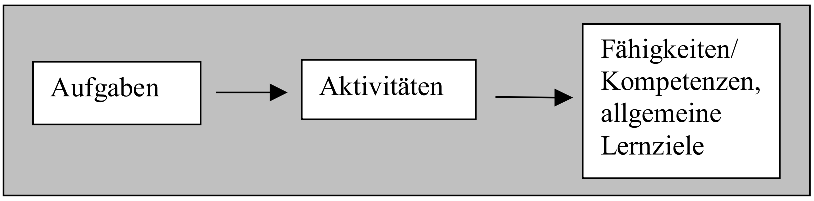



Abb. 1/6: Zusammenhang zwischen Aufgaben, Aktivitäten, Kompetenzen (nach Fischer/Malle 1985, S. 281)

Aufgaben bestimmen Art und Inhalt der Tätigkeiten von Schülern (vgl. Neubrand, J. 2002, S. 1 sowie 1.1). Da Aktivitäten der Schüler die Grundlage ihrer Kompetenzentwicklung sind (vgl. 1.1), gehen didaktische Bemühungen dahin, das Arbeiten mit Aufgaben im Sinne der gezielten Kompetenzförderung weiterzuentwickeln. Über das Stellen und Lösen von Aufgaben sind solche Schüleraktivitäten zu organisieren, „deren erfolgreiche Ausführung das Erreichen sowohl ‚lokaler' Lernziele (Aneignung eines bestimmten Begriffes oder eines bestimmten Satzes usw.) als auch ‚globaler' Zielsetzungen (Entwicklung allgemeiner Fähigkeiten, Einstellungen, Verhaltensweisen usw.) möglichst wahrscheinlich macht" (Walsch 1985, S. 7, vgl. Fischer/Malle 1985, S. 281). Für die Umsetzung der Bildungsstandards ist es notwendig, „gegebene Aufgaben konsequent daraufhin (zu) analysieren bzw. neue Aufgaben daraufhin (zu) konstruieren, welche Kompetenzen auf welchem Niveau zu ihrer Lösung mindestens erforderlich sind" (Blum et al. 2005, S. 270).[19]

Mit der Umsetzung von Standards oder Lernzielen ist deren Überprüfung verbunden. Die alltägliche Beobachtung des Entwicklungsstandes der Kompetenzen der Schüler erfolgt ebenfalls anhand ihrer Aktivitäten beim Bearbeiten von Aufgaben. Dies führt zu einer zweiten Beziehungskette (Abb. 1/7).

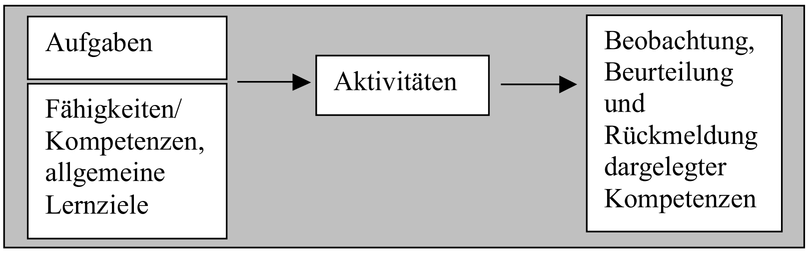



Abb. 1/7: Zusammenhang zwischen Kompetenzen, Aufgaben, Aktivitäten und Beurteilung

Um anspruchsvollen Zielvorstellungen gerecht zu werden, sind die Schüler mit geeigneten mathematischen Aufgaben zu konfrontieren (z. B. Stein/Grover/Henningsen 1996, S. 456). Dazu sind insbesondere Veränderungen bezüglich der Verteilung der einbezogenen Aktivitäten auf die unterschiedlichen Bereiche erforderlich (vgl. Christiansen/Walther 1986,

[19] Dies erfordert eine aktivitätenbezogene Aufgabenanalyse, wie sie in Kapitel 2 entwickelt wird.

S. 246/247). Alle wichtigen mathematischen Kompetenzen sollten sich in den Aufgaben als Potenzial ausgewogen wiederfinden. Kriterien für Aufgabenqualität, auch in Bezug auf die Anregung wertvoller Schüleraktivitäten, werden in Kapitel 2 betrachtet.

Für den Zusammenhang zwischen Aufgaben und Aktivitäten ist es auch wichtig, Aktivitäten als intrinsisches Element der Mathematik zu sehen (vgl. Christiansen/Walther 1986, S. 281): Der mathematische Gehalt einer Aufgabe hat ausschlaggebende Bedeutung auf die Art und Weise der initiierten Aktivitäten. Eine einfache Rechenaufgabe wird meist nur formale Aktivitäten wie das Ausführen von Operationen hervorrufen. Aufgaben, die anspruchsvolle mathematische Inhalte verknüpfen, bieten Potenzial zu vielseitigen Aktivitäten. Aufgaben fordern zu Auseinandersetzungen mit spezifischen mathematischen Situationen heraus, beziehen sich auf konkrete mathematische Inhalte und verbinden so Inhalte über Aktivitäten der Schüler mit allgemeinen Lernzielen (vgl. Neubrand, J. 2002, S. 17).

Über die möglichen Tätigkeiten stiften Aufgaben vielfältige Beziehungen des Unterrichts (vgl. Walther 1985, S. 40). Es gilt, diesen globalen Charakter von Aufgaben zu beachten und nicht Ergebnisse gegenüber Lernfortschritten überzubewerten, z. B. durch ein breites Spektrum von Aktivitäten (vgl. Christiansen/Walther 1986, S. 244ff.). Nach Auffassung von Christiansen und Walther (1986, S. 246) muss sich die Schulmathematik zukünftig mehr an den individuellen Aktivitäten der Schüler orientieren. Verstärkte Aufmerksamkeit ist dem aktuellen Lernprozess der Schüler zu widmen, den Aktivitäten der konstruktiven, entdeckenden und problemlösenden Art. Es ist notwendig, dass die Lehrer ihre Erläuterungen auf die individuellen Arbeiten ihrer Schüler zu den von ihnen für ihre Schüler erstellten Aufgaben beziehen (vgl. Christiansen/Walther 1986, S. 246).

**Verdichtung und Schlussfolgerung**

Aufgaben sind Gegenstand der Schüleraktivitäten, regen diese an, organisieren sie und sind damit auch Grundlage der Beurteilung entsprechender Kompetenzen. Für die Umsetzung von Lernzielen und Bildungsstandards sind Aufgaben auszuwählen, die potenziell entsprechende Aktivitäten ansprechen. Um ausgewogene und anspruchsvolle Aktivitäten anzuregen, ist sowohl der Charakter der Aufgabe als auch der mathematische Inhalt von Bedeutung. Für die Entwicklung von Kompetenzen ist es wichtig, sich dem individuellen Lernprozess der Schüler, konkret ihren Aktivitäten an den gestellten Aufgaben zuzuwenden.

## 1.5 Analyse von Schüleraktivitäten als Grundlage der Beurteilung mathematischer Kompetenzen

Kompetenzorientierter Mathematikunterricht ist erst dann konsequent, wenn auch die Leistungsbeurteilung kompetenz- und nicht nur ergebnisorientiert ist. Insbesondere prozessorientierte Kompetenzen, wie Argumentieren, Problemlösen, Modellieren, können nicht angemessen allein anhand des Ergebnisses des Lösungsprozesses beurteilt werden. Nicht das Ergebnis von Schüleraktivitäten, sondern auch die Aktivitäten selbst, z. B. beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben, müssen in die Beurteilung eingebunden werden.[20]

Walsch räumte bereits 1985 (S. 7) ein, dass bestimmte Fähigkeiten von den Schülern nur gelernt werden, wenn die Durchführung auch angemessene Konsequenzen hat und sich beispielsweise in der Bewertung niederschlägt. Ähnlich wird innerhalb der Bemühungen um die Verbesserung der Unterrichtsqualität auch heute argumentiert:

> „Gegenwärtig wird in Deutschland die Diskussion um ‚Qualität von Schule' auf breiter Basis geführt. Der Unterricht befindet sich in einem Wandel – es werden neue Unterrichtsformen erprobt, neue Technologien einbezogen, Aufgaben sehen manchmal anders aus als gewohnt. Sollen diese Änderungen nachhaltige Wirkung zeigen, müssen sie auch in die Leistungsbeurteilung einbezogen werden." (Bruder/Weigand 2001, S. 4, vgl. Fröhlich/Smolinski/Stern 2006, S. 1, Paradies/Wester/Greving 2005, S. 9)

Hier spielt eine wesentliche Rolle, dass Leistung sozial bewertet wird (vgl. Rauschenberger 1999, S. 15): Durch die Würdigung anderer wird einer Handlung ein Wert gegeben. Die Auswahl zu bewertender Handlungen bzw. Handlungsergebnisse ist immer wieder neu zu diskutieren (vgl. von Saldern 1999, S. 11). Je nachdem, ob nur das (formale) Ergebnis der Aktivität oder die Aktivität selbst und die dabei gezeigten Kompetenzen honoriert werden, werden die Schüler zukünftig den Elementen Bedeutung zukommen lassen. So kann eine kompetenzorientierte Leistungsbeurteilung, die Kompetenzorientierung des Unterrichts nicht nur ergänzen, sondern auch die Förderung der Kompetenzen wesentlich unterstützen.

Die Entwicklung und Ausbreitung einer neuen Lernkultur steht in der Praxis dagegen oft im Widerspruch zu tradierten Bewertungsformen, da diese besondere individuelle oder fachübergreifende Leistungen nicht berücksichtigen (vgl. Winter, F. 2002, S. 48). In die-

---

[20] Auch eine Schüleraktivität ohne sichtbares Ergebnis, sogar eine Schüleraktivität mit formal falschem Ergebnis kann eine anerkennungswerte Leistung sein. Wichtig ist, welche (mathematischen) Kompetenzen, auf welchem Niveau ein Schüler zeigt.

sem Abschnitt werden, nach einem Abriss wichtiger Grundlagen der Leistungsbeurteilung, Anforderungen an eine mit aktuellen Zielsetzungen des Mathematikunterrichts konforme Leistungsbeurteilung formuliert und Möglichkeiten neuer Beurteilungsformen diskutiert. Ziel ist es, Kriterien einer kompetenzorientierten Form der Leistungsbeurteilung zusammenzustellen. Dabei wird auch hier die besondere Rolle von Aufgaben berücksichtigt, bei deren Bearbeitung die Kompetenzen der Schüler deutlich werden.

### 1.5.1 Grundlegende Aspekte von Leistungsbeurteilung

> „Leistungsbewertung ist in gewisser Weise der Kern von Schule. An ihr messen Kinder, Jugendliche und Eltern, ob die Bemühungen der Schule Früchte tragen, zudem ob dabei gerecht gegen jedermann verfahren wird. An den Abschlusszeugnissen wollen die ‚Abnehmer‘ weiterführender Schulen, vor allem aber Arbeitgeber, erkennen, ob ein junger Mensch für sie geeignet ist.“ (Wunder 2002, S. 60)

*Funktionen von Leistungsbeurteilung*

Im Zitat von Wunder wird deutlich, dass die schulische Leistungsbeurteilung vielseitige Funktionen zu erfüllen hat. Diese sind (vgl. Sacher[21] 2002, S. 21, Paradies/Wester/Greving 2005, S. 24ff., Leuders 2004 S. 63/64, Arnold/Jürgens 2001, S. 15ff.):

- Selektion: Auslese befähigter Anwärter auf höhere Bildungslaufbahnen, begehrte Abschlüsse, angesehene berufliche und gesellschaftliche Positionen,
- Legitimation: Begründung bildungspolitischer, administrativer, unterrichtlicher Entscheidungen,
- Kontrolle: Kontrolle von Lehrern, Lehrplänen, ganzer Schulen, Schularten, Schulsysteme durch Prüfungen, Zeugnisse, Noten,
- Prognose: Ableitung von Erwartungen hinsichtlich des weiteren Lernfortschrittes und der künftigen Leistungen,
- Information und Rückmeldung: Information an Schüler und andere Personen (Eltern, potenzielle Arbeitgeber/Ausbilder, Lehrer weiterführender Klassen etc.) über die gemachten Lernfortschritte und den erreichten Lernstand,
- Lehr- und Lerndiagnose: Diagnose des Lernstandes als Grundlage für die Gestaltung des weiteren Unterrichts und individueller Fördermaßnahmen,
- Sozialisation: Eingliedern der nachwachsenden Generation in die Leistungsorientierung unserer Gesellschaft.

---

[21] Sacher listet die Funktionen der Leistungsbeurteilung auf, um auszuführen, dass die Ziffernnoten die meisten Funktionen der Leistungsbeurteilung nur scheinbar erfüllen.

Die Funktionen der Leistungsbeurteilung verdeutlichen gegenpolige Anforderungen. Leistungsbeurteilung unterstützt die Autonomie der Schüler und Leistungsbeurteilung dient der Steuerung von Schülern (vgl. Leuders 2004, S. 63/64). Leistungsbeurteilung wirkt „nach innen", trägt durch Informationen an Schüler, Lehrer, auch Eltern zur Steuerung des Lernprozesses selbst bei, und wirkt aber auch „nach außen", durch Informationen an Personen und Institutionen, die nicht am aktuellen Lernprozess beteiligt sind (vgl. Fischer/Malle 1985, S. 304). Die vielschichtigen, z. T. gegensätzlichen Funktionen von Leistungsbeurteilung sind eine Ursache dafür, dass Leistungsbeurteilung für Schüler und Lehrer problembehaftet ist (vgl. Leuders 2004, S. 64, Fischer/Malle 1985, S. 304). Insbesondere scheint es fragwürdig, dass Noten gleichzeitig der individuellen Förderung und der systemischen Auslese dienen (vgl. Fröhlich/Smolinski/Stern 2006, S. 6).

Die Zensurenvergabe wird (in Deutschland) oft als die „prototypische Beurteilungsaufgabe" (Schrader/Helmke 2002, S. 45) gesehen. Zur Ziffernnote als vorherrschendes Instrument der Leistungsbewertung in der Schule (vgl. Leuders 2003b, S. 297) gibt es jedoch unterschiedliche Auffassungen. Teilweise wird die Ziffernnote stark kritisiert (z. B. Sacher 2002, S. 20ff., Bartnitzky 1989, S. 5) und es werden Möglichkeiten gesucht, diese zu ersetzen (z. B direkte Leistungsvorlage: vgl. 1.5.4, verbale Leistungsbeurteilungen: zur Übersicht z. B. Arnold/Jürgens 2001, Tarnai 2001, Valtin/Schmude 2000, Praxisbericht z. B. Thurn 1996). Teilweise wird die Ziffernote akzeptiert und sich bemüht, die Formen und Methoden der Notenfindung, zeitgemäßer, gerechter[22] und differenzierter zu gestalten (z. B. Paradies/Wester/Greving 2005, S. 10, Bartnitzky 1989)[23]. Wenn es auch über die Form der Leistungserfassung, -beurteilung und -rückmeldung unterschiedliche Auffassungen gibt, wird die Notwendigkeit Leistungen erfassen, bewerten und vergleichen zu müssen nicht (mehr) in Frage gestellt und Leistung als ein Bildungsziel akzeptiert.[24] Wichtig ist, zu klären, welche Kriterien Leistungsbeurteilung erfüllen sollte und welche Methoden

---

[22] Gerecht wird hier auf die Vermeidung von Fehlern (z. B. Paradies/Wester/Greving 2005, S. 34ff., Arnold/Jürgens 2001, S. 84) bei der Leistungserfassung und -beurteilung bezogen.

[23] Bei Bartnitzky wird deutlich, was auch für andere Autoren zutreffen wird, die Wege der Verbesserung der Notengebung beschreiben: Grundüberzeugung ist, dass die Abschaffung der Zensuren der bessere Weg in Bezug auf eine pädagogische Ausgestaltung von Schule wäre (vgl. Bartnitzky 1989, S. 5). Da das Zensieren in der Schule aber rechtliche Vorgabe ist, die derzeit in Deutschland unumstößlich scheint, wird es für wichtig gehalten, „Wege zu finden, wie man auch mit dem untauglichen Instrument Zensur für das Leben und Lernen von Kindern leidlich verträglich umgehen kann" (Bartnitzky 1989, S. 5).

[24] Weinert (2002, S. 19) skizziert die generelle Diskussion um die Bedeutung des Leistungsprinzips für die Schule (vgl. Saldern 1999). Vor allem die öffentliche Diskussion der TIMSS-Ergebnisse weist darauf hin, dass „Leistung zwar nicht das einzige, aber ein unverzichtbar wichtiges Bildungsziel der Schule ist" (Weinert 2002, S. 26).

dies leisten. Dabei ist zu beachten, dass Leistungsbeurteilung nicht nur der Bewertung von Schülern, sondern auch der Verbesserung der Unterrichtsgestaltung und des Lernens dienen soll. Für beide Aspekte sind „alltägliche Beurteilungen im Klassenzimmer“ (Schrader/Helmke 2002, S. 45) von zentraler Bedeutung.

*Vergleichsmaßstäbe für Schülerleistungen*

Der Prozess der Leistungsbeurteilung wird, insbesondere um die Objektivität zu erhöhen, in „Leistungsfeststellung“ und „Leistungsbewertung“ (Fischer/Malle 1985, S. 304, Klauer 2002) bzw. „Leistungsmessung“ und „Leistungsbeurteilung“ (Rheinberg 2002, S. 59) getrennt. Bei der Leistungsmessung wird die Menge (z. B. Anzahl richtig gelöster Aufgaben) oder Güte (z. B. Qualität einer Argumentation) der erbrachten Leistung beschrieben (vgl. Rheinberg 2002, S. 59) bzw. deren Abweichung vom Lernziel (vgl. Fischer/Malle 1985, S. 304). Bei der Leistungsbewertung werden der festgestellten Leistung Bewertungen zugeordnet, die sich an einer Norm[25] orientieren.

Für die Bewertung von Schülerleistungen gibt es drei mögliche Maßstäbe: Vergleich mit den Leistungen anderer Schüler – soziale Bezugsnorm, Vergleich mit den Leistungen desselben Schülers zu einem früheren Zeitpunkt – individuelle Bezugsnorm, Vergleich mit dem angestrebten Lernziel bzw. festgelegten Kriterien – sachbezogene oder kriteriale Norm (vgl. Schrader/Helmke 2002, S. 46, Rheinberg 2002, S. 61, Büchter/Leuders 2005, S. 180, Ingenkamp 1997, S. 44). Die Diskussion der Vor- und Nachteile der drei Bezugsnormen durch Rheinberg (2002, S. 64ff., vgl. Arnold/Jürgens 2001, S. 41ff., Fröhlich/Smolinski/ Stern 2006, S. 5) macht deutlich, dass keine Bezugsnorm für sich allein zu einer optimalen Beurteilung führt und trotz erhöhtem Beurteilungsaufwand Kombinationen von Beurteilungsnormen an Bedeutung gewinnen sollten.

Verbale Definitionen der Notenbezeichnungen hat die Kultusministerkonferenz[26] bundesweit festgelegt[27]. Da (auch) für den Mathematikunterricht kriterienorientierte, fach- und stufenspezifische Konkretisierungen dieser Anforderungen bisher fehlen, werden Noten traditionell durch eine unterschiedlich gewichtete Kombination aus anforderungsorientier-

[25] Leistungen im gesellschaftlichen Sinne sind normativ. Sie müssen für jede Situation neu definiert werden und lassen sich immer nur in Bezug auf eine Norm bestimmen. Was als gut oder schlecht bewertet wird, ist vom angelegten Maßstab abhängig (vgl. Paradies/Wester/Greving, 2005, S. 32).

[26] Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 3.10.1968.

[27] Ein Beispiel: „Die Note ‚sehr gut' soll erteilt werden, wenn die Leistung den Anforderungen in besonderem Maße entspricht“ (zitiert nach Arnold/Jürgens 2001, S. 7). Die Definitionen aller sechs Leistungsstufen werden in Paradies/Wester/Greving 2005 (S. 12ff.) und Arnold/Jürgens 2001 (S. 7) aufgelistet.

ten Lehrererwartungen und klasseninternem Vergleichsmaßstab gebildet (vgl. Leuders 2003b, S. 298, Leuders 2004, S. 64). Eine sachgerechte und faire Beurteilung erfordert jedoch den Vergleich mit objektiven Kriterien, den vom Lehrplan abgeleiteten Lernzielen, und sollte von Leistungsunterschieden in der Klasse unabhängig sein (vgl. Schrader/Helmke 2002, S. 50).

*Gütekriterien*

Standardisierte vergleichende Messungen von Schulleistungen haben als wissenschaftliche Verfahren Qualitätskriterien zu genügen. Die drei Hauptgütekriterien sind (vgl. Arnold 2002, S. 118, Stern/Hardy 2002, S. 164, Ingenkamp 1997, S. 34ff.):

- Objektivität: Unabhängigkeit der Ergebnisse von situativen Aspekten der Testdurchführung sowie individuellen Variationen der Leistungsauswertung und –interpretation,
- Reliabilität (Zuverlässigkeit): geringe Belastung der Testergebnisse durch Messfehler,
- Validität (Gültigkeit): hohe Übereinstimmung mit dem, was der Test zu messen beansprucht[28].

Die Hauptgütekriterien für Testverfahren werden ergänzt um sogenannte Nebengütekriterien, die stärker den Anwendungszusammenhang der Testverfahren berücksichtigen (vgl. Arnold 2002, S. 119): Normierung, Vergleichbarkeit, Ökonomie, Nützlichkeit, Fairness.

Da nach wie vor Schulleistung überwiegend durch Noten repräsentiert wird, ist auf Grund ihrer Bedeutung auch für Schulnoten eine hohe Messgüte zu fordern (vgl. Tent 2001, S. 809). Empirische Befunde hierzu sind jedoch vielschichtig[29]: „Auf ihre Klassen bezogen verfügen Lehrer über genügend stabile und valide Maßstäbe; es hapert an der Lokalisierung auf dem objektiven Merkmalskontinuum“ (Tent 2001, S. 809). Lehrern fehlt oft ein klassenübergreifender Maßstab (vgl. Tent 2001, S. 807, Ingenkamp 1997, S. 110 ff.). Für eine zutreffende Einschätzung des absoluten Leistungsstandes sind professionell entwickelte, am Lehrplan orientierte Instrumente notwendig (vgl. Schrader/Helmke 2002, S. 50). Im Rahmen der Standardsetzung (KMK-Bildungsstandards, Kerncurricula) und Standardüberprüfung (Zentrale Vergleichsarbeiten/Prüfungen) sind Vereinheitlichungs- und Objektivierungstendenzen erkennbar (vgl. Leuders 2004, S. 64). Derzeit ist jedoch offen, ob so eine höhere Notengerechtigkeit und verbesserte Unterrichtsqualität erreicht

[28] Bezüglich der Validität einer Leistungsmessung ist u. a. die Lerngeschichte und das Vorwissen der Schüler von Bedeutung. Derselbe Test sollte nicht in einer Klasse Faktenwissen erfassen, weil dort derartige Aufgaben bekannt sind, und in einer anderen Klasse Problemlösewissen (vgl. Stern/Hardy 2002, S. 164).

[29] Einen Überblick über empirische Befunde zur Güte von Schulnoten geben Tent (2001, S. 807ff.) sowie Schrader und Helmke (2002, S. 50).

werden kann. Risiken der Einführung von Bildungsstandards und ihrer Kontrolle durch Leistungstests, wie eine Orientierung des Unterrichts an Testaufgaben,[30] werden diskutiert und begleitende Maßnahmen vorgeschlagen (vgl. Blum et al. 2005, Leuders 2004, S. 64).

In der Diskussion um Leistungsbeurteilung spielen die Gütekriterien eine wichtige Rolle. Wird auf der einen Seite, z. B. durch den Einsatz wissenschaftlicher Leistungstests, um eine bessere Erfüllung der Gütekriterien gerungen, wird auf der anderen Seite die Notwendigkeit neu gefasster Kriterien für Beurteilungen gesehen (vgl. Paradies/Wester/Greving 2005, S. 43ff.). Dabei steht nicht die Objektivität im Sinne von Intersubjektivität im Mittelpunkt, sondern „Ziel schulischer Leistungsbewertung kann nur sein, die unkontrollierte Subjektivität zugunsten einer kontrollierten und transparenten Leistungsbewertung möglichst weit zurückzudrängen“ (Paradies/Wester/Greving 2005, S. 43). Gerade Bearbeitungen anspruchsvoller offener Aufgaben können nicht durch entpersonalisierte Verfahren ausgewertet werden. Wichtig für eine gerechte und förderungsorientierte Beurteilung ist eine differenzierte Analyse der Bearbeitung unter Einbindung der Unterrichtssituation und des individuellen Lernprozesses sowie eine ebenso differenzierte und transparente Rückmeldung. Besondere Beachtung bedarf auch die Validierung (vgl. Fröhlich/Smolinski/-Stern 2006, S. 2). Hierfür kann z. B. geprüft werden, ob tatsächlich Schülerleistungen im Sinne von Bildungsstandards gemessen und beurteilt werden oder nur eine unzureichende Teilmenge der Anforderungen berücksichtigt wird.

### 1.5.2 Anforderungen an die Weiterentwicklung von Leistungsbeurteilung

Leistungsmessung erhält erst durch den Bezug zu Lernzielen Sinn (vgl. Bruder/Weigand 2001). Lernziele sind jedoch interessen- und zeitabhängig. Deshalb ist zu prüfen, ob traditionelle Formen der Leistungsbeurteilung aktuellen Zielsetzungen des Mathematikunterrichts und gesellschaftlichen Anforderungen genügen (vgl. Käpnick 1998, S. 27). Ein veränderter Leistungsbegriff zeigt sich nach Grunder, Bohl und Broszat (2001) in einem vielfältigeren Bewertungsverständnis: „Leistung ist prozess- und produktorientiert, Selbst- und Fremdbeurteilung ergänzen sich, ein Dialog über Leistungserwartungen findet statt,

[30] Gefahren der Standardsetzung werden in den USA beobachtet, wo es eine lange Tradition der Standardsetzung und -überprüfung gibt: Tendenz der Überbetonung des Messens und Reduktion der Curricula auf leicht messbare Inhalte (vgl. Blum et al. 2005, S. 269). Die Ausrichtung des Unterrichts auf Leistungsüberprüfungen ist so Blum et al. (2005, S. 272) jedoch nicht neu. Gerade der derzeit alltägliche Mathematikunterricht ist dadurch geprägt, „dass er in großen Teilen ein Übungsfeld für Aufgabentypen darstellt, die in der nächsten Klassenarbeit ‚drankommen‘“. Dies ist jedoch nur bei verfahrensorientierten Aufgaben möglich, nicht bei stärker kompetenzorientierten Aufgaben (vgl. Blum et al. 2005, S. 272/273).

individuelle Leistung wird honoriert". Im Folgenden werden Qualitätskriterien einer veränderten Leistungsbeurteilung formuliert und beschrieben.

*Vielfältige Leistungen werden anerkannt*

Für Leistungsbewertung als Teil pädagogischer Arbeit ist es unentbehrlich, sich auf die individuelle Vielfalt von Leistungen einzulassen (vgl. Winter, F. 2002, S. 55). Leistungen sind zu ermöglichen und anzuerkennen, die nicht in einem engen zeitlichen und räumlichen Rahmen erbracht worden sind, „die Fachgrenzen sprengen, die Initiative und Engagement, Selbstverantwortung und gemeinsames Handeln erfordern" (Winter, F. 2002, S. 51/52). Derartige Leistungen dürfen nicht gegenüber leichter benotbaren Klassenarbeiten unterbewertet werden und müssen eine Bewertung erfahren, die ihre Qualitäten zum Ausdruck bringt (vgl. Winter, F. 2002, S. 52). Im Mathematikunterricht ist zu vermeiden, dass aus Gründen der Korrekturökonomie und Quantifizierbarkeit geschlossene Aufgaben und einseitig niedere kognitive Kompetenzen bevorzugt werden (vgl. Leuders 2003b, S. 300/301). Offenere Aufgabenformen und prozessbezogene Kompetenzen, wie Problemlösen oder argumentative und reflexive Leistungen, sind in der Bewertung (gleichwertig) zu berücksichtigen (vgl. Leuders 2003b, S. 300/301, Bruder/Weigand 2001, Althoff 2001).

Vielfältigen Leistungen sollte auf entsprechend vielfältige Weise begegnet werden (vgl. Winter, F. 2002, S. 55). Nur durch vielseitige Auswertungsinstrumente und -situationen (Beobachtungen, Selbsteinschätzungen, reflektierende Schülertexte etc.) kann ein vielseitiger Eindruck von Schülerkompetenzen gewonnen werden (vgl. Leuders 2003b, S. 300).

*Der Lernprozess findet Berücksichtigung*

In Noten geht häufig nur der erreichte Endstand ein, weniger die Qualität der Lernprozesse, z. B. Anstrengungsbereitschaft, Verarbeitung von Misserfolgen, überlegtes Vorgehen (vgl. Sacher 2002, S. 22, von Saldern 1999, S. 195, Bartnitzky 1989, S. 11, Wuschansky 1989, S. 72). Auch wesentliche Aspekte von Mathematik, wie logisches Denken, Kritikfähigkeit, Problemlöseverhalten, Kreativität, werden nur im Prozess sichtbar (vgl. Wuschansky 1989). Werden lediglich Ergebnisse von Aufgaben betrachtet, können Kompetenzen unterschätzt werden. Analysen von Fehlern innerhalb von Lösungswegen ergeben oft, dass bereits Kompetenzen vorliegen, aber eine unvollständige Wissenskette die richtige Antwort verhindert (vgl. Stern/Hardy 2002, S. 166). Leistungsbeurteilung sollte deshalb verstärkt geistige Prozesse der Schüler einbeziehen: Kommunikation und Kooperation, Entwicklung von Erkenntnissen, Beschreiben und Begründen von Lösungswegen, Problembewusstsein, Finden von Lösungswegen, Erkennen und Überwinden von Fehlern, Selbstständigkeit, kurz: Problemlösefähigkeit (vgl. Schipper 1998, S. 22, Bruder/Weigand 2001, S. 6, Wuschansky 1989, S. 72, Althoff 2001, S. 47).

*Leistungsbeurteilung ist verbunden mit differenzierten, förderungsorientierten Rückmeldungen*

Befunde von Leistungsdiagnosen sollten genutzt werden, um die Stärken und Schwächen der Schüler zu beschreiben und Ansatzpunkte für das eigenständige Weiterlernen zu geben (vgl. Winter, F. 2002, S. 52). Für die Lernplanung des Einzelnen ist eine am individuellen Maßstab orientierte Rückmeldung geeignet, soziale Vergleiche sind zu vermeiden (vgl. Leuders 2003b, S. 300). Aussagen über Stärken und Entwicklungsmöglichkeiten werden für erfolgversprechender gehalten als die Feststellung von Defiziten in der Vergangenheit (vgl. Leuders 2003b, S. 300).[31] Auch die Schüler selbst sind gefordert, Lernentscheidungen zu treffen. Mit ihnen gemeinsam ist über nützliche Maßnahmen zu beraten (vgl. Winter, F. 2002, S. 52/53).

Durch das Prüfen am Abschluss der Wissensaneignung nutzt die herkömmliche Leistungsbewertung zu wenig dem Lernprozess selbst (vgl. Winter, F. 2002, S. 52, Fröhlich/Smolinski/Stern 2006, S. 4). Notwendig ist eine Leistungsbeurteilung, die qualitativ gute Rückmeldungen liefert, die auch während des Lernens und Arbeitens genutzt werden kann und so hilft zu guten Leistungen zu gelangen. Dazu zählt F. Winter Maßnahmen der gemeinsamen Vorausschau, Reflexion, Lernkontakte sowie Anleitungen zur Selbstbewertung und die Vermittlung von Bewertungskriterien an die Schüler.

*Leistungen sind sichtbar und öffentlich*

In der Diskussion über schulische Leistungen werden häufig Noten oder Testergebnisse mit den Leistungen selbst verwechselt (vgl. Winter, F. 2002, S. 53ff.). Noten lassen Leistungen nicht klar genug erkennen, insbesondere wenn die zu Grunde gelegte Bezugsnorm nicht deutlicht wird (vgl. Sacher 2002, S. 21). Selbst wenn sie das Leistungsniveau richtig trifft, kann dieselbe Note sehr unterschiedliche Leistungsprofile verbergen (vgl. Sacher 2002, S. 21). Eine Note allein gibt nicht wieder, welche mathematischen Kompetenzen be-

---

[31] Auch für das Beurteilungskonzept dieser Arbeit werden positiv formulierte Rückmeldungen für wichtig gehalten. Die Rückmeldung von Schwächen, Defiziten und Wissenslücken soll aber nicht ausgeklammert werden, um den Schülern Ansatzpunkte für selbständiges Lernen zu geben. Ein Vorteil individueller Rückmeldungen ist, dass das „mathematische Selbstbewusstsein“ der Schüler berücksichtigt werden kann (vgl. Kapitel 3 und 4).

reits beherrscht werden und wo noch Förderbedarf besteht. Demgegenüber wird es für wichtig gehalten, die Leistungen der Schüler direkt einsehbar zu machen (vgl. Winter, F. 2002, S. 54ff. und 1.5.3).

*Eine sachliche Kommunikation über Leistungen wird hergestellt*

Notwendig ist eine sachliche, inhaltliche Kommunikation über Leistungen, bei der verschiedene Personen ihre Sichtweisen formulieren und gegenseitig respektieren (vgl. Winter, F. 2002, S. 53). Das heißt auch, Selbstbewertungen (z. B. Winter, F. 1996, Reiff 2006, Leuders 2003b, S. 312ff.) der Schüler zu unterstützen und anzuerkennen.

Sollen Schüler mehr Verantwortung für ihr Lernen übernehmen, muss Leistungsbeurteilung transparent sein: Den Lernenden sind klare Rahmenorientierungen über die Lernziele zu geben (vgl. Bruder/Weigand 2001). Dazu gehört eine möglichst genaue Formulierung von Beurteilungskriterien, am besten deren gemeinsame Erarbeitung (vgl. Kapitel 3 und 4).

*Leistungsbeurteilung unterstützt individuelles Lernen, aber auch das Erreichen gemeinsamer hoher Standards*

Wenn die Schule alle Schüler fördern und ihnen gerecht werden will, wird sie nicht umhinkommen Lernen in manchen Bereichen stärker zu individualisieren (vgl. Winter, F. 2002, S. 54). Sollen Bewertungen zur Stärkung des „Schüler-Ichs“ beitragen, sind individuelle Leistungen angemessen zu würdigen, aber nicht zum Maßstab für alle zu machen (vgl. Bruder/Weigand 2001, S. 6). Jeder hat, so Bruder und Weigand, ein Recht auf Anerkennung seiner Stärken (und Schwächen).

Individuelle Lernprozesse sind wieder zusammenzuführen, damit Schule eine soziale gemeinschaftsfördernde Einrichtung bleibt (vgl. Winter, F. 2002, S. 54). Das unerwartet schlechte Abschneiden deutscher Schüler bei internationalen Leistungsuntersuchungen zeigt, dass die mathematische Bildung unserer Schüler nicht den in Lehrplänen und didaktischen Zielvorstellungen formulierten Ansprüchen genügt (vgl. Blum et al. 2005, S. 267)[32]. Zukünftig muss sich Leistungsbeurteilung stärker an gemeinsamen Standards ausrichten. Für den Mathematikunterricht geben die KMK-Bildungsstandards eine verbindliche Orientierung.

[32] Die Notengebung, die sich in diesem Zusammenhang erneut als wenig aussagekräftiges und ungerechtes Verfahren erwies, fand erstaunlicherweise nur wenig Aufmerksamkeit (vgl. Winter, F. 2002, S. 49/50).

### 1.5.3 Alternative Beurteilungsformen

Innerhalb von Bemühungen um eine intensive und gleichzeitig differenzierende Leistungsbewertung werden von Lehrern und Wissenschaftlern neue Verfahren entwickelt oder gute Traditionen in reflektierter Weise fortgesetzt (vgl. Winter, F. 2002, S. 50). Dabei geht es darum, Leistungen nicht nur einzustufen, sondern mit Schülern darüber zu reden, ihre Entwicklungen zu verfolgen und sie zur Selbstbewertung anzuregen. Im Folgenden werden einige dieser Möglichkeiten vorgestellt.

*Direkte Leistungsvorlage/Portfolio*

Die direkte Leistungsvorlage umgeht die mit subjektiven Interpretationen verbundenen Kodierungen und Dekodierungen von Schülerleistungen bei Ziffernnoten. Leistung an sich wird öffentlich gemacht (vgl. Vierlinger 2002, S. 31). In einer direkten Leistungsvorlage bzw. einem Portfolio sammeln die Schüler von ihnen ausgewählte Arbeiten, die exemplarisch ihren Leistungsstand dokumentieren (vgl. Vierlinger 2002, S. 30). Portfolios können innerhalb eines Unterrichtsfaches bzw. eines Kurses oder als fach-/kursübergreifende Leistungsmappe angelegt werden (vgl. Winter, F. 2002b, S. 176). Ein Mathematikportfolio kann ausgewählte Materialien aus dem Arbeitsprozess (wichtige Arbeitsblätter, eigene (offene) Fragen/Thesen, Zusammenfassungen etc.), besondere eigene Arbeiten und Produkte (selbst ausgedachte Aufgaben, originelle Anwendungen/Weiterführungen/Verallgemeinerungen, Kurzvorträge/Referate/individuelle Hausarbeiten etc.) sowie strukturierende Elemente und Dokumente der Fremd- und Selbstbeurteilung enthalten (vgl. Leuders 2003b, S. 317). Dabei dürfen die Arbeiten nicht unkommentiert abgeheftet werden, sondern sind zu überarbeiten, zu strukturieren, durch persönliche Bewertungen und Kommentare einzuordnen. Es soll deutlich werden, aus welchem Anlass oder mit welchem Ziel sie aufgenommen wurden (vgl. Leuders 2003b, S. 317).

Der Lehrer kann beim Erstellen des Portfolios beratend wirken. Seine Kommentare können Interessenten der Leistung als Lesehilfe dienen, beigelegte Lernziellisten und andere Vorgaben das Einordnen der Leistungen ermöglichen (vgl. Vierlinger 2002, S. 31).

Portfolios sind als Mittel der Leistungsbeurteilung bisher vor allem in den USA[33] verbreitet (vgl. Winter, F. 2002b, S. 176). Die positiven Effekte der Portfolioarbeit werden von F. Winter (2002b, S. 176ff.) darin gesehen, dass

[33] Im deutschen Sprachraum liegen bislang kaum Unterrichtserfahrungen mit Portfolios vor (Winter, F. 2002b. S. 181). Eine Ausnahme bildet Österreich. Dort hat Vierlinger das Konzept der Direkten Leistungs-

- die Schüler in größerer Selbständigkeit und an komplexeren sowie individuelleren Aufgaben arbeiten,
- sich Möglichkeiten der Differenzierung ergeben und gleichzeitig zur Standardbildung beigetragen wird, indem Leistungsansprüche und -kriterien zur Sprache kommen,
- die Schüler aufgefordert sind reflexiv und wertend eigene und fremde Leistungen zu beschreiben und dabei Bewertungskriterien erwerben und anwenden,
- bezugnehmend auf die Selbstdiagnosen Lehrer differenzierte und konkrete Kommentare geben und im Vergleich mit früheren Leistungen Entwicklungen erkennen können,
- ein sachlicher, mehrperspektivischer Dialog zur Leistungsbeurteilung entsteht, der durch verstehende Diagnose von Lernprozessen und -produkten das Lernen unterstützt.

Werden Portfolios mit anderen Beurteilungsinstrumenten wie dem Pensenbuch[34] kombiniert, kann lernziel- und produktorientierter Unterricht miteinander verbunden werden (vgl. Engstler 2002, S. 158ff.). Lernziele können auch die Entwicklung von Kriterienrastern leiten, an denen sich die Schüler bei der Auswahl und Reflexion ihrer Arbeiten und die Lehrer bei Rückmeldungen orientieren (vgl. Gubler-Beck 2005, S. 231).

*Dialogisches Lernen mit dem Lernjournal*

Das Konzept, Mathematik und Sprache dialogisch zu unterrichten, wurde von den Schweizer Gymnasiallehrern und Fachdidaktikern Gallin und Ruf aus der Unterrichtspraxis heraus entwickelt (z. B. Gallin/Ruf 1990).

> „Kennzeichnend für das dialogische Lernen ist, dass Lehrkräfte gleich viel Zeit und Energie dafür aufwenden, ihre Schülerinnen und Schüler zu verstehen, wie diese Zeit und Energie aufwenden müssen, um ihre Lehrkräfte und die Inhalte aus den Lehrmitteln zu verstehen." (Ruf/Ruf-Bräker 2002, S. 67).

Beim Dialogischen Lernen werden gemeinsam Qualitäten in den Arbeiten der Schüler gesucht und für nachfolgende Lernprozesse genutzt – Diagnose und Förderung werden in den Unterrichtsprozess integriert (vgl. Ruf/Winter 2006). Dabei sind vier methodische Instrumente wichtig (vgl. Ruf/Ruf-Bräker 2002, S. 67/68, Gallin/Hußmann 2006, Gallin/Ruf 1990): Ausgangspunkt ist eine vom Lehrer formulierte provokative Kernidee. Daraus entwickelt sich für einen Schüler ein Auftrag, den er auf seinem Niveau im Journal (Lerntagebuch, Reisetagebuch) bearbeitet. Schließlich erfolgt eine persönliche Rückmel-

vorlage bereits in den 70er Jahren entwickelt und später mit ermutigenden Ergebnissen umgesetzt (dazu Vierlinger 1999, Thonhauser 2002, S. 188). In den USA entwickelte sich die Idee unter dem Namen Portfolio in den 90er Jahren als eine Möglichkeit der Dominanz von Tests zu begegnen (vgl. Thonhauser 2002, S. 188). Durch die breite Anwendung entstanden vielfältige Portfolio-Typen.

[34] Ein Pensenbuch (von Pensum) ist eine Auflistung von Lernzielen, orientiert an den Themen und Teilbereiche des gültigen Lehrplans (vgl. Engstler 2002, S. 159).

dung auf das vom Lehrer oder einem anderen Schüler im Journal Gelesene (vgl. Gallin/Hußmann 2006), wobei oft eine neue Kernidee generiert wird (vgl. Ruf/Ruf-Bräker 2002, S. 68).

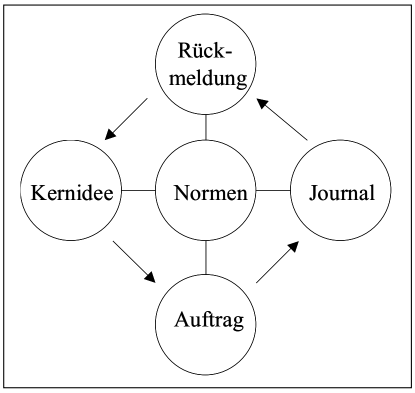



Abb. 1/8: Der Kreislauf des dialogischen Lernens nach Gallin und Hußmann (2006, S. 5): Ausgangspunkt ist eine herausfordernde Kernidee, Ziel sind Rückmeldungen auf Journaltexte, die oft neue Kernideen enthalten

.

Die Rückmeldung des Lehrers erfolgt durch Kommentare oder Häkchen, entsprechend der Intensität der Auseinandersetzung (vgl. Gallin/Hußmann 2006). Die vier verwendeten Intensitätsstufen werden bewusst offen beschrieben. Gallin und Hußmann (2006) warnen vor dem Aufstellen von Kriterienkatalogen, da diese Lehrer auf ihre eigene Sichtweise fixieren und Offenheit gegenüber Überraschendem verhindern. Vor allem in Bezug auf das Rückmelden ist beim dialogischen Lernen umzudenken: Ein „akribisches Korrigieren" sollte abgelöst werden durch „Vertrauen auf die eigene Flexibilität und Fachkompetenz", welche schnell eine Vorstellung von der vorliegenden Leistung vermittelt und der individuelle, nicht planbare Leistungen zugänglich sind (vgl. Gallin/Hußmann 2006).

*Facharbeiten – erste Schritte zum wissenschaftlichen Arbeiten*

Facharbeiten, d. h. eigenständig verfasste, umfassende (Haus-)Arbeiten zu einem größeren fachlichen Zusammenhang, ermöglichen es, auch allgemeine Ziele und Fähigkeiten, wie Kommunikations-, Team-, Kritik-, Lern-, Problemlösefähigkeit und Kreativität zu bewerten (vgl. Bruder/Weigand 2001, S. 5, Leuders 2004, S. 69). Dabei ergeben sich für den Lehrer Herausforderungen durch Neuheit und Offenheit der Aufgabenstellung, durch den Umfang der Arbeiten sowie dadurch, dass wesentliche Leistungen während der Entstehung der Arbeit erbracht wurden und nur noch bedingt im Produkt ablesbar sind (vgl. Hackenbroch-Krafft et al. 2002, S. 151). Bewertungskriterien können abgeleitet werden, indem die mit der Facharbeit verbundenen Ziele in konkrete und erreichbare Anforderungen übersetzt werden (vgl. Hackenbroch-Krafft et al. 2002, S. 152). Geeignete Kriterien spiegeln vereinbarte Standards wider, lassen aber auch Raum für Individualität. In dem von Leuders[35] (2004, S. 70) vorgeschlagenem Bewertungsschema werden in den Dimensionen Korrektheit und Kreativität die Bereiche Gestaltung, Nutzung von Mathematik, Sprache und Gründlichkeit beurteilt. Transparente Bewertungskriterien sind Voraussetzung dafür, dass die Bewertung trotz fehlender Vergleichbarkeit als gerecht empfunden und von den Schülern in ihrer Differenziertheit angenommen werden kann (vgl. Hackenbroch-Krafft et al. 2002, S. 152).

*Projektarbeit – gemeinsame Erfolge reflektieren und zertifizieren*

Projektorientierter Unterricht stellt die Interessen und Bedürfnisse der Schüler in den Vordergrund und ist so angelegt, dass die Schüler beim selbstorganisierten Lernen Planen, Lernen und Handeln verbinden (vgl. Drüke-Noe 2006, S. 126). Projekte für den Mathematikunterricht entspringen Problemen, die gesellschaftlich relevant sind oder die Lebenswelt der Schüler betreffen (vgl. Emer/Horst 2002) oder innermathematisch interessant sind. Durch die Offenheit der (selbstgestellten) Probleme kann die Erarbeitung neuen Wissens angeregt werden. Projektarbeit ist geprägt durch eine problem-, zukunfts-, gruppen- und anwendungsorientierte Lernkultur, deren Arbeitsformen selbstbestimmt, ganzheitlich und fachübergreifend sind (vgl. Emer/Horst 2002, S. 195). Die Anforderungen und erbrachten Leistungen sind dabei so vielfältig, dass eine zusammenfassende Note dem nicht gerecht werden kann (vgl. Groß 1996, S. 19, Bastian 1996). Emer und Horst (2002) entwickeln Beurteilungskriterien, die diesem besonderen Charakter der Projektarbeit entsprechen:

- Kriterium des Relevanzfilters (z. B. Welches Problembewusstsein ist erkennbar? Welches Reflexionsniveau besetzt die Themenauswahl, -formulierung?)
- Kriterium der Prozessbedeutung: Bewertung des Prozesslernens (Wie gelingt Planung, Organisation, Entscheidung, Konfliktregelung und Zusammenarbeit?), Bewertung des Handlungslernens (Wie werden unterschiedliche Kompetenzen eingebracht und realisiert?), Bewertung des Anwendungslernens (Welche Kompetenzen, Inhalte, Methoden werden aus den verschiedenen Fächern umgesetzt?)
- Kriterium der öffentlichen Wahrnehmung: Bewertung der Präsentation (Wie wird was inhaltlich differenziert und in formaler Qualität vorgestellt?), Bewertung der Vermittlung (Wie präzise, interessant, vollständig, ... werden die Ergebnisse vermittelt?), Be-

[35] Weitere Möglichkeiten für Kriterien- und Bewertungsraster für Facharbeiten werden von Hackenbroch-Krafft et al. (2002) vorgeschlagen.

wertung der Kommunikation (Wie verständlich, plausibel, reaktionsfähig, standhaltend und argumentativ verläuft die Kommunikation?)

Paradies, Wester und Greving (2005, S. 103ff) schlagen eine Beurteilung von Projektarbeit vor, die sich auf die dokumentierbaren Leistungen der Schüler, das entstandene Produkt und einen Arbeitsprozessbericht stützt (vgl. Bastian 1996).

Die bisher beschriebenen Methoden der Leistungsbeurteilung sind in dem Sinne „alternativ", dass sie (zwingend) zu einer Erweiterung auf allgemeine Lernziele und zur Individualisierung der Leistungen führen und sich so von traditionellen Formen der Leistungsbeurteilung unterscheiden. Dies ist bei vergleichenden Leistungsmessungen nicht allein durch die Methode gegeben. Bei einer geeigneten Aufgabenwahl und Testkonstruktion bieten sie dennoch die Möglichkeit, Schwächen herkömmlicher Beurteilungsformen zu begegnen.

*Vergleichende Leistungsmessungen*

Während die von einem Lehrer vergebenen Noten die Leistungsunterschiede innerhalb einer Klasse meist gut widerspiegeln, werden für vergleichbare Leistungen in verschiedenen Klassen oft unterschiedliche Noten vergeben – Lehrer haben Schwierigkeiten das absolute Leistungsniveau ihrer Klasse zutreffend einzuschätzen (vgl. Schrader/Helmke 2002, S. 50). Informationen über Schülerleistungen aus wissenschaftlichen Testverfahren können subjektive Lehrerurteile korrigieren und ergänzen und Lehrern bei der Überprüfung eigener Erwartungen helfen (vgl. Schrader/Helmke 2002, S. 54).[36] Zu den Zielen zentraler Lernstandserhebungen (vgl. Burkhard/Peek 2004, S. 26, Eikenbusch/Lagergren 2004, S. 30) zählen weiterhin die Feststellung von Lern- und Förderbedarf und die Weiterentwicklung des Unterrichts, insbesondere in Bezug auf Aufgabenformate (vgl. Siewert 2004, Burkhard/Peek 2004).

Bezüglich der Eignung von Tests für Individualdiagnosen gehen die Meinungen auseinander: Leuders (2006, S. 79) hält dafür differenzierte Instrumente, die den Lernprozess und die Kenntnis des Lehrers einbeziehen, für notwendig. Wollring (2006) weist auf die Einschränkung von Vergleichsstudien auf schriftliche Äußerungen, auf eine Orientierung am Produkt, auf Individualleistung und Momentaufnahmen hin. Blum et al. (2005) sehen

[36] Schulleistungsmessungen werden als summative Leistungsbewertung aufgefasst (vgl. Arnold 2002, S. 118). Schulleistungen sind dabei Lernstände, die auf personale Kompetenzen hinweisen, welche durch das Lernen bedingt sind. Kompetenzen werden als latente Personenmerkmale behandelt, die sich mehr oder weniger direkt im beobacht- und testbaren Verhalten äußern (vgl. Arnold 2002, S. 118). Werden erworbene Schulleistungen als psychologische Attribute der Schüler aufgefasst, wird die Übertragbarkeit auf andere Leistungssituationen und eine mittelfristige Merkmalsstabilität vorausgesetzt (vgl. Arnold 2002, S. 127).

dagegen in der Diagnose des Entwicklungsstands von Kompetenzen und im Sichtbarmachen von Förderbedarf den primären Zweck standardbezogener Tests (vgl. Burkhard/Peek 2004). Die in Schweden etablierten zentralen Lernerfolgsüberprüfungen zeichnen sich gerade durch eine deutliche diagnostische Orientierung aus (vgl. Burkhard/Peek 2004, S. 25, Eikenbusch/Lagergren 2004). Sie geben nicht Anlass zur Fehlersuche beim Lehrer, sondern leiten eine professionelle Analyse von Stärken und Schwächen der Klasse und Schule, der Rahmenbedingungen des Unterrichts, z. T. auch eine Diskussion didaktischer Ansätze, Konzepte, Methoden, Aufgabenformate ein (vgl. Eikenbusch/Lagergren 2004, S. 31).

Da Ergebnisse einmaliger Testuntersuchungen spezifischen Einschränkungen[37] (erhöhter Erfolgsdruck, schlechte Tagesform, ungewohnte Situation etc.) unterliegen, spricht vieles dafür, die umfassenderen und repräsentativeren Lehrerurteile durch (objektive) diagnostische Hilfsmittel abzusichern und zu ergänzen (vgl. Schrader und Helmke 2002, S. 51).

### 1.5.4 Leistungsbewertung und Aufgaben

Bleiben neue Beurteilungsformen eine Besonderheit innerhalb herkömmlicher Leistungsmessungen, werden sie nicht zu Bedeutung gelangen. Es geht vielmehr um konkrete vielfältige Wege der Leistungsbeurteilung im Unterrichtsalltag, die es Lehrern erlauben, sich stetig über den Lernfortschritt ihrer Schüler zu vergewissern und sie über ihren Leistungsstand zu informieren (vgl. Bruder/Weigand 2001, S. 4). Hierbei spielt die Auswahl und Konstruktion geeigneter Aufgaben eine besondere Rolle. Veränderungen des Unterrichts können nur gelingen, wenn Aufgabenkultur und Auswertungskultur aufeinander abgestimmt werden (vgl. Leuders 2003b, S. 300). Die Kritik herkömmlicher Klassenarbeiten richtet sich daher auch deutlich an das enge Spektrum einbezogener Aufgaben (vgl. Leuders 2006, S. 79/80, Leuders 2004, S. 64/65):

- Es überwiegen geschlossene Aufgaben, für die nur ein Weg zu nur einem richtigen Ergebnis erwartet und akzeptiert wird.
- Die Mehrheit der Aufgaben richtet sich „an Kenntnisse und Fertigkeiten auf einer mechanisch lernbaren Ebene“ (Leuders 2006, S. 79).

Leistungsbewertungen durch ergebnisorientierte Aufgaben lassen nicht ausreichend erkennen, ob allgemeine Lernziele erreicht wurden (vgl. Bruder/Weigand 2001, S. 6). Gute

[37] Weitere Probleme in Zusammenhang mit normorientierten Schulleistungstests werden in Schrader/Helmke 2002 und Stern/Hardy 2002 erörtert.

Noten können dabei auch durch unverstandenes Beherrschen von Kalkülen oder auswendig gelerntes Wissen erreicht werden. Aufgaben sind besser so zu stellen, dass auch verbal beschrieben und begründet werden muss, dass Lösungsskizzen angefertigt und Kontrollverfahren durchgeführt werden müssen, analysiert, interpretiert und reflektiert wird (vgl. Bruder/Weigand 2001, S. 6, Althoff 2001). Ähnlich forderten Fischer und Malle bereits 1985 (S. 322) dazu auf, Leistungsbeurteilung auf sinnvolle Ziele des Mathematikunterrichts abzustimmen und dafür Aufgaben zu entwickeln, in denen Tätigkeiten wie Argumentieren, Darstellen, Interpretieren wichtig sind und die nicht nur auf das Produzieren eines bestimmten Ergebnisses ausgerichtet sind. Die für mathematisches Arbeiten wichtigen Aktivitäten sollten sich in Aufgaben zur Leistungsbeurteilung ausgewogen wiederfinden.

Gerade eine im Sinne des „Öffnens von Aufgaben" veränderte Übungs- und Aufgabenkultur muss sich „auf die Aufgabenstellung in Leistungskontrollen und die gesamte Art der Leistungsmessung auswirken" (Bruder/Weigand 2001, S. 8). Andernfalls werden „offene und divergente" Aufgabenstellungen von den Schülern „schnell als unbedeutsame Besonderheiten in prüfungsirrelevanten Oasen" erkannt (Bruder/Weigand 2001, S. 8). Dabei können durchaus „normale" Aufgaben verwendet werden, wenn sie unterschiedliche Lösungswege ermöglichen und diese zugelassen werden. Die Bewertungsformen müssen jedoch so flexibel sein, dass auch unerwartete, kreative Lösungen gewürdigt und beurteilt werden können.

Beurteilungsaufgaben sollten aber nicht nur das Unterrichtskonzept mit den gesetzten Lernzielen widerspiegeln, sondern ebenso Kriterien genügen, die aus der besonderen Situation des „Leistens" heraus entstehen (vgl. Büchter/Leuders 2005, S. 114, S. 165ff.). Diese Kriterien werden im Folgenden dargelegt. Zuvor wird die von Büchter und Leuders vorgenommene Trennung von Aufgaben zum Lernen und Aufgaben zum Leisten diskutiert.

*Exkurs: Aufgaben zum Lernen und Aufgaben zum Leisten?*

Die Unterscheidung von Lern- und Leistungsaufgaben entspricht einer Konkretisierung der Auffassung, Phasen des Lernens im Unterricht von Phasen des Leistens zu trennen, weil Leisten und Lernen unterschiedlichen psychologischen Gesetzmäßigkeiten unterliegen (vgl. Weinert 1999, S. 23, Büchter/Leuders 2005, S. 165, Leuders 2004, S. 67, Leuders 2003b, S. 300, BLK 1997, S. 27). Da sowohl Lernen als auch Leisten im Unterricht notwendig sind, hält Weinert (1999, S. 24) es für eine Aufgabe guten Unterrichts „Lern- und Leistungssituationen im Bewusstsein der Schüler so zu separieren, dass eine produktive

Lernkultur entstehen kann“. Die bewusste und transparente Trennung zwischen Lern- und Leistungsphasen wird als ein Weg gesehen, Angst durch Leistungsdruck und Kontrolle zu begegnen. Büchter und Leuders (2005, S. 187) räumen jedoch ein, dass „Lernen und Leisten im Mathematikunterricht nicht unverbunden nebeneinander stehen, sondern sich wechselseitig eng aufeinander beziehen“. Lernen, als Aufbauen von Kompetenzen, ist die Grundlage für das Leisten. Das Leisten, als Anwenden erworbener Kompetenzen, ist Ziel des Lernens und auch Motivation. Außerdem sind der Trennung von Lernen und Leisten in der Praxis Grenzen gesetzt (vgl. Leuders 2004, S. 68). Daher gilt es, „die unterschiedliche und nicht kompatible Logik von Lern- und Leistungssituationen zu betonen und auf die Problematik ihrer dauerhaften Vermischung aufmerksam zu machen“ (BLK 1997, S. 27).

In Bezug auf Aufgaben sollten nach Blum et al. (2005, S. 271) nicht strikt Aufgaben für den Unterricht (Lernaufgaben) und Aufgaben für Leistungsüberprüfungen (Testaufgaben) getrennt werden. Nicht nur Lernaufgaben, sondern auch Testaufgaben können und müssen vielseitig sein. So wird das Spektrum der PISA-Aufgaben z. B. breiter eingeschätzt als das der Lernaufgaben im alltäglichen deutschen Mathematikunterricht (vgl. Blum et al. 2005, S. 271). Die meisten Testaufgaben sind auch im Unterricht verwendbar oder können zu Lernaufgaben umgestaltet, insbesondere geöffnet, werden (vgl. Blum et al. 2005, S. 271). Weiterhin bemerken Blum et al., dass die für den reflektierten Einsatz einer Aufgabe in Leistungsüberprüfungen wichtige präzise Analyse bezüglich der involvierten Kompetenzen, der Erwartungen an den Bearbeiter und der Beurteilungskriterien auch für den Unterricht wichtig sind. Trotz der Befürwortung von Überschneidungen in den Aufgaben sind Blum et al. nicht für ein generelles Vermischen von Lernen und Beurteilen.

Eine andere mögliche Einstellung wird beim dialogischen Lernen deutlich. Durch den Kreislauf Kernidee – Auftrag – Bearbeitung – Rückmeldung im Forschungsheft (vgl. 1.5.3) erhalten die Schüler ständig Rückmeldungen zu ihren Leistungen beim Lernen. Ihre Lernprozesse werden hier als individuelle Leistung wahrgenommen. Es herrscht keine Leistungssituation vor, verbunden mit Fehlerangst, Zeitdruck und Ähnlichem. Die Unterrichtssituation entspricht eher der des Lernens. Dennoch werden die Arbeiten der Schüler beim Entdecken, Problemlösen, Modellieren etc. als Leistungen gewertet und honoriert. Ruf und Ruf-Bräker (2002, S. 81) diskutieren die Frage, ob jede Schülerarbeit durch „Häkchen“ oder „qualifizierender Bildstempel“ beurteilt werden sollte. Nach ihrer Ansicht wird beim ernsthaften Befassen mit der Lösung eines Auftrages immer unterschwellig ein Urteil gefällt (vgl. Saldern 1999, S. 196). Ein klar durchdachter Auftrag ist, auch wenn er offen formuliert wird, mit Erwartungen verbunden. Die offenen Aufträge des dialogischen Lernens zielen auf eine intensive und sachbezogene Auseinandersetzung mit den Unterrichtsinhalten. Werden derartige Auseinandersetzungen nicht gewürdigt und beurteilt, bekommen die Kinder den Eindruck, ihr Tun ist beliebig, hat keine oder willkürliche Wirkung: „Gibt die Lehrperson ihre Leistungseinschätzung nicht klar und unmissverständlich bekannt, erzeugt sie früher oder später Desinteresse oder wilde Spekulationen über das, was wohl der Kern der Sache und die Intention des Unterrichts sei.“ (Ruf/Ruf-Bräker 2002, S. 81).

Im Konzept dieser Arbeit wird versucht Lernen und Leisten miteinander zu verbinden. Die erstellten Aufgaben dienen in erster Linie dazu, Kompetenzen zu zeigen, können aber auch Kompetenzen vertiefen und erweitern. Dabei sollen die Schüler erfahren, dass ihre individuellen Prozesse und Produkte gewürdigt werden. Ähnlich dem dialogischen Lernen werden bei der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen die Anstrengungen der Schüler beim Bearbeiten mathematischer Problemstellungen, ihre bei vielseitigen mathematischen Aktivitäten dargelegten Kompetenzen und nicht vorwiegend korrekte Endergebnisse honoriert (vgl. Kapitel 3, 4).[38]

Bei der Erarbeitung von Kriterien für Aufgaben zum Leisten unterscheiden Büchter und Leuders (2005, S. 166) auf Grund unterschiedlicher Funktionen Aufgaben zur Diagnose, Aufgaben zur Leistungsbewertung und Aufgaben zum Kompetenzerleben. Diese Differenzierung verdeutlicht die vielschichtigen Anforderungen an Aufgaben zur Leistungsbeurteilung und wird deshalb hier vorgestellt, auch wenn die Gruppen im eigenen Konzept wieder zusammengeführt werden (vgl. Kapitel 2 und 3).

*Kriterien an Aufgaben zur Diagnose*

Pädagogische Maßnahmen sollten nach Schrader (1998, S. 68) optimal wirken, wenn die gestellten Anforderungen zu den Persönlichkeitsmerkmalen der Betroffenen passen. Eine zutreffende Diagnose derartiger Merkmale ist eine wichtige Bedingung für erfolgreiches und effektives pädagogisches Handeln (vgl. Schrader 1998, S. 68). Diagnostische Kompetenzen gehören neben Sachkompetenzen, didaktischen Kompetenzen und Klassenführungskompetenzen zu den notwendigen und wichtigen Kompetenzbereichen des Lehrers

[38] Das in Kapitel 2 vorgestellte Konzept der Aufgabenanalyse dient nicht dazu, Aufgaben zum Leisten von Aufgaben zum Lernen zu trennen, sondern wichtige Merkmale für Aufgaben zur Beurteilung mathematischer Kompetenzen zu formulieren. Generell sind die so erstellten Aufgaben auch zum Lernen geeignet, genügen darüber hinaus aber Anforderungen, die in Leistungssituationen zu beachten sind.

(vgl. Weinert 1999, S. 30/31). Dabei handelt es sich um Fähigkeiten, die ermöglichen „den Kenntnisstand, die Lernfortschritte und die Leistungsprobleme der einzelnen Schüler sowie die Schwierigkeiten verschiedener Lernaufgaben im Unterricht fortlaufend beurteilen zu können“ (Weinert 1999, S. 30/31).

Der Schluss vom beobachtbaren Verhalten (Performanz[39]) der Schüler, ihren Worten, Aufzeichnungen, Skizzen etc., auf ihre Kompetenzen ist prinzipiell unsicher (vgl. Büchter/Leuders 2005, S. 168, S. 166, Saldern 1999, S. 35, Arnold 2002, S. 118). Beruhend auf diesem Schluss, ist Diagnose umso unsicherer, je weniger beobachtbares Verhalten eingeschätzt werden kann (vgl. Büchter/Leuders 2005, S. 168). Um Kompetenzen zutreffend zu beurteilen, sind deshalb Aufgabenformate notwendig, die Schüler zu individuellen Lösungswegen und ausführlichen, nachvollziehbaren Darlegungen ihrer Überlegungen anregen. Um verborgene Kompetenzen oder Defizite sichtbar zu machen, sind insbesondere Aufgaben geeignet, die Erläuterungen erfordern bzw. zum Darlegen, Beschreiben und Erklären eigener Gedanken anregen (vgl. Sjuts 2006, S. 110).

Kriterien an Diagnoseaufgaben nach Büchter und Leuders (2005, S. 173):
- Validität: Die Aufgabe konzentriert sich auf diejenigen Kompetenzen zu denen Informationen gewonnen werden sollen und überlagert diese nicht mit anderen Aspekten.
- Offene Antwortformate: Da Diagnose auf Eigenproduktionen der Schüler beruht, müssen diese zu (ausreichend) umfangreichen Äußerungen angeregt werden.
- Individuelle Wege: Schülervorstellungen können nur aus individuellen Wegen und Antworten aufgedeckt werden. Dafür sollten die Aufgaben offen und differenzierend sein.

Schwierigkeiten werden darin gesehen, Validität, d. h. die Beschränkung auf vorher festgelegte, zu prüfende Kompetenzen mit Offenheit und Individualität zu vereinbaren. Gehen Schüler eigene Wege, werden diese von den Vorstellungen des Aufgabenstellers abweichen und nicht intendierte Kompetenzen einbeziehen (vgl. Kapitel 5).

*Aufgaben zur Leistungsbewertung*

Büchter und Leuders (2005, S. 179) fordern von Leistungsbewertung vor allem Transparenz und Gerechtigkeit. Transparenz sehen sie gut über Aufgaben realisierbar: In Aufgaben zeigen sich Anforderungen objektiv (vgl. 2.1) und die Schwierigkeit der Leistungssituation

[39] Unter Performanz werden konkrete Realisierungen, d. h. Anwendungen und Ausführungen, von Kompetenzen verstanden (von Saldern 1999, S. 34). Mit Performanz wird bezeichnet, was der Schüler zeigt, mit Kompetenz dagegen das, was der Schüler kann. Die Umsetzung von Kompetenz in Performanz ist von situativen Variablen abhängig (vgl. von Saldern 1999, S. 34).

kann an ihnen diskutiert werden. Die Bewertung der Schülerarbeiten ist transparent, wenn deren Kriterien offen gelegt werden (vgl. Büchter/Leuders 2005, S. 179). In Bezug auf Gerechtigkeit ist für Büchter und Leuders (2005, S.180) die Wahl der Bezugsnorm und Objektivität, insbesondere Unabhängigkeit von der bewertenden Person, entscheidend.

Neben den allgemeindidaktischen Anforderungen Transparenz und Gerechtigkeit sind fachdidaktische Anforderungen an Aufgaben zu erfüllen (vgl. Büchter/Leuders 2005, S. 180). Fachdidaktisch nicht valide sind beispielsweise Aufgaben, die nicht mathematische Kompetenzen, sondern oberflächliche Schemata überprüfen (vgl. Büchter/Leuders 2005, S. 180). Die Auswahl fachdidaktisch valider Aufgaben ist vor allem auf Grund der normativen Wirkung von Leistungsbewertung auf das Lernen im Fach[40] wichtig. Soll dieser Einfluss positiv genutzt werden, um verstehensorientiertes, nachhaltiges Lernen zu unterstützen, dürfen sich Inhalte von Klassenarbeiten nicht auf die letzte Unterrichtsreihe beschränken, sondern müssen Inhalte verschiedener Unterrichtsreihen und Stoffgebiete vernetzen. Zum anderen sollten die Aufgaben verstehensorientiert sein, d. h. einen kompetenten, reflektierenden Umgang mit Verfahren, Begriffen, Modellen einfordern (vgl. Büchter/Leuders 2005, S. 181).

Für die Stimmigkeit von Klassenarbeiten sind nach Büchter und Leuders (2005, S. 182) zwei weitere Aspekte von Bedeutung: Ergebnisorientierung und schwierigkeitsbestimmende Faktoren. Ergebnisorientierung heißt, dass eine lange Bearbeitungszeit, die auf viele notwendige Zwischenüberlegungen hindeutet, zu entsprechend honorierbaren Ergebnissen führt. Das bedeutet weniger, Teil- und Unterergebnisse von Routineaufgaben entsprechend (proportional) zu bepunkten (formal-äußerlich korrekte Bewertung), sondern anspruchsvolle Aufgaben nach ihren Teilkompetenzen zu analysieren und entsprechende Teillösungen zu honorieren (inhaltlich gültige Bewertung) (vgl. Büchter/Leuders 2005, S. 182).

In einer Leistungsüberprüfung sind möglichst Leistungen verschiedener Leistungsbereiche oder -niveaus zu unterscheiden. Dafür müssen Aufgaben gezielt ausgewählt bzw. die schwierigkeitsbestimmenden Faktoren der Aufgabe gezielt verändert werden. Im Rahmen der Aufgabenanalysen zu PISA 2000-E wurden als schwierigkeitsrelevante Merkmale die Komplexität einer Modellierung, die curriculare Wissensstufe, der Kontext der Aufgabe, die Offenheit der Aufgabe, der Verarbeitungsumfang und die Notwendigkeit von Argu-

[40] Herget (1996, S. 53) schreibt dazu: „In einem System, wo bei allen Beteiligten sich alles immer wieder um Noten und Bewertung, um Leistung und Erfolg dreht, kommt den Aufgaben, insbesondere in den Leistungskontrollen eine entscheidende Bedeutung zu!“

mentationen herausgestellt (Neubrand, M. et al. 2002, S. 108/109). Modelle zur Analyse der Komplexität einer Aufgabe werden in Kapitel 2 beschrieben.

Kriterien an Aufgaben zur Leistungsbewertung nach Büchter und Leuders (2005, S. 185):

- Validität: Die Aufgabe konzentriert sich auf die Kompetenzen, die bewertet werden sollen und überlagert diese nicht durch andere Aspekte.
- Verständlichkeit: Die Aufgabe ist so formuliert, dass die Schüler verstehen können, was von ihnen verlangt wird. Nur nötige Fachbegriffe sind zu verwenden, Sätze einfach zu formulieren, Aufträge explizit und klar zu stellen.
- Erwartungstransparenz: Den Schülern ist vor Aufgabenbearbeitung klar ersichtlich, was von ihnen gefordert wird und wann die Anforderungen in welchem Maße erfüllt sind.
- Ergebnisorientierung: Das Verhältnis von Bearbeitungszeit und bewertbaren Schüleräußerungen stimmt, wobei auch Zwischenbetrachtungen berücksichtigt werden.
- Verfahren- vs. Verstehensorientierung: Es wird bewusst entschieden, ob das Beherrschen eines Verfahrens oder das Verstehen von Konzepten überprüft wird.
- Schwierigkeit: Es ist zu untersuchen, welche Faktoren in welchem Umfang Einfluss auf die Schwierigkeit der Aufgabe nehmen.

*Aufgaben zum Kompetenzerleben*

Schulisches Lernen unterliegt institutionellen Rahmenbedingungen (z. B. vorgegebene Lerninhalte, eingeschränkte eigenverantwortliche Gestaltungsmöglichkeiten von Lernprozessen), weshalb angenommen wird, dass das schulische Lernen, im Gegensatz zum freiwilligen, außerschulischen Lernen, einer besonderen Motivierung bedarf (vgl. Tulodziecki/Herzig/Blömeke 2004, S. 69). Neben inhaltlichen Aspekten kann Motivation aus dem Bedürfnis nach Kompetenzbestätigung, dem Bestreben, sich als handlungsfähig zu erleben, Erfolge auf Grund des eigenen Könnens zu erzielen, erwachsen (vgl. Tulodziecki/Herzig/Blömeke 2004, S. 71). Das Gefühl für Selbstbestimmtheit und das Kompetenzerleben ist für intrinsisiche Motivation grundlegend (vgl. Beckmann 1999, S. 179). Eine hohe Selbstwirksamkeit, d. h. die subjektive Überzeugung, schwierige Aufgaben auf Grund eigener Kompetenzen bewältigen zu können, fördert die Suche nach anspruchsvollen Leistungszielen sowie die Anstrengung und Ausdauer bei deren Bewältigung und erhöht so die Erfolgswahrscheinlichkeit (vgl. Jerusalem/Mittag 1999, S. 224). Erfolgserlebnisse schaffen somit Motivation für weitere Lernprozesse, können sie fördern und wie-schaffen somit Motivation für weitere Lernprozesse, können sie fördern und wiederum zu besseren Leistungen führen (vgl. Büchter/Leuders 2005, S. 188)[41].

Nach Rheinberg (1980, S. 139) kann insbesondere Unterricht und Leistungsbeurteilung, unter individueller Bezugsnorm erfolgszuversichtliche Motivausprägungen fördern. Neben der Bezugsnorm wird der Gestaltung der Aufgaben Potenzial bezüglich des Kompetenzerlebens der Schüler, ihrer Lernfreude, ihrem fachbezogenen Selbstvertrauen und ihrer Einstellung gegenüber (neuen) Anforderungen zugemessen (vgl. Büchter/Leuders 2005, S. 188, Sjuts 2006, S. 97).

Das Erfahren der eigenen Kompetenzen ist nicht nur für die Motivation, sondern auch für die Entwicklung eines realistischen Selbstbildes bedeutsam. In dieser Arbeit wird es deshalb für wichtig gehalten, neben den eigenen Stärken auch die eigenen Schwächen zu erfahren. Ziel sollte sein, dass beide Erfahrungen konstruktiv aufgenommen werden. Dazu ist zum einen ein lernförderlicher Umgang mit Fehlern notwendig und zum anderen eine konkrete, individuelle Rückmeldung, die Ansatzpunkte für eigenständige Verbesserungen gibt und unterstützend wirkt (vgl. Kapitel 3 und 4). Aber auch eine wohlüberlegte Aufgabenstellung kann bereits demjenigen, der sie bearbeitet, Stärken und Schwächen bewusst machen und somit Kompetenzen konsolidieren und stabilisieren oder ihn veranlassen, Defizite zu beheben (vgl. Sjuts 2006, S. 97).

Kriterien an Aufgaben zum Kompetenzerleben nach Büchter und Leuders (2005, S. 189):

- Hohes Differenzierungsvermögen, damit starke wie schwache Schüler Erfolgserlebnisse erzielen können.
- Möglichkeit der eigenständigen Auswahl von Aufgaben, damit sich im Hinblick auf die Selbstwirksamkeitserwartung die Schüler schon bei der Auswahl der Aufgaben als Akteure erleben können.
- Ergebnis- oder Produktorientierung, da viele Gelegenheiten für Erfolgserlebnisse geboten werden, wenn die Schüler schon nach kurzer Bearbeitungszeit ein Ergebnis vorzeigen oder ein individuelles Produkt erstellen können.

---

[41] Für Rheinberg (1999, S. 190) ist die Annahme, dass Motivation wiederum gute Lernleistungen verursacht eine zu selbstverständlich angenommene alltagspsychologische Gewissheit. Die komplexen Wirkungsstrukturen sind genauer zu untersuchen. Es konnte gezeigt werden, dass mit steigender Motivation bei geeigneten Aufgaben die Bearbeitungsgeschwindigkeit, aber nicht ebenso die Bearbeitungsgüte stieg. Es kann zwar, so Rheinberg, gesagt werden, dass „Hochmotivierte“ intensiver, gründlicher, länger, bedeutungsvoller etc. lernen. Aber, was das im einzelnen bedeutet und wie es sich niederschlägt, ist bislang schwer nachzuweisen.

Büchter und Leuders weisen darauf hin, dass vor allem bezüglich des dritten Punktes ein Gleichgewicht für den Unterricht zu finden ist: Ergebnisorientierte Aufgaben dürfen weder den Unterricht dominieren noch ganz fehlen. Eine Möglichkeit dafür bietet z. B. das produktive Üben (vgl. Wittmann 2001): Beim Lösen der Teilaufgaben eines Aufgabenpäckchens können auf Grund mehrerer gleichartiger Aufgaben Erfolgserlebnisse erzielt werden. Innerhalb der Reflexion tritt dann das Verstehen von Begriffen und Verfahren in den Vordergrund, wenn z. B. übergeordnete Zusammenhängen zwischen den Ergebnissen operativ strukturierter Aufgaben analysiert und gedeutet werden.

**Verdichtung und Schlussfolgerung**

Eine Leistungsbeurteilung, die den Anforderungen eines modernen, kompetenzorientierten Mathematikunterrichts genügt, erkennt vielfältige Leistungen an, bezieht sich auf Produkt und Prozess des Lernens, gibt differenzierte, förderungsorientierte Rückmeldungen, macht Leistungen sichtbar, unterstützt eine sachliche Kommunikation über Leistungen, fördert die Individualität des Lernens, aber auch das Erreichen gemeinsamer Standards. Einige neue Formen der Leistungsbeurteilung genügen diesen Anforderungen. Sie bedingen z. T. aber eine Umgestaltung der gesamten Unterrichtsorganisation und sind nicht ohne Weiteres in den (derzeit üblichen) alltäglichen Mathematikunterricht integrierbar. Für Leistungsbeurteilung im alltäglichen Unterricht spielt die Auswahl und Konstruktion geeigneter Aufgaben eine wesentliche Rolle. Aufgaben für Leistungsbeurteilungen sollten fachdidaktische Zielsetzungen widerspiegeln, aber auch Kriterien genügen, die von der Situation des Leistens bedingt werden.

## 1.6 Konzepte der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, ein Konzept der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen zu entwickeln, welches integriert in den alltäglichen Mathematikunterricht den Lernprozess unterstützt und die Entwicklung von Kompetenzen darstellt. Aus den Betrachtungen einzelner Komponenten eines solchen Konzeptes wurde festgestellt,

- dass mathematische Kompetenzen durch das Ausführen entsprechender Schüleraktivitäten gezeigt und somit beurteilbar werden (vgl. 1.1),
- dass die Schüleraktivitäten im Mathematikunterricht durch geeignete Aufgaben induziert werden (vgl. 1.1 und 1.4),
- dass die Differenzierung der Aktivitäten und zugehörigen Kompetenzen in die Bereiche heuristisch-experimentell, darstellend-interpretativ, formal-operativ und kritisch-argumentativ fachdidaktisch valide ist und
- welche Anforderungen kompetenzorientierte Leistungsbeurteilung erfüllen sollte.

In diesem Abschnitt werden bereits vorliegende Konzepte zur kompetenzorientierten Leistungsbeurteilung diskutiert und der Zielstellung des eigenen Konzeptes der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen durch Analyse von Schüleraktivitäten bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben gegenübergestellt.

### 1.6.1 Konzepte, Studien und Unterrichtserfahrungen zur kompetenzorientierten Leistungsbeurteilung

Zunächst werden die in 1.5.3 umrissenen Beurteilungskonzepte in Bezug auf die Ziele des eigenen Beurteilungskonzeptes zusammenfassend diskutiert.

Mit dem *Portfolioansatz* (vgl. 1.5.3) können die Kriterien kompetenzorientierter Leistungsbeurteilungen erfüllt werden. Bedingung dafür sind geeignete unterrichtliche Anregungen, insbesondere Aufgaben, damit die Schüler aus einem Spektrum Produkte wählen können, die ihre besonderen Leistungen dokumentieren. Soll ein Portfolio verschiedene fachliche Leistungen widerspiegeln, ist eine differenzierte Beurteilung der Leistungen notwendig. Der mathematikspezifische Kriterienkatalog von Gubler-Beck (2005) ist durch die Formulierung von Könnensaussagen auf die differenzierte Beurteilung fachlicher Kompetenzen ausgerichtet und wird derzeit in der Primarstufe erprobt. Dabei liegt der Schwerpunkt auf der Selbstbewertung, nicht auf der kriteriengeleiteten Beurteilung durch den Lehrer. Andere wissenschaftliche Studien zum Portfolioeinsatz (z. B. Häcker 2007) beziehen sich vorwiegend auf den Einsatz von Portfolios als Instrument der Unterrichtsentwicklung, ohne auf die eingesetzten Bewertungsverfahren näher einzugehen. Das Portfolio bietet einen geeigneten Rahmen für differenzierte kompetenzorientierte Leistungsbeurteilungen, in dem geeignete Aufgabenstellungen und Beurteilungsmethoden zu entwickeln bleiben.

Beim *dialogischen Lernen nach Gallin und Ruf* (vgl. 1.5.3) werden Schülerarbeiten tiefgehend analysiert und Lösungsprozesse wie -produkte betrachtet. Bei der Rückmeldung wird auf eine differenzierte Beurteilung anhand von Kriterienkatalogen bewusst verzichtet (vgl. Gallin/Hußmann 2006). Im Mittelpunkt steht das Aufdecken und Weitergeben geeigneter Lösungsideen und besonderer Leistungen, weniger deren genaue und zuverlässige Einordnung. Richtungsweisend ist das Konzept für die differenzierte Beurteilung mathematischer Kompetenzen anhand von Aufgabenbearbeitungen vor allem bezüglich der Anregung zur schriftlichen Darlegung von Gedankengängen durch ansprechende Kernideen bzw. Aufgabenstellungen. In Bezug auf die Kriterien der kompetenzorientierten Leistungsbewertung ist zu überlegen, wie individuelle Wege gemeinsamen Standards gegenübergestellt werden können, ohne den Dialog zwischen Verfasser und Lesendem zu zerstören.

*Fach- und Projektarbeiten* (vgl. 1.5.3) verbinden fachlich-inhaltliche Kompetenzen mit methodischen, sozialen und persönlichen Kompetenzen, was entsprechend differenzierte Kriterienkataloge (vgl. z. B. Emer/Horst 2002) und unterschiedliche Beobachtungsinstrumente erforderlich macht. Beide Beurteilungsanlässe sind jedoch mit einer Veränderung der gesamten Unterrichtskonzeption verbunden. Eigenständig werden komplexe Problemstellungen bearbeitet, was umfassende und vielseitige Beurteilungen ermöglicht. Entwicklungen von Kompetenzen bzw. Kompetenzeinschätzungen anhand unterschiedlicher Inhalte und Situationen sind mit diesen Konzepten schwer darstellbar.

Bei *Vergleichsarbeiten*, wie sie derzeit in Deutschland durchgeführt werden, steht nicht die individuelle lernprozessunterstützende Rückmeldung im Vordergrund. Es handelt sich in der Regel um einen einmaligen Beurteilungsanlass (vgl. Wollring 2006, S. 64) nach abgeschlossenen Lernprozessen. Auch wenn zunehmend Aufgaben einbezogen werden, die dies zulassen würden, werden mit Vergleichsarbeiten derzeit nicht einzelne Kompetenzdarlegungen differenziert analysiert. Die Ausrichtung von Vergleichsarbeiten an den Bildungsstandards kann valide Aufgaben vorlegen, deren Bearbeitungen differenziert beurteilt werden können. Bezüglich der Funktion der Überprüfung von Standards und der Entwicklung von kriteriumsorientierten Diagnoseverfahren für die Hand des Lehrers steht Deutschland, so Sill (2006), jedoch noch am Anfang. Perspektivisch sollen durch die Entwicklung von standardbasierten Instrumenten der Individualdiagnose Kompetenzprofile für einzelne Schüler darstellbar gemacht werden können (vgl. Köller 2007). Ob derartige Instrumente auch für die kontinuierliche Rückmeldung im Unterricht einsetzbar sind, ist derzeit offen.

Zusammenfassend kann durch den Wechsel der Organisationsform der Leistungsbeurteilung und die Einbindung von Prozess und Produkt die Leistungsbeurteilung in Richtung Kompetenzorientierung verbessert werden. Zwei Punkte bleiben dabei aber ungeklärt:

1. Wie sind die Anregungen, d. h. die Aufgeben und Problemstellungen, zu gestalten, um die gewünschten Kompetenzen beurteilen zu können?
2. Wie kann die Leistungsbewertung, d. h. der Vergleich gezeigter Kompetenzen anhand gemeinsamer Standards, und die Dokumentation der Kompetenzentwicklung erfolgen?

Der Wechsel in eine alternative Form der Leistungsbeurteilung führt somit nicht zwangsläufig zur Erfüllung der Kriterien kompetenzorientierter Leistungsbeurteilung. Damit liegt es nahe, von üblichen Organisationsformen der Leistungsbeurteilung auszugehen und diese hinsichtlich der beiden Fragestellungen so zu modifizieren, dass die Kriterien der kompetenzorientierten Leistungsbeurteilung erfüllt werden. Damit ist auch die Hoffnung verbunden, ein in den alltäglichen Mathematikunterricht integrierbares Konzept zu entwickeln, welches lernprozessbegleitende Rückmeldungen erlaubt und durch häufige Beurteilungsanlässe Kompetenzbeurteilungen zu verschiedenen Inhalten in verschiedenen Situationen ermöglicht. Gerade durch die Modifikation der alltäglichen Lernleistungsbeurteilungen von ergebniszentrierten zu kompetenzorientierten Konzepten sollte auch die Bedeutung der unterschiedlichen mathematischen Kompetenzen verinnerlicht werden können.

Im Folgenden wird aus Studien und Unterrichtserfahrungen zur Analyse und Beurteilung von Kompetenzdarlegungen bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben berichtet.

*Studien zur prozessorientierten Leistungsbeurteilung*

Die in den USA 1995 von der NCTM veröffentlichten „Assessment Standards for School Mathematics“ stellen mit der propagierten prozessorientierten Leistungsbewertung die Art und Weise der Aneignung von Inhalten und die Ausbildung mathematischer Fähigkeiten in den Mittelpunkt (vgl. Arvold 2001). Arvold stellt speziell für die prozessorientierte Leistungsbeurteilung konstruierte Aufgaben vor, mit denen beurteilt werden soll, wie Lernende Aufgaben interpretieren, Lösungsstrategien entwickeln und Lösungswege durchführen. Die Auswahl geeigneter Problemstellungen, die vielfältige mathematische Aktivitäten erlauben, wird als ein zentraler Punkt prozessorientierter Leistungsbeurteilung gesehen. Die

Bearbeitung der Aufgaben (Sekundarstufe I) fand in Gruppenarbeit statt, schwierige Teilprobleme wurden mit der ganzen Klasse diskutiert. Bewertet wurden der schriftliche Bericht, die Präsentation und die mündlichen Beiträge der Schüler in fünf Kategorien: Zugänge zur Problemstellung, Sammeln von Informationen, Problemlösestrategien, Begründen, Kommunikation. Bei Arvold werden zwei wesentliche Komponenten der prozessorientierten Leistungsbeurteilung deutlich: geeignete Beurteilungsaufgaben und eine differenzierte Beurteilung und Rückmeldung. Wie die dargelegten Leistungen beurteilt werden, wird nicht beschrieben. McCrae und Stacey (1997) gehen in ihrem Bericht zum Prüfen von Problemlösefähigkeiten in erster Linie auf die eingesetzten Aufgaben und die Organisation der Prüfungen, weniger auf die Beurteilung der gezeigten Leistungen ein.

Auch in Deutschland wird bei der Modifikation von Klausuren, Klassenarbeiten und Prüfungen hin zu kompetenzorientierten Formen vor allem der Gestaltung der Aufgaben Bedeutung zugemessen (z. B. Leuders 2004, Büchter/Leuders 2005, Althoff 2001, Herget 1996, vgl. 1.5). Dabei geht es um die Öffnung der Aufgaben, vor allem um unterschiedliche Lösungswege zuzulassen, und um die Einbeziehung anspruchsvoller und vielseitiger Aktivitäten. Von ersten Unterrichtserfahrungen berichten z. B. Althoff (2001), Leuders (2006) und Perlich (2006). Eine systematische Formulierung von Kriterien an Aufgaben zum Leisten findet sich bei Büchter und Leuders (2005, vgl. 1.5.5), wobei klar zwischen Aufgaben zum Leisten und Aufgaben zum Lernen unterschiedenen wird. Dieses wird aus Gründen der Validität der Beurteilungsaufgaben und auf Grund der Wirkung von Leistungsbeurteilung auf den Unterricht (vgl. 2.2.1) für das Konzept dieser Arbeit nicht angestrebt. In Kapitel 2 wird deshalb ein Kriterienkatalog für Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen entwickelt, welcher neben Kriterien an Aufgaben zum Leisten, Kriterien der Aufgabenqualität allgemein aus lerntheoretischer Sicht und Kriterien verbunden mit dem Ziel vielseitige Aktivitäten anzuregen vereint und außerdem die Beschreibung kompetenzspezifischer Anforderungen erlaubt.

Über die Beurteilung der Schülerarbeiten bei prozess- und kompetenzorientierten Leistungsbeurteilungen wird wenig berichtet. Althoff (2001, S. 51) schreibt, dass die Korrektur der Schülerlösungen von Aufgaben, die prozessorientierte Kompetenzen einbeziehen schwierig und überdurchschnittlich zeitaufwendig und die Bewertung subjektiv und juristisch leicht anfechtbar ist. Nach Perlich (2006) erlaubt die Aufschlüsselung von Bewertungskriterien den Einsatz offener Aufgaben in Klassenarbeiten u. ä. Den Schülern kann dadurch auch für diese Art von Aufgaben eine detaillierte und „gerechte“ Bewertung und

Rückmeldung ihrer Leistungen gegeben werden. Allerdings sind Bewertungsschemata zu entwickeln, „die verschiedene Lösungswege zulassen und entsprechend ihrer Angemessenheit bewerten“ (Perlich 2006, S. 27). Das von Perlich vorgestellte aufgabenbezogene Bewertungsschema bezieht sich mit den Kriterien Befolgen der Arbeitsanweisungen, Nachvollziehbarkeit, Schlüssigkeit, mathematische Richtigkeit, Genauigkeit des Ergebnisses, besondere Leistungen nicht primär auf die tiefgehende Analyse ausgeführter Aktivitäten.

### 1.6.2 Konzepte und Studien zur kompetenzorientierten Diagnose

Die detaillierte Analyse von Schülerarbeiten wird vor allem in Studien zur Diagnose beschrieben. Dabei geht es um die Beschreibung von Besonderheiten des Entwicklungsstandes eines Schülers, insbesondere um das Feststellen behebbarer Defizite in den Leistungseigenschaften von Lernenden (vgl. Sill 2007, S. 65), nicht um deren Bewertung. Der Vergleich mit einer Norm ist auch hier wichtig, um überhaupt von Besonderheiten sprechen zu können, führt aber zu lernprozessunterstützenden Hinweisen, nicht zur Benennung eines Wertes der gezeigten Leistungen. Anhand einer begrenzten Auswahl aktueller diagnostischer Studien wird aufgezeigt, welche Ansatzpunkte für ein Konzept der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen aus diagnostischen Ansätzen gewonnen werden können.

Ein Gebiet der Diagnose ist die *Analyse von Fehlern und Fehlvorstellungen*. Ein Überblick über Forschungen zu Fehleranalysen und zur Bedeutung von Fehleranalysen in der Mathematikdidaktik findet sich bei Sikora (2007, S. 145ff.). Sikora entwickelte eine inhalts- und bereichsunabhängige Klassifizierung von Schülerantworten für die Vergleichsarbeiten in Mecklenburg-Vorpommern in den Jahren 1999-2001. Aus dem Abgleich aufgetretener Schülerlösungen bei vorrangig offenen Aufgabenformaten mit theoretischen Konstrukten ergaben sich Ursachen fehlerhafter Lösungen oder Strategien (vgl. Sikora 2007, S. 172). Mögliche Fehlerursachen bei der Lösung von Aufgaben waren: Fehler beim Aufnehmen der Aufgabeninformation, Fehler beim Verstehen der Aufgabe, Fehler beim Erfassen der Aufgabenanforderungen, Fehler beim Aufbau einer Lösungsidee und Aufstellen eines Lösungsplanes, Fehler beim Ausführen des Lösungsplanes, d. h. Aufbau der Lösungsprozedur und Abarbeitung der Lösungsschritte, Fehler bei der Rückkopplung. Eine solche detaillierte Fehleranalyse hat gemeinsame Strukturen mit der differenzierten Analyse von Schüleraktivitäten. Einige der Fehlergruppen stehen direkt mit bestimmten Kompetenzbereichen in Verbindung (z. B. Fehler beim Aufbau einer Lösungsidee und Aufstellen eines

Lösungsplanes – heuristisch-experimentelle Kompetenzen, Fehler bei der Abarbeitung von Lösungsschritten – formal-operative Kompetenzen). Es ergeben sich Parallelen in der qualitativen Auswertung der Schülerarbeiten und nachträglichen Einordnung in Kategorien bei der Fehleranalyse und der Analyse von Schüleraktivitäten und nachträglichen Zuordnung in Aktivitäts- bzw. Kompetenzbereiche (vgl. 3.2.1 und 5.1). Obwohl bei der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen die gezeigten Kompetenzen im Vordergrund stehen, ist für die Erstellung von Beurteilungskriterien, also für die Normierung der gezeigten Leistungen die Kategorisierung von Fehlern und Unzulänglichkeiten hilfreich. Bei der Diagnose geht es jedoch um das Aufdecken von Fehlern und das Rückmelden häufiger Fehler zur Verbesserung des Unterricht (vgl. Padberg 1996), nicht um die Gewichtung von Fehlern zur Normierung von Leistungen.

Sjuts (2006) berichtet von der *Nutzung kompetenzorientierter Aufgaben in diagnostischer Hinsicht*. Wie auch in der Aufgabenanalyse zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen (vgl. Kapitel 2) analysiert er die eingesetzten Aufgaben danach, welche Kompetenzen von ihnen (potenziell) angesprochen werden. Bei der Analyse der Schülerlösung wird eine ganzheitliche Betrachtungsweise deutlich: Besonderheiten der Lösungsstrategie sind sowohl hinsichtlich dargelegter Kompetenzen als auch hinsichtlich deutlich werdender Fehlkonzepte aufzudecken. Die Analyse der Schülerlösungen bezüglich ausgewählter Kompetenzen und die Auswahl von Aufgaben zur Anregung von Eigenproduktionen geben Anhaltspunkte für eine differenzierte Analyse von Schülerlösungen hinsichtlich aller einbezogenen Kompetenzen (vgl. 3.2.1).

Zur Leistungsfeststellung als Grundlage individueller Förderung bewähren sich in der Primarstufe *Standardortbestimmungen* (vgl. Hußmann/Selter 2007, Sundermann/Selter 2006). Diese geben erstens Lehrern strukturierte Informationen über Kompetenzen und Defizite einzelner Kinder und tragen zweitens dazu bei, dass die Lernenden Transparenz über ihren eigenen Lernstand erhalten (vgl. Hußmann/Selter 2007, S. 9). Für Standardortbestimmungen werden aus einem Inhaltsbereich Aufgaben gewählt, die zu erwerbende oder bereits vorhandene Kompetenzen beschreiben. Bei den von Hußmann und Selters angegebenen Beispielen handelt es dabei überwiegend um inhaltsbezogene Kompetenzen, die Aussagen zum Verständnis eines mathematischen Konzeptes bzw. zu Fehlvorstellungen machen. Prozessorientierte Kompetenzen werden bei der Übersetzung zwischen Darstellungen und dem Nutzen inhaltlicher Vorstellungen zu mathematischen Konzepten in Alltagssituationen angesprochen. Derartige Standortbestimmungen sind, z. B. beim Übertragen des Konzeptes in die Sekundarstufe, auch für komplexe prozessorientierte mathematische Kompetenzen wie Argumentieren und Problemlösen denkbar.

Bei diagnostischen Ansätzen steht das Aufdecken bzw. Fehlen von Kompetenzen im Vordergrund nicht deren Bewertung durch Vergleich mit einer Norm. Die Untersuchungen geben wichtige Anhaltspunkte zur Aufgabengestaltung, insbesondere hinsichtlich der Anregung der für die Diagnose so wichtigen Eigenproduktionen der Schüler, sowie hinsichtlich der Analyse von Schülerlösungen. Diese sind für die differenzierte Beurteilung von Kompetenzen durch notwendige Bewertungskonzepte und -maßstäbe zu ergänzen.

Leuders (2006) versucht Diagnose und Leistungsbewertung zu verbinden („Diagnose in Klassenarbeiten“). Die von ihm entwickelten offenen Aufgabenstellungen erlauben es Schülerantworten auf verschiedenen Niveaus einzuordnen, wobei nicht die Wahl des Lösungsweges, sondern dessen Qualität, z. B. Qualität der Begründung einer möglichen Antwort, entscheidend ist (vgl. Leuders 2006, S. 81). Die verwendete Einstufung ist ein Beispiel für ein aufgabenbezogenes Bewertungsschema, das sich aus der Analyse und dem Vergleich von Schülerlösungen heraus ergibt.

### 1.6.3 Differenzierte Beurteilung mathematischer Kompetenzen im „Balanced Assessment Program“

Bedarf an der Bestimmung von Kompetenzprofilen, d. h. an der systematisch differenzierten Beurteilung von Kompetenzen, wird in Deutschland verstärkt seit dem Beschluss von Bildungsstandards 2003 geäußert. In den USA erforderten die 1995 von der NCTM veröffentlichten „Assessment Standards for School Mathematics“ Konzepte zur Umsetzung der dort festgehaltenen sechs Standards. „Balanced Assessment in Mathematics“ ist ein nationales Forschungsprojekt, welches neue Ansätze der Beurteilung mathematischer Kompetenzen entwickelt. Das Konzept „Assessing Mathematical Understanding and Skills Effectively (AMUSE)“ der beteiligten Harvard Graduate School of Education kommt dem mit dieser Arbeit intendierten Beurteilungskonzept am nächsten.

Das differenzierte Beurteilungskonzept unterscheidet sich deutlich von den traditionell in den USA dominierenden Leistungstests anhand von multiple-choice Fragen, welche zur Beurteilung prozessorientierter Kompetenzen nicht geeignet sind. Es wird davon ausgegangen, dass jedes kognitive Gebiet, einschließlich der Mathematik, zu komplex ist, um auf eine eindimensionale Messung reduziert werden zu können. Kompetenzbeurteilungen von Schülern sollten diese Komplexität widerspiegeln. Außerdem soll in Übereinstimmung mit den NCTM Assessment Standards die Beurteilung öffentlich gemacht werden, anstatt sie zu verschlüsseln.

Die Differenzierung im Projekt AMUSE findet nach mathematischen Konzepten und mathematischen Aktivitäten statt. Es werden die Konzepte „Number and Quantity“, „Shape and Space“, „Pattern and Function“, „Chance and Data“ und „Arrangement“ sowie die Tätigkeitsfelder „Modeling/Formulating“, „Transforming/Manipulating“, „Inferring/Drawing Conclusions“ und „Communicating“ unterschieden.

Für alle genannten mathematischen Konzepte wurden Aufgaben (Routineaufgaben, Problemstellungen und Projekte) konstruiert und hinsichtlich der einbezogenen Kompetenzen analysiert, wobei die Bedeutung der vier Kompetenzbereiche auf einer Skala von 0 bis 4 gewichtet wurde.

Die Bewertung der Schülerleistung in einem Kompetenzbereich erfolgt durch die Zuordnung eines Wertes von 0 bis 3. In einem Bericht über die dargelegten Leistungen eines Schülers werden in Form einer Tabelle zu allen bearbeiteten Aufgaben die Bewertungen der einzelnen Kompetenzbereiche symbolisch aufgelistet. Eine solche Darstellung spiegelt Stärken und Schwächen eines Schülers bezüglich unterschiedlicher Inhaltsbereiche und unterschiedlicher Kompetenzbereiche wider. Durch den Vergleich der Berichte verschiedener Schüler können Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Leistungsverteilungen sichtbar gemacht werden. Die einzelnen Werte werden bewusst nicht gemittelt.

Im vorgestellten Projekt wurden für vier Stufen der Mathematikausbildung (Grade 4, Grade 10, Grade12, Senior Honors) vielfältige Aufgaben entwickelt, analysiert und beschrieben.

Das Projekt AMUSE zeigt eine mögliche Organisation der differenzierten Beurteilung und Rückmeldung mathematischer Kompetenzen auf. Für das eigene Konzept der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen wird angestrebt, vor der Gruppierung der Leistungen in Kompetenzbereiche detaillierter auf unterschiedliche vollzogene Schüleraktivitäten Bezug zu nehmen, um Besonderheiten der individuellen Leistungen noch stärker wahrnehmen und aufzeigen zu können. Außerdem wird es für wichtig gehalten, die quantitativen (bzw. symbolhaften) Rückmeldungen verbal zu erläutern und durch lernfördernde Hinweise zu ergänzen (vgl. 3.3). Schließlich wird die Verwendung konkreter kompetenz- und aufgabenspezifischer Beurteilungskriterien für notwendig gehalten, um die Beurteilung objektiver und zuverlässiger zu gestalten (vgl. 3.2).

### Verdichtung und Schlussfolgerung

Unter Berücksichtigung bewährter Konzepte der Diagnose und der kompetenzorientierten Leistungsbeurteilung sowie einem US-amerikanischem Konzept der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen werden für das Konzept der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen anhand der Analyse von Schüleraktivitäten beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben folgende Komponenten abgeleitet:

- Auswahl einer geeigneten Differenzierung für mathematische Kompetenzen (vgl. 1.3),
- Entwicklung eines Instrumentes zur Analyse und Konstruktion von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen,
- Entwicklung einer Methode der differenzierten Beurteilung von Schülerleistungen,
- Entwicklung einer geeigneten Form der differenzierten individuellen Rückmeldung und der Dokumentation von Kompetenzdarlegungen zu unterschiedlichen Inhalten.

Die Entwicklung und Ausgestaltung der Elemente des Konzeptes der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen durch Analyse von Schüleraktivitäten beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben findet in Kapitel 2 (Konzept der spezifischen Aufgabenanalyse) und in Kapitel 3 (Beurteilungskonzept) statt.

# 2 Analyse und Konstruktion von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Aktivitäten

Um Aufgaben zu finden, die zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen geeignet sind, ist ein System der Aufgabenanalyse notwendig, mit dem das Potenzial einer Aufgabe bezüglich der Anregung mathematischer Aktivitäten eingeschätzt werden kann. Außerdem sind Kriterien zu erfüllen, die sich aus der besonderen Situation der Beurteilung ergeben (vgl. 1.5.5) und auch Aufgaben für Leistungsbeurteilungen, nicht nur Aufgaben zum Lernen (vgl. 1.5.5), sollten didaktischen und fachdidaktischen Kriterien der Aufgabenqualität genügen. Des weiteren können die (kognitiven) Anforderungen der Aufgabe Einfluss auf die Aktivitäten eines Schülers bei der Bearbeitung haben. Um Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen auswählen oder erstellen und die Ergebnisse in Zusammenhang mit Aufgabenparametern reflektieren zu können, wird ein System der Aufgabenanalyse gebraucht, welches alle genannten Aspekte vereinigt. In diesem Kapitel wird ein solches Analyseinstrument entwickelt und anhand der Analyse und Entwicklung von Aufgaben veranschaulicht. Dazu werden vorhandene Modelle der Aufgabenklassifikation gegenübergestellt und die für die spezifische Fragestellung wesentlichen Parameter selektiert.[42] Für die praktische Umsetzung werden die Analysekriterien erläutert und Analysefragen formuliert. Am Anfang dieses Kapitels steht die Beschreibung und Abgrenzung verschiedener Ebenen der Aufgabenanalyse, die auch für Beurteilungsaufgaben bedeutsam sind.

[42] Vergleichbar geht J. Neubrand (2002, z. B. S. 3) bei der Entwicklung eines Klassifikationssystems mathematischer Aufgaben für die spezifische Fragestellung, den Zusammenhang zwischen Selbsttätigkeit - Aufgaben - Seatwork abzubilden, vor.

## 2.1 Objektive, realisierte und subjektive Anforderungen von Aufgaben

> „Man muß wohl unterscheiden zwischen einer Aufgabe als Text, einer Aufgabe als Analysegegenstand und konstruktivem Mittel des Lehrers bzw. Didaktikers, und einer Aufgabe als Komponente des lebendigen Systems: Unterricht. Es ist meines Erachtens eine verkürzende Sichtweise, wenn man davon ausgeht, daß Aufgaben allein schon als Texte die jeweils intendierte pädagogische Absicht vermitteln würden und könnten.“ (Walther 1985, S. 35)

Ähnlich wie Walther beschreiben Stein, Grover und Henningsen (1996) drei Phasen für Aufgaben im Unterrichtsprozess: 1.) „curricular or instructional material“, 2.) „set up by the teacher in the classroom“, 3.) „implemented by students during the lesson“. Wichtig beim Arbeiten mit Aufgaben ist nicht nur das (ursprüngliche) Potenzial einer Aufgabe, sondern auch wie sich Eigenschaften und Anforderungen von Aufgaben in diesen Phasen verändern, was zu drei Ebenen der Aufgabenanalyse führt.

Mit der Analyse einer Aufgabe wird oft die Hoffnung verbunden, die *Schwierigkeit* der Aufgabe einzuschätzen. Die Schwierigkeit einer Aufgabe kann jedoch „immer nur relativ zum Repertoire des Menschen, der sie in Angriff nimmt“ (Aebli 1981, S. 355) bestimmt werden, ergibt sich erst aus der Interaktion eines Schülers mit der Aufgabe (vgl. Williams/Clarke 1997b, S. 451) bzw. aus der subjektiven Wahrnehmung der gestellten Anforderungen durch den Schüler (vgl. Knoll 1998, S. 47). Die Komplexität bzw. das kognitive Anforderungsniveau (vgl. Baumert/Bos/Lehmann 2000, S. 68) ist dagegen eine Eigenschaft der Aufgabe allein, unabhängig von ihrer Umsetzung in einer konkreten Unterrichtssituation. Diese *objektiven Anforderungen* entsprechen nur einem Teil der Faktoren, welche die Schwierigkeit einer Aufgabe für einen Schüler ausmachen. Williams und Clarke (1997, S. 451) vergleichen die Schwierigkeit einer Aufgabe für einen Schüler mit einem Punkt in einem zweidimensionalen Koordinatensystem: Die vertikale Achse des Systems ist eine Skale für die Aufgabenkomplexität, die horizontale für die Fähigkeiten des Schülers.

Resnick (1976) unterscheidet zwischen „rationaler“ und „empirischer“ Aufgabenanalyse. Die rationale Aufgabenanalyse (re-)konstruiert unter pädagogischer oder didaktischer Perspektive die ideale Bearbeitung eines durchschnittlichen, idealen Aufgabenlösers (vgl. Resnick 1976, S. 65). Die empirische Aufgabenanalyse untersucht, wie Aufgaben tatsächlich gelöst werden. Nach den Untersuchungen von Resnick (1976) verwenden Schüler, auch für einfache Subtraktionsaufgaben, andere Routinen als die vom Aufgabensteller erwarteten. Aufgaben können somit nicht (nur) als objektive Anforderungen verstanden werden, der entscheidende Faktor für die Aufgabenbearbeitung ist in der Wahrnehmung der Aufgabe durch den Schüler zu sehen (vgl. Bromme/Seeger/Steinbring 1990, S. 6/7).

Analysen individueller Umsetzungen von Aufgaben finden derzeit vor allem zur Diagnose statt (vgl. 1.6.2) oder, um Herangehensweisen von Schülern an spezifische Anforderungen, wie z. B. Modellierungsaufgaben (z. B. Borromeo Ferri 2004), zu untersuchen. Die Analysen von Sjuts (2006) zeigen, dass dokumentierte Schülerlösungen nachträglich Anhaltspunkte liefern, wie die Schwierigkeit von Teilaufgaben einzuschätzen ist und in welchen Aktivitäten sich die einbezogenen Kompetenzen niederschlagen. Bei Untersuchungen mathematischer Denkstile und Herangehensweisen werden primär unterschiedliche Strategien verglichen. Bei beiden Untersuchungsgegenständen steht nicht die Umsetzung des mit der Aufgabe intendierten (gesamten) Aktivitätenspektrums im Vordergrund.

Unter *objektiver Aufgabenanalyse* wird in dieser Arbeit die Analyse nach mathematikinhaltlichen und fachdidaktischen Merkmalen und kognitiven Anforderungen verstanden. Diese findet vor der Umsetzung der Aufgabe durch die Schüler statt und bezieht sich nicht auf tatsächliche Schülerbearbeitungen. Dabei gibt es Merkmale, die unabhängig von der konkreten Bezugsgruppe und Einsatzsituation sind, wie Stoffgebiet, curriculare Wissensstufe, Art des Kontextes. Andere können nicht losgelöst von einer Bezugsgruppe betrachtet werden, z. B. Verständlichkeit, Offenheit, Problemgehalt, kognitive Anforderungen. Diese werden auf einen durchschnittlichen Schüler der Bezugsgruppe bezogen.

Schon die objektive Aufgabenanalyse ist nicht eindeutig: „Es gibt offensichtlich, bereits von dem Stoff her gesehen, mehr als eine mögliche Interpretation des Aufgabeninhaltes und damit auch mehr als einen möglichen (zulässigen) Weg zur Aufgabenlösung“ (Bromme/Seeger/Steinbring 1990, S. 8).

Neben objektiven und subjektiven Anforderungen ist die Unterscheidung realisierter Anforderungen sinnvoll. Zwischen den Anforderungen und Eigenschaften der ursprünglichen Aufgabe und denen der Aufgabe, die den Schülern gestellt wird, können in Abhängigkeit von der Unterrichtgestaltung Abweichungen bestehen (vgl. Blömeke et al. 2006). Bereits die Intentionen des Lehrers bezüglich einer Aufgabe können von der objektiven Beschreibung abweichen (vgl. Blömeke et al. 2006), was sich in der konkreten Einbettung der Aufgabe, z. B. durch die Wahl von Arbeitsformen oder Medien, schon in der Unterrichtsplanung äußert. Im Unterricht kann der Lehrer durch zusätzliche Kommentare, Hilfen, Medien die an die Schüler gestellten Anforderungen beeinflussen. Die Umsetzung kann sowohl vom Potenzial der Aufgabe als auch von den (ursprünglichen) Intentionen des Lehrers abweichen (vgl. Blömeke et al. 2006). Dabei hängt es auch vom vorangegangenen Unterricht und den Übungen ab, welche Anforderungen eine Aufgabe stellt (vgl. Herget 1996, S. 54).

Es sind sowohl Aufwertungen als auch Abwertungen der objektiven Anforderungen durch die Umsetzung der Aufgabe im Unterricht möglich. So können fertigkeitsorientierte Aufgaben durch eine Reflexion und Diskussion möglicher Lösungswege bedeutungshaltig(er) werden (vgl. Neubrand, J. 2002, S. 57). J. Neubrand (2002) beobachtete in japanischen Mathematikstunden der TIMS-Videostudie eine Kombination aus selbständiger Bearbeitung mathematischer Aufgaben und gemeinsamer Besprechung möglicher Lösungswege (vgl. Knoll 1998, Schümer 1997). Derartige Reflexionen können zur Aufarbeitung heuristischer Strategien und zur Vertiefung und Vernetzung der mathematischen Inhalte beitragen und somit einen Lerngewinn über die Aufgabe hinaus ermöglichen.

Für Deutschland typischer ist dagegen, nach den Ergebnissen der TIMS-Videostudie, dass neuartige Anforderungen gemeinsam im relativ kurzschrittigen fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch, welches auf eine Lösung führt, bearbeitet werden (vgl. Baumert/Lehmann et al. 1997, S. 226/227, BLK 1997, S. 75, Knoll 1998, Schümer 1997, S. 64). Aufgaben, welche die Schüler selbständig bearbeiten, sind überwiegend anspruchsarm und algorithmischer Art (vgl. Neubrand, J. 2002, S. 350/351, 353, Baumert/Lehmann et al. 1997, S. 229, Schümer 1997, S. 67). Problemstellungen und Denkaufgaben werden in Deutschland nur selten in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeiten gestellt (vgl. Schümer 1997, S. 67, Klieme/Schümer/Knoll 2001, S. 44). In den innerhalb der TIMS-Videostudie aufgezeichneten deutschen Mathematikstunden wurde sehr häufig das Phänomen des „Kleinarbeitens komplexer Anforderungen“ beobachtet: „Der Lehrer beginnt seine Ausführungen mit einer relativ komplexen, anspruchsvollen Aufgabenstellung, die womöglich verschiedene Repräsentationsformate (...) verknüpft und einen Anwendungsbezug herstellt. Diese Aufgabe wird aber nicht von den Schülern in ihrer Komplexität bearbeitet, sondern im Unterrichtsgespräch, unter starker Steuerung durch den Lehrer, Schritt für Schritt bearbeitet. Die Teilleistungen, die dabei von den Schülern erwartet werden, sind dann meist nur noch von elementarer Art: ... . Auf diese Weise wird eine komplexe, offene Problemstellung umgeformt in eine Serie wenig anspruchsvoller, geschlossener Aufgaben.“ (Klieme/-Schümer/Knoll 2001, S. 45, vgl. Knoll 1998)

Stein, Grover, Henningsen (1996) untersuchen die Art und Weise und das Ausmaß, in dem Aufgaben mit hohen kognitiven Anforderungen im Unterrichtsprozess in weniger anspruchsvolle Aufgaben oder Teilaufgaben zergliedert werden. Dabei wurde beobachtet, dass die objektiv ermittelte Vielfalt bzgl. der Lösungsstrategien und Darstellungsformen umgesetzt wurde (vgl. Stein/Grover/Henningsen 1996, S. 473).[43] Die kognitiven Anforderungen wurden dagegen oft nicht beibehalten. Mit steigenden Anforderungen nahm das Ausmaß der Zergliederung in weniger anspruchsvolle Teilaufgaben zu: Die Aufgaben, welche die Anwendung von Routinen ohne die Verbindung mit mathematischen Konzepten und Zusammenhängen erforderten, wurden wie intendiert umgesetzt. Über die Hälfte der Aufgaben mit bedeutungshaltigen Vernetzungen konnten diesen Anspruch während der Umsetzung nicht halten. Ähnlich waren die Modifikationen von Aufgaben, die ursprünglich erforderten, mathematisch zu denken und zu argumentieren. Nur bei einer Minderheit der gestellten Aufgaben wurden die intendierten anspruchsvollen Aktivitäten tatsächlich ausgeübt (vgl. Stein/Grover/Henningsen 1996, S. 476ff., 483).

Die Art und Weise, wie anspruchsvolle Aufgaben zergliedert wurden, ist nach den Untersuchungen von Stein, Grover und Henningsen abhängig von der Art der Aufgabe: Aufgaben mit bedeutungshaltigen Verbindungen wurden herabgesetzt in Aufgaben, welche durch Prozeduren ohne Verbindungen zu bedeutungshaltigen Konzepten gelöst werden konnten (vgl. Stein/Grover/Henningsen 1996, S. 476). Aufgaben, welche das mathematische Denken (z. B. Problemlösen, Aufstellen und Prüfen von Vermutungen) fördern sollten, wurden in vielseitigerer Weise und auch in nicht mathematikbezogene Aktivitäten zerlegt. Henningsen und Stein (1997, S. 534) arbeiteten unterrichtsbezogene Faktoren heraus, welche für das Ausüben anspruchsvoller Aktivitäten durch die Schüler maßgeblich sind. Dazu gehören die Anpassung der Anforderungen an die Voraussetzungen der Schüler, eine geeignete zur Verfügung stehende Lösungszeit und das Einfordern von Erklärungen. Die Bedeutung einzelner dieser Faktoren für die Modifikation anspruchsvoller Aufgaben ist dabei abhängig vom spezifischen Zerlegungsmuster (vgl. Henningsen/Stein 1997, S. 535ff.).

Die Ergebnisse unterstreichen, wie wichtig es ist, die tatsächlichen Bearbeitungen der Schüler zu analysieren (vgl. Kapitel 5) und Unterrichtsqualität nicht (nur) an objektiven

[43] Dabei ist zu beachten, dass die beobachteten und videographierten Lehrkräfte an einer reformorientierten nationalen Studie teilnahmen und so für die Problematik sensibilisiert waren, was sich z. B. in der Auswahl überwiegend didaktisch hochwertiger Aufgaben äußerte (vgl. Stein/Grover/Henningsen 1996, S. 473).

Anforderungen festzumachen. Dies gilt sowohl für Lernaufgaben als auch für Aufgaben in Leistungsbeurteilungen: Der Lernzuwachs eines Schülers hängt von seiner individuellen Aufgabenbearbeitung ab. In der individuellen Bearbeitung werden die Kompetenzen des Schülers sichtbar. Sie bestimmt, welche Kompetenzen beurteilt werden können.

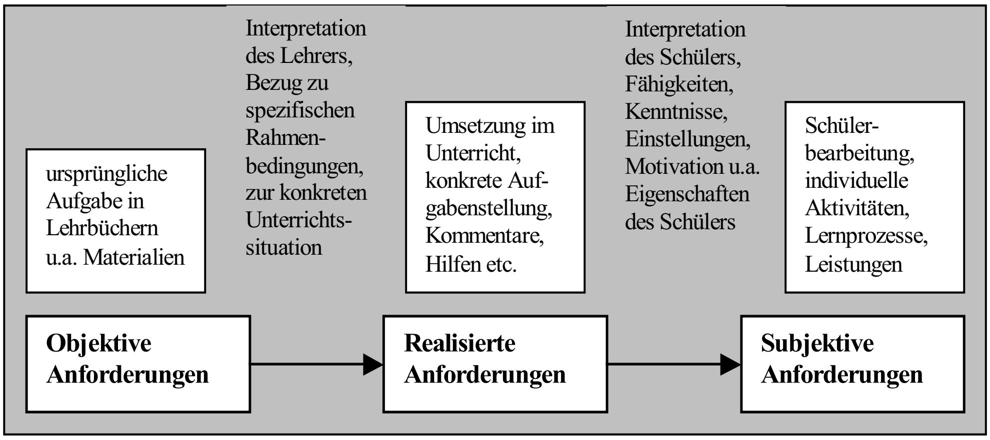



Abb. 2/1: Umsetzung einer Aufgabe im Unterricht und zugehörige Phasen der Aufgabenanalyse

Abbildung 2/1 veranschaulicht die Anordnung der drei Ebenen der Aufgabenanalyse. Bei (schriftlichen) Leistungsbeurteilungen hat, so auch in dieser Arbeit, die realisierte Umsetzung einen geringeren Einfluss als bei Lernaufgaben. In der Regel verändert der Lehrer Beurteilungsaufgaben nicht durch zusätzliche Kommentare oder gemeinsame Überlegungen. Dagegen kann die individuelle Umsetzung auch hier deutlich von den Intentionen des Lehrers abweichen, was auf die Beurteilung und ihre Ergebnisse wesentlichen Einfluss hat. Für die differenzierte Beurteilung mathematischer Kompetenzen ist deshalb von Interesse, wie intendierte Kompetenzdarlegungen zu individuellen Schüleraktivitäten führen. Aus dem Vergleich von intendierten Aktivitäten und umgesetzten Aktivitäten wird deutlich, inwiefern objektive Anforderungen in subjektive überführt wurden. Nur die von einem Schüler erkannten und angenommenen Anforderungen können zu beurteilbaren Aktivitäten führen. Daher sollte das Instrument der Analyse von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen sowohl zur Analyse objektiver Aufgabenmerkmale als auch zur Analyse der realisierten Umsetzung geeignet sein.

## 2.2 Ein System zur Analyse von Aufgaben für die differenzierte Beurteilung mathematischer Kompetenzen

Ein System zur Analyse von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen hat zwei Aufgaben zu erfüllen. Zum ersten ist die Auswahl geeigneter Aufgaben bzw. deren gezielte Modifikation und Konstruktion zu ermöglichen. Dazu sind Kriterien zu entwickeln, die prüfen, ob die Aufgabe zur Beurteilung von Kompetenzen geeignet ist, ob sie allgemeinen Anforderungen an Aufgabenqualität genügt und ob sie das Potenzial hat, vielseitige oder spezifische Aktivitäten anzuregen, um entsprechende Kompetenzen beurteilen zu können. Diese Kriterien kommen Bedingungen gleich, an die die Auswahl einer Aufgabe zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen gebunden ist. Zum zweiten ist eine Charakterisierung der (objektiven) Anforderungen der Aufgabe notwendig, um die Ergebnisse der Bearbeitung reflektieren und einordnen zu können. Das zu entwickelnde Analyseinstrument setzt sich somit aus zwei Teilen zusammen:

1. Katalog an Kriterien, die Bedingungen für Aufgaben zur Beurteilung vielseitiger mathematischer Kompetenzen benennen (entscheidende Merkmale) und
2. Katalog an Kriterien, die kognitive Anforderungen der Aufgaben zur Beurteilung vielseitiger mathematischer Kompetenzen beschreiben (beschreibende Merkmale).

Zur Erstellung der Kriterienkataloge werden vorliegende Modelle der Aufgabenqualität und -klassifikation verglichen, um bedeutsame Parameter der aktuellen fach- und allgemeindidaktischen Diskussion herauszustellen und sie mit den spezifischen Anforderungen dieser Arbeit in Zusammenhang zu bringen. Die Diskussion der Parameter mündet in konkreten Analysefragen für die praktische Anwendung.

### 2.2.1 Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

Die Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung individueller mathematischer Kompetenzen gliedern sich in drei Gruppen:

A) Kriterien, die aus der besonderen Situation der Beurteilung resultieren,

B) Kriterien, die sich aus Dimensionen von Aufgabenqualität ergeben,

C) Kriterien verbunden mit dem Ziel des Ansprechens vielseitiger mathematischer Kompetenzen.

### 2.2.1.1 Bedingungen auf Grund der Beurteilungssituation

Tab. 2/1: Zusammenfassung der Kriterien an Aufgaben zum Leisten von Büchter und Leuders (2005). Die Färbung kennzeichnet die Zugehörigkeit zu den in dieser Arbeit verwendeten Kriteriengruppen, die unten erklärt werden.

| **Aufgaben zur Diagnose** | **Aufgaben zur Leistungsbewertung** | **Aufgaben zum Kompetenzerleben** |
|---|---|---|
| Validität | Validität | |
| | Verfahrens- vs. Verstehens-orientierung | |
| | Verständlichkeit | |
| | Erwartungstransparenz | |
| | Ergebnisorientierung | Ergebnisorientierung |
| | Schwierigkeit | |
| Offene Antwortformate | | Differenzierungsvermögen |
| Individuelle Wege | | |
| | | Möglichkeit der eigenständigen Auswahl von Aufgaben |

Die von Büchter und Leuders (2005) zusammengestellten Kriterien an die drei Gruppen von Aufgaben zum Leisten (vgl. Tab. 2/1) wurden in Abschnitt 1.5.5 beschrieben. Die Aufteilung in Aufgaben zur Diagnose, zur Leistungsbewertung und zum Kompetenzerleben wird nicht übernommen. Bei dem in dieser Arbeit verfolgten Konzept der differenzierten Beurteilung und Rückmeldung mathematischer Kompetenzen werden in unterschiedlicher Gewichtung alle drei Aspekte des Leistens einbezogen: Primäres Anliegen ist, dass die Schüler ihre mathematischen Kompetenzen erfahren, um geeignete Konsequenzen für ihre weiteren Lernanstrengungen zu ziehen. Dabei liegt auch eine Beurteilungssituation vor, denn was, wenn nicht die aufgedeckten Kompetenzen der Schüler, sollte valide Grundlage von Leistungsbeurteilung sein. Schließlich können stichhaltige Beurteilungen und Rückmeldungen nur erstellt werden, wenn wirklich Diagnose betrieben wird. Stärken und Schwächen sollen mit analytischen Mitteln aufgedeckt werden, um den individuellen Lernprozess durch qualitativ hochwertige Urteile zu unterstützen.

Werden die Kriterien von Büchter und Leuders (vgl. Tabelle 2/1, 1.5.5) einzeln analysiert und verglichen, ergeben sich drei Kriteriengruppen jeweils ähnlicher Aspekte an Aufgaben zur Beurteilung mathematischer Kompetenzen, die für diese Arbeit relevant sind.

Validität

Die Kriteriengruppe Validität, in Tabelle 2/1 durch den hellsten Grauton schraffiert, bezieht das Kriterium Validität (für Aufgaben zur Diagnose und Aufgaben zur Leistungsbewertung) und das Kriterium der Verstehens- vs. Verfahrensorientierung ein.

Büchter und Leuders (2005, S. 173) stellen an valide Aufgaben die Forderung, dass diese sich auf die mathematischen Kompetenzen konzentrieren, zu denen Informationen gewonnen werden sollen und diese nicht mit anderen Aspekten überlagern. Beispielsweise können ungeeignete Darstellungen innerhalb der Aufgabenstellung verhindern, dass bestimmte Aktivitäten ausgeübt werden: Vorgegebene formale Darstellungen können sonst mögliche begriffliche Argumentationen unterbinden. Bei Aufgabenstellungen, die eine Beschreibung im Kontext enthalten, kann unzureichende Lesekompetenz oder Vertrautheit mit dem Kontext den Zugang zur Aufgabe verhindern. Bei außermathematischen Modellierungen ist es möglich, dass eine falsche Übersetzung in die mathematische Sprache das Ausüben intendierter Aktivitäten stört. Es ist deshalb genau zu durchdenken, welche Kompetenzen beurteilt werden sollen und die Aufgabenstellung so zu gestalten, dass diese möglichst wenig überlagert oder unterbunden werden können.[44]

Die Methode der Leistungsbeurteilung sollte darüber hinaus valide zum Unterrichtskonzept sein und verbindlichen Kompetenzforderungen an den Mathematikunterricht gerecht werden. Die genutzten Aufgaben sollten ein breites Spektrum mathematischer Kompetenzen (vgl. 1.2, 1.3) ansprechen, nicht unbegründet Schwerpunkte setzen.[45] Dieser Aspekt von Validität steht in Zusammenhang mit dem bei Aufgaben zur Leistungsbewertung genannten Kriterium der Verfahrens- und Verstehensorientierung. Ebenso sollte sich die Beurteilung auf den Lernprozess und das -produkt beziehen (vgl. 1.5.2), was Aufgabenstellungen bedingt, die Schüler zur Darlegung ihrer Überlegungen anregen.

---

[44] Verbunden mit einer hohen Validität kann es manchmal notwendig sein, die Lösungsvielfalt durch die Aufgabenstellung einzuschränken. Dies ist z. B. dann der Fall, wenn konkrete mathematische Konzepte oder Verfahren geprüft werden sollen. Liegt dagegen der Schwerpunkt der Beurteilung auf der Kompetenz des Problemlösens steht die Validität nicht mit der Lösungsvielfalt im Widerspruch. Oft ist auch ein Kompromiss zwischen beiden Kriterien zu finden (vgl. 2.3.2, Beispiel 1b). Ein weiterer Zusammenhang besteht zwischen Validität und Merkmalen der Aufgabenkomplexität (vgl. 2.2.2): Sind die Anforderungen zu hoch, können bestimmte Aktivitäten nicht ausgeführt und entsprechende Kompetenzen nicht beurteilt werden. Für Beurteilungsaufgaben ist somit die Schwierigkeit und die Chance der Bewältigung (s.u.) nicht nur aus Gründen der Gerechtigkeit von Bedeutung. Bereits beim erstgenannten Kriterium wird somit deutlich, dass die einzelnen Kriterien nicht unabhängig voneinander betrachtet werden können.

[45] Dabei ist zu ergänzen, dass innerhalb einer Aufgabe Schwerpunktsetzungen erfolgen können, z. T. sogar sinnvoll sind. Über einen längeren Zeitraum ist jedoch eine ausgewogene Kompetenzförderung und -rückmeldung zu erreichen.

Für das Kriterium der Validität ergeben sich damit die folgenden Analysefragen:

- Konzentriert sich die Aufgabe auf die Kompetenzen, die beurteilt werden sollen oder werden diese von anderen Aspekten überlagert?
- Richtet sich die Aufgabe an mathematische Kompetenzen, die nach fachdidaktischen Zielsetzungen zu fördern sind?

Von den drei Gütekriterien Validität, Objektivität und Reliabilität (vgl. 1.5.1) wird somit im Beurteilungskonzept dieser Arbeit die Validität an die Auswahl der Aufgabe und die Wahl der Differenzierung der Kompetenzen (vgl. 1.3) gebunden. Objektivität und Reliabilität können nicht allein über die Aufgabe umgesetzt werden. Um diesen beiden Kriterien auch bei der Beurteilung komplexer, schwer quantifizierbarer Kompetenzen gerecht zu werden, werden kompetenz- und aufgabenbezogene Beurteilungskriterien formuliert (vgl. 3.2.2). Zur Erhöhung der Reliabilität von Kompetenzeinschätzungen ist es außerdem erforderlich, eine Vielzahl von Aufgaben zu stellen (vgl. Baxter et al. 1993).

Gerechtigkeit

Unter der Kriteriengruppe „Gerechtigkeit“, in Tabelle 2/1 gekennzeichnet durch den mittleren Grauton, werden Kriterien zusammengefasst, die Voraussetzungen dafür sind, dass die Schüler die Aufgabe angemessenen bearbeiten können bzw. die an sie gestellten Anforderungen erkennen können. Diese sind: Verständlichkeit (der Aufgabenstellung), Erwartungstransparenz, Schwierigkeit sowie Ergebnisorientierung (vgl. 1.5.5, Büchter/Leuders 2005, S. 179ff.).

Bezüglich der angemessenen Schwierigkeit gibt es enge Verbindungen zur Komplexität einer Aufgabe (vgl. 2.2.2). Wird eine Aufgabe für eine Beurteilungssituation ausgewählt, sollten die Schüler Aufgaben ähnlicher Komplexität bereits ausgeführt haben, bzw. die zur Lösung notwendigen Kenntnisse und Methoden aus dem Unterricht kennen. Ähnliches gilt für das Kriterium der Verständlichkeit der Aufgabenstellung: Die verwendeten Fachbegriffe und Symbole sollten den Schülern aus dem Unterricht bekannt sein. Wird eine Aufgabenstellung im Kontext formuliert, sind Begriffe einzusetzen, die zur Allgemeinbildung von Schülern dieser Alltagsstufe gehören. Erwartungstransparenz ist nur dann möglich, wenn die Schüler den Aufforderungen bzw. Fragestellungen der Aufgabenformulierung entsprechende Anforderungen an die Bearbeitung zuordnen können, was bei offen oder in der Sprache des Kontextes formulierten Fragestellungen problematisch sein kann.

Die Ergebnis- und Produktorientierung ist zu erweitern, sie darf sich nicht nur auf (numerische) Ergebnisse bzw. Teilergebnisse beziehen. Werden die vier vorgestellten Aktivitätsbereiche gleichermaßen berücksichtigt, werden auch Lösungsansätze, Argumentationsschritte, Übersetzungen zwischen Darstellungen etc. als Teilergebnisse honoriert (vgl. Büchter/Leuders 2005, S. 182). Dem wird auch Rechnung getragen, indem Lösungsprozess und Ergebnis in die Bewertung einbezogen werden.

Die Analysefrage für das Kriterium der Gerechtigkeit lautet:

- Erfüllt die Aufgabe die Kriterien Verständlichkeit der Aufgabenstellung, Erwartungstransparenz, angemessene Schwierigkeit sowie Ergebnis- und Produktorientierung?[46]

Individuelle Wege

Sollen individuelle Kompetenzen der Schüler beurteilt, Stärken und Schwächen aufgedeckt und evtl. auch individuelle Entwicklungen beschrieben werden, muss den Schülern erlaubt werden, ihren eigenen Weg zu gehen. Dies ist nur möglich, wenn die Aufgaben methodisch offen sind (vgl. 1.5.5, Büchter/Leuders 2005). Wichtig ist aber nicht nur, dass verschiedene Lösungswege möglich und den Schülern zugänglich sind, sondern dass die individuellen Wege auch nachvollzogen werden können. Deshalb sind die Schüler anzuregen, sich umfassend zu äußern.[47] Dies gilt nicht nur für Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen, sondern ebenso für Lernaufgaben. Die Beurteilung bestimmter prozessbezogener Kompetenzen, wie Argumentieren, Erläutern der Lösungsstrategie, Beschreiben der Modellentwicklung, ist jedoch bei einer ergebnisorientierten Lösungsdarstellung schlichtweg unmöglich.

Mit der Offenheit ist ein gewisses Differenzierungsvermögen hinsichtlich der Methodik verbunden. Für das Kompetenzerleben der Schüler sind Aufgaben geeignet, die auf unter-

---

[46] Beim Kriterium der Gerechtigkeit wird besonders deutlich, was eingeschränkt auch auf andere Kriterien zutrifft: Es ist zu beachten, dass die Kriterien in einem vertretbaren Maße für alle Schüler der oft heterogenen Lerngruppen erfüllt werden. Beispielsweise sollte das Kriterium der Schwierigkeit für Schüler unterschiedlicher Vorerfahrungen und Vorkenntnisse, das Kriterium der Verständlichkeit und das der Erwartungstransparenz für Schüler unterschiedlicher sprachlicher Kompetenz erfüllt werden.

[47] Ein offenes Problem ist dabei die Validität bzgl. der sprachlichen Kompetenz der Schüler: Sind die Schüler nicht in der Lage, ihre Überlegungen verständlich darzulegen, bleiben u. U. mathematische Kompetenzen verborgen. Im Beurteilungskonzept dieser Arbeit (vgl. Kapitel 3) ist der sprachliche Aspekt bestimmter mathematischer Kompetenzen, insbesondere des Argumentierens, nicht vom mathematischen Aspekt dieser Kompetenz trennbar. Dazu wären stärker differenzierende Methoden notwendig. In den Beurteilungskriterien für das Argumentieren wird sogar transparent die sprachlich korrekte Darlegung einbezogen (vgl. Beispiel 3 und 8 sowie Anhang 1.3 und 1.4). Die differenzierte und individuelle Rückmeldung erlaubt es jedoch, die Schüler auf sprachliche Defizite hinzuweisen, wenn diese offensichtlich sind.

schiedlichen kognitiven Niveaus, evtl. auch auf unterschiedlichen Exaktheits- oder Abstraktionsniveaus bearbeitet werden können (vgl. 1.5.5, Büchter/Leuders 2005).

Zusammenfassend wird für das Kriterium der Ermöglichung individueller Wege folgende Analysefrage formuliert:

- Ist die Aufgabe geeignet, individuelle Wege anzuregen und nachzuvollziehen?

Das von Büchter und Leuders für Aufgaben zum Kompetenzerleben genannte Kriterium der Möglichkeit der eigenständigen Auswahl von Aufgaben wird für Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen nicht übernommen. Dies wird damit begründet, dass Diagnose, Leistungsbewertung und Kompetenzerleben weitestgehend vereinigt werden sollen. Leistungsbewertung setzt aber voraus, das gemeinsame Beurteilungsmaßstäbe für alle Schüler gelten. Dies ist ungleich aufwendiger, wenn die Schüler verschiedene Aufgaben auswählen können. Mit einer anderen Aufgabenstellung ist immer eine andere Situation mit wenigstens leicht veränderten Anforderungen verbunden.

#### 2.2.1.2 Bedingungen durch Anspruch auf Aufgabenqualität

Aufgaben in Beurteilungssituationen sollten, wie Aufgaben sonst im Unterricht, Kriterien der Aufgabenqualität genügen. Im Sinne einer positiven Wirkung von „Teaching to the Test“ können qualitativ hochwertige Aufgaben der Leistungsbeurteilung die im Unterricht eingesetzten Aufgaben und damit die Schwerpunkte der mathematischen Förderung allgemein beeinflussen. So kann z. B. die zunehmende Häufigkeit von Problemlöseaufgaben in Leistungsüberprüfungen deren Stellenwert im Unterricht erhöhen (vgl. McCray/Sta-cey 1997, S. 34, 1.5). Werden bereits qualitativ hochwertige Aufgaben im Unterricht eingesetzt, ist das Konzept der Leistungsbeurteilung nur valide zum Unterrichtskonzept, wenn auch die Beurteilungsaufgaben diesen Anforderungen genügen (vgl. 1.5.2).

Um Kriterien der Aufgabenqualität zu formulieren, werden fachdidaktische und allgemeindidaktische Dimensionen von Aufgabenqualität diskutiert.

*Fachdidaktische Dimensionen von Aufgabenqualität*

Leuders (2001, S. 98ff.) erachtet drei „Dimensionen von Aufgabenqualität“ für wesentlich, die mit konstruktivistisch begründeten Qualitätsmerkmalen und Zielen von Mathematikunterricht in Verbindung stehen: Authentizität, Offenheit und Aufforderungscharakter. Mit diesem Merkmalskatalog wird weder „Anspruch auf Objektivität noch auf Vollständigkeit“ erhoben (Leuders 2001, S. 99). Die drei (fachdidaktischen) Dimensionen von Aufgabenqualität sind eine Möglichkeit, Aufgaben nicht nach Komplexität und kognitiven Anforderungen, sondern nach Merkmalen, die aus lerntheoretischen Überlegungen und der Bedeutung von Aufgaben auf die Unterrichtsqualität insgesamt erwachsen, zu analysieren.

*Authentische Aufgaben* geben „die Gegebenheiten unserer (natürlichen und sozialen) Umwelt realistisch und für Schüler glaubwürdig“[48] wieder (Leuders 2001, S. 100). Gelingt es, Schülern die Nützlichkeit einer Aufgabe glaubwürdig zu machen, bekommt die Aufgabe für sie Relevanz (vgl. Leuders 2001, S. 101) und sie machen sich die Ziele der Aufgabe zu eigen. Die Tätigkeiten der Schüler bekommen dann natürlichen Charakter, da sie durch echte Bedürfnisse eingeleitet werden (vgl. 1.1.2). Dies kann Auswirkungen auf die Intensität der Ausführung der Aktivitäten, auf die Ausdauer, mit der an der Aufgabe gearbeitet wird, und insgesamt auf die Qualität des Lösungsprozesses haben.

*Offene Aufgaben* oder allgemeiner eine „offene Mathematik“ wird von vielen Fachdidaktikern als Qualitätsmerkmal des Mathematikunterrichtes gesehen. Fischer und Malle benennen bereits 1985 Argumente für eine „offene Mathematik“ (S. 266ff.). Offene Aufgaben bedingen eigenständige Denkprozesse und dienen so dazu, „die Mathematik besser zu verstehen und ihre Möglichkeiten, Zusammenhänge und Anwendungen nachhaltig zu begreifen“ (Herget 2000, S. 4). Sie werden als ein Mittel gesehen, den Schwächen deutscher Schüler bei komplexeren, realitätsbezogenen und inhaltliche Vorstellungen erfordernden Aufgaben zu begegnen (vgl. Blum/Wiegand 2000, S. 52, BLK 1997, S. 89). Die mit offenen Aufgaben verbundenen Zielvorstellungen sind hoch: Es soll die mathematische Grundbildung gefördert und mathematisches Denken auf hohem Niveau ermöglicht werden, anspruchsvolle geistige Aktivitäten sollen stimuliert und auch höhere Fähigkeiten, wie Argumentieren, Modellieren, Problemlösen, unterstützt werden (vgl. Blum/Wiegand 2000, S. 53). Und offene Aufgaben bieten Möglichkeiten, „Verständnis für mathematische Begriffe, Sätze und Verfahren zu wecken und zu vertiefen“ (Ambrus/Schulz 2001, S. 69). Da offene Aufgaben offene Lernumgebungen, die Schüleraktivitäten stimulieren, erfordern, werden sie als Mittel gesehen, die Unterrichtskultur generell zu verbessern (vgl. Blum/Wiegand 2000, S. 53).

[48] Streng authentische Aufgaben in dem Verständnis, dass die verwendeten Daten einer wirklichen Situation entnommen sind und das Problem einer dort relevanten Fragestellung entspricht sind nach Jahnke (2005) kaum zu finden. Aufgaben sind didaktische Konstrukte, vom Aufgabensteller konstruiert, um seine Intentionen umzusetzen (vgl. Jahnke 2005). Bestenfalls können authentische Kontexte angesprochen werden. In Bezug auf die Aktivierung von Schüleraktivitäten ist jedoch weniger die Relevanz der Problemstellung in der wirklichen Situation wichtig, sondern die Relevanz, welche die Aufgabe für die Schüler hat. Es ist wichtig, dass die Schüler in der Aufgabe ein echtes Problem sehen, welches für sie bedeutsam ist.

Unter den verschiedenen Merkmalen offener Aufgaben (vgl. Bruder 2000) wird hier als wichtigstes die Möglichkeit mehrerer Lösungswege gesehen. In allen Typen offener Aufgaben (vgl. Bruder 2000, S. 70, Neubrand, J. 2002, S. 125) wird das Lösungsverfahren nicht explizit gegeben, immer sind heuristische Aktivitäten erforderlich. Durch die, insbesondere bei offenen Aufgaben wichtige, Reflexion unterschiedlicher geeigneter Lösungswege können aber auch verstärkt kritisch-argumentative Aktivitäten, wie Bewerten und Begründen, einbezogen werden. Ebenso sind mit eigenständigen Lösungsstrategien eigenständige Darstellungen verbunden bzw. wenigstens das eigenständige Auswählen und Verknüpfen bekannter Darstellungen. Da schließlich oft auch formal-operative Aktivitäten einbezogenen werden, sind offene Aufgaben für die Umsetzung aller vier Aktivitätsbereiche vorteilhaft.

Die Dimension *Aufforderungscharakter* (Anwendungsrelevanz, aktueller Bezug, kognitiver Konflikt, Bezug zur Wahrnehmungswelt der Schüler, Präsentationsform und innermathematische Eigenschaften) bezweckt, die Aufgabe für die Schüler attraktiv zu machen, Bedürfnisse der Schüler anzusprechen, sie zur Bearbeitung der Aufgabe zu motivieren (vgl. Leuders 2001, S. 99). Sie steht direkt mit der Bedeutung der Eigenaktivität für das Mathematiklernen (vgl. 1.1) in Verbindung. Ähnlich wie die Authentizität kann der Aufforderungscharakter Quantität und Qualität von Aktivitäten beeinflussen. Der Einfluss auf die spezielle Art der Aktivitäten ist vermutlich geringer.

*Ein fachübergreifendes Modell didaktischer und fachlicher Aufgabenqualität*

Blömeke et al. (2006) formulieren neun Merkmale von Aufgabenqualität für lernprozessanregende Aufgaben, die sich aus dem kognitionstheoretischen Lernmodell von Tulodziecki, Herzig und Blömeke (2004, S. 55, vgl. 1.1.2) und Aspekten konstruktivistischer Ansätze begründen. Die Kriterien werden für lernprozessanregende Aufgaben, also Aufgaben des Lernens, und nicht primär für Aufgaben des Leistens formuliert. Einige Kriterien haben Bedeutung auf die Anregung von Schüleraktivitäten. Sollen vielfältige und anspruchsvolle Kompetenzen der Schüler beurteilt werden, müssen auch Beurteilungsaufgaben entsprechende Aktivitäten anregen, besser sogar bedingen. Derartige Aktivitäten werden sich nicht von denen des Lernens unterscheiden, nur die Bedingungen sind möglicherweise andere (vgl. 1.5.5). Im Folgenden werden die neun Merkmale lernprozessanregender Aufgaben nach Blömeke et al. (2006) vorgestellt und es wird untersucht, inwiefern sie auch für Beurteilungsaufgaben bedeutsam sind.

Die Schüler sollten sich im Unterricht mit Inhalten und Methoden befassen die *gesellschaftliche oder individuelle Bedeutung* haben (vgl. Blömeke et al. 2006, S. 335). Auf Grund der Wirkung von Leistungsbeurteilungen auf den Unterricht (vgl. 1.5) sollten sich diese bedeutungshaltigen Elemente in den Leistungsbeurteilungen wiederfinden.

Die Forderung nach einem *Ansprechen von Bedürfnissen der Schüler* (vgl. Blömeke et al. 2006, S. 335) stimmt mit den von Leuders genannten Dimensionen von Aufgabenqualität (Authentizität, Aufforderungscharakter) überein. Dabei steht die Motivierung und Aktivierung der Schüler im Vordergrund, was auch bei Leistungsbeurteilungen wichtig ist.

Die *Förderung genereller intellektueller Fähigkeiten* bezieht sich auf die mit einer Aufgabe verbundenen Lernprozesse, wobei als Indikator der kognitiven Anforderungen die zweidimensionale Hierarchie der kognitiven Prozesse und Wissensformen von Anderson et al. (2001) oder auch die Taxonomie kognitiver Anforderungen von Bloom (1976) geeignet ist. Die Anforderung einer Aufgabe bezüglich kognitiver Fähigkeiten kann wie die kompetenzspezifischen Anforderungen Einfluss auf die Anzahl und Art der Aktivitäten und auf das Ergebnis der Beurteilung haben.

Ein *Neuigkeitswert bezüglich des bereichspezifischen Wissens- und Erfahrungsstandes* ist für Aufgaben zum Beurteilen mathematischer Kompetenzen nicht zu fordern, muss aber auch nicht ausgeschlossen werden. Auch Leistungen beim Erschließen neuer Wissensinhalte können beurteilt werden. Hier ist aber zu beachten, dass das Kriterium der angemessenen Schwierigkeit, welches für Beurteilungsaufgaben aus Gründen der Gerechtigkeit Vorrang hat, nicht beeinträchtigt wird.

Wichtig gerade für Beurteilungsaufgaben ist es, den Schülern eine *Chance auf Bewältigung* zu geben, indem grundlegende Inhalte und notwendige Methoden bekannt sind bzw. von den Schülern in einem zeitlich geeigneten Rahmen erschlossen werden können (vgl. Blömeke et al. 2006, S. 336). Verständlichkeit der Aufgabenstellung ist dafür Bedingung.

In Zusammenhang mit der Bewältigung steht auch das *Potenzial zur inneren Differenzierung* (vgl. Blömeke et al. 2006, S. 336), ein Aspekt, der auch von Büchter und Leuders (2005, S. 189) als ein Kriterium für Aufgaben zum Kompetenzerleben benannt wurde.

Die bei Lernaufgaben erworbenen Kenntnisse sollen flexibel einsetzbar sein, was durch *authentische Aufgaben und komplexe Situationen* unterstützt werden kann (vgl. Blömeke et al. 2006, S. 336, Tulodziecki/Herzig/Blömeke 2004, S. 81, 83). Eine gewisse Komplexität ist auch für Aufgaben zur Kompetenzbeurteilung notwendig, da nur so anspruchsvolle und vielseitige Kompetenzen angesprochen werden können. Allerdings ist auf das Verhältnis zwischen Komplexität und Chance der Bewältigung besonders zu achten.

Die *Förderung der Problemlösefähigkeit* wird, in Zusammenhang mit der Forderung nach (methodisch) offenen Aufgaben, auch in den fachdidaktischen Kriterien genannt und steht in engster Verbindung mit der Anregung heuristischer Aktivitäten.

Das *Erfordernis sozialer Interaktionen* ist bei lernprozessanregenden Aufgaben im konstruktivistischen Lernmodell bedeutsam, insbesondere in Bezug auf das Prüfen der Brauchbarkeit individueller Konstrukte (vgl. 1.1.1). Das Konzept dieser Arbeit beschränkt sich jedoch auf die Beurteilung individueller Kompetenzen (vgl. 3.1.2), weshalb bei der Aufgabenbearbeitung sozialer Austausch eingeschränkt wird. Wichtig werden soziale Interaktionen bei der Rückmeldung der Kompetenzen, aber nicht als Kriterium der Aufgabenqualität.

Werden die in Tabelle 2/2 zusammengestellten Kriterien von Aufgabenqualität der Modelle von Leuders (2001) und Blömeke et al. (2006) verglichen, ergeben sich auf Grund ähnlicher Aspekte wiederum drei Kriteriengruppen, die für Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen von Bedeutung sind.

Tab. 2/2: Kriterien für Aufgabenqualität der Modelle von Leuders und Blömeke. Die Färbung kennzeichnet die Zugehörigkeit zu den in dieser Arbeit verwendeten Kriteriengruppen, die im folgenden Text erklärt werden.

| **Dimensionen von Aufgabenqualität nach Leuders 2001** | **Fachübergreifendes Modell didaktischer und fachlicher Aufgabenqualität von Blömeke et al. 2006** |
|---|---|
| | Gesellschaftliche Relevanz |
| Aufforderungscharakter | Ansprechen eines Bedürfnisses |
| Authentizität | |
| | Allgemeine intellektuelle Fähigkeiten |
| | Komplexität der Situation |
| | Förderung von Problemlösefähigkeit |
| | Chance auf Bewältigung |
| Offenheit | Potenzial zur Differenzierung |
| | Neuigkeitswert in Bezug auf den bereichsspezifischen Wissens- und Erfahrungsstand |
| | Erfordernis sozialer Interaktionen |

Individuelle und gesellschaftliche Bedeutung der Aufgabe

In der Kriteriengruppe individuelle und gesellschaftliche Bedeutung der Aufgabe, in Tabelle 2/2 mit dem hellsten Grauton schraffiert, werden die Merkmale Authentizität und Aufforderungscharakter aus dem fachdidaktischen Modell von Leuders und die Merkmale gesellschaftliche Relevanz und Ansprechen eines Bedürfnisses aus dem fachübergreifenden Modell von Blömeke et al. vereint. Diese Kriterien tragen dazu bei, den Schüler für die Aufgabe zu interessieren und zur Bearbeitung zu aktivieren. Authentizität und Aufforderungscharakter sprechen direkt Bedürfnisse eines Schülers an und entsprechen somit diesem Kriterium von Blömeke et al. Wird die gesellschaftliche Relevanz der Aufgabe vom Schüler erkannt, kann ebenfalls ein Bedürfnis entstehen. Auf der anderen Seite steht die gesellschaftliche Relevanz in Verbindung mit der Validität der Aufgabe. Die motivierende Wirkung der Aufgabe ist für die Darlegung von Kompetenzen von Bedeutung, da sie die Intensität der Auseinandersetzung mit der Aufgabe beeinflussen kann. Schwierig ist dabei, dass es nicht ausreicht, die Schüler zur Bearbeitung der Aufgabe zu motivieren, sondern auch zur Ausführung spezifischer Aktivitäten zu bewegen.

Zusammenfassend wird in Bezug auf die individuelle und gesellschaftliche Bedeutung der Aufgabe die folgende Analysefrage formuliert:

- Spricht die Aufgabe gesellschaftlich und individuell wichtige Inhalte und Methoden an?

Kognitive Forderung

Eine Aufgabe ist dann wertvoll, wenn sie die Schüler in geeignetem Maße fordert und dadurch ihre Kompetenzentwicklung fördert. Die Kriteriengruppe kognitive Forderung, in Tabelle 2/2 mit dem mittleren Grauton schraffiert, bezieht sich auf drei Merkmale aus dem Modell von Blömeke et al.: allgemeine intellektuelle Fähigkeiten, Komplexität der Situation und Förderung von Problemlösefähigkeit.

Zur Einordnung der allgemeinen kognitiven Anforderungen wird analysiert, welche der Kategorien der Taxonomie kognitiver Fähigkeiten von Bloom (1976) angesprochen werden, d. h. ob zur Bearbeitung der Aufgabe Wissen, Verstehen, Anwenden, Analysieren, Synthetisieren oder Evaluieren notwendig ist. Inwiefern mit der Aufgabe Problemlösen angesprochen wird oder weitere anspruchsvolle allgemeine mathematische Kompetenzen, ist Gegenstand der aktivitätenbezogenen Aufgabenanalyse anhand der dritten Kriteriengruppe. Die Analyse der Komplexität der situativen Einbettung ist Teil der Charakterisierung heuristischer Anforderungen innerhalb der Beschreibung kompetenzbereichsspezifischer Anforderungen in Abschnitt 2.2.2.

Die Forderung kognitiv anspruchsvoller Kompetenzen ist nur dann in Beurteilungsaufgaben gerechtfertigt, wenn die Chance der Bewältigung bewahrt wird, das heißt den Schülern auch Inhalte und Methoden zur Verfügung stehen, um den Anforderungen gerecht zu werden. Eine Chance der Bewältigung sollte jedoch bestehen, wenn die Aufgabe eine geeignete Schwierigkeit hat, was unter dem Kriterium der Gerechtigkeit geprüft wird.

Für die Kriteriengruppe kognitive Forderung werden folgende Analysefragen gewählt:

- Werden die Schüler mit der Aufgabe kognitiv gefordert? Welche Kategorien kognitiver Fähigkeiten (Wissen, Verstehen, Anwenden, Analysieren, Synthetisieren, Evaluieren) werden angesprochen?

Offenheit

Offenheit, im Sinne des Erlaubens und Würdigens unterschiedlicher Herangehensweisen (Selbstdifferenzierung), ist inzwischen als Qualitätsmerkmal von Aufgaben anerkannt und wird sowohl im Modell von Leuders als auch im Modell von Blömeke (Potenzial zur Differenzierung) berücksichtigt (gekennzeichnet durch den dunkelsten Grauton). Merkmale der Offenheit werden im Analysemodell dieser Arbeit bereits in Zusammenhang mit dem Potenzial zur Anregung individueller Wege beschrieben.

#### 2.2.1.3 Kriterien verbunden mit dem Ziel des Ansprechens vielseitiger mathematischer Kompetenzen

Bisher wurden Aufgabenmerkmale, die sich aus Ansprüchen an Aufgabenqualität allgemein und aus Ansprüchen verbunden mit der besonderen Situation der Leistungsbeurteilung ergeben, zusammengestellt. Das Ziel, Kompetenzen differenziert zu beurteilen, erfordert außerdem, entsprechend vielseitige oder spezifische Aktivitäten der Schüler anzuregen. Eine Aufgabe ist dann zur Beurteilung einer bestimmten Kompetenz geeignet, wenn sie Aktivitäten induziert, welche Indikatoren für diese Kompetenz sind. Die dritte Gruppe von Entscheidungsfaktoren für die Konstruktion und Auswahl von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen dient damit der aktivitätenbezogenen Analyse der Aufgabe, welche offen legt, welche Aktivitäten mit der Aufgabe angesprochen werden (Aktivitätenspektrum).

*Analyse von Aufgaben nach einbezogenen Aktivitäten*

> „Man muss, um die Bildungsstandards mit Leben zu erfüllen, ‚die Kompetenzbrille' aufsetzen und gegebene Aufgaben konsequent daraufhin analysieren bzw. neue Aufgaben daraufhin konstruieren, welche Kompetenzen auf welchem Niveau zu ihrer Lösung mindestens erforderlich sind." (Blum et al. 2005, S. 270).

Das Zitat von Blum et al. drückt die Bedeutung der kompetenz- bzw. aktivitätenbezogenen Aufgabenanalyse für den zielgerichteten Einsatz mathematischer Aufgaben zur Förderung spezifischer Kompetenzen aus.

In Abschnitt 1.1.2 wurden in Bezug auf die Entwicklung kognitiver Strategien zwei Ebenen der mit einer Aufgabe verbundenen Aktivitäten beschrieben (vgl. Christiansen/Walther 1986, S. 261): *Ebene 1* der inhaltsbezogenen mathematischen Aktivitäten und *Ebene 2* der inhaltsunabhängigen allgemeinen Strategien. Die zugehörigen Aktivitäten sollen von den Schülern geplant und ausgeführt werden, müssen aber vom Lehrer, u. a. durch Auswahl und Planung der Aufgabe, unterstützt werden. Eine kompetente und pädagogische Verwendung von Aufgaben macht, so Christiansen und Walther, Werkzeuge notwendig, um

- die Art der potenziell mit der Bearbeitung der Aufgabe verbundenen Aktivitäten zu identifizieren, zu beschreiben, zu charakterisieren und zu unterscheiden.
- Aufgaben nach den potenziell mit ihnen verbundenen Aktivitäten zu charakterisieren und zu typisieren.

Seit längerem werden immer wieder in mathematikdidaktischen Arbeiten aktivitätenbezogene Aufgabenanalysen durchgeführt, insbesondere, um Lernziele zu veranschaulichen, zu konkretisieren und deren Umsetzung zu unterstützen:

- Innerhalb seiner hier mehrfach zitierten Arbeit „Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht" fügt Winter 1975 den Begründungen und Erläuterungen der vier Lernzielbereiche Beispielaufgaben verschiedenster Klassenstufen an, die diese Lernziele umsetzen. Die Aufgaben werden nicht nach den Aktivitäten aufgeschlüsselt, aber mit den zuvor genannten lernzielspezifischen Aktivitäten in Verbindung gebracht.
- Bürger geht in seiner Arbeit zur „Realisierung allgemeiner Lernziele im Mathematikunterricht" (1981)[49] in der Aufgabenanalyse einen Schritt weiter. Zu drei Stoffgebieten („Potenzen mit ganzzahligem Exponenten", „Lineare Funktionen", „Äquivalenzrelationen") formuliert er spezifische Aufgabentypen, die allgemeinen Lernzielen entsprechen und präsentiert dafür Beispielaufgaben. Die in den Beispielen identifizierten Akti-

[49] In Teilen übernommen von Fischer und Malle 1985 (S. 282ff.).

vitäten werden konsequent zugeordnet, u. a. den allgemeinen Lernzielen des österreichischen Lehrplans für die gymnasiale Oberstufe (Auflistung bei Bürger 1981 selbst) und den allgemeinen Lernzielen für den Mathematikunterricht von Winter (1975). Dabei ist ein Teil der Aufgabenanalyse direkt nachvollziehbar. Durch die Typisierung der Aufgaben wird ihr Potenzial bezüglich eines Lernziels oder bezüglich verwandter Lernziele herausgestellt, jedoch nicht das ganze Aktivitätenspektrum aufgezeigt.

- Lechner (2002, S. 12ff.) stellt zu den vier Bereichen mathematischer Grundtätigkeiten (vgl. 1.3), die für die Differenzierung innerhalb dieser Arbeit ausgewählt wurden, Aufgabenbeispiele vor, welche derartige Aktivitäten einbeziehen. Sein Schwerpunkt liegt auf dem Beitrag von Computeralgebrasystemen innerhalb dieser Aktivitätsbereiche. Bereichsspezifische Aktivitäten der Aufgaben werden herausgestellt, das gesamte Potenzial wird nicht ausgelotet.
- In den kommentierten Aufgabenbeispielen der Bildungsstandards (KMK 2004, KMK 2005) wird benannt, welche allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch die Aufgabe angesprochen werden. Dabei werden wichtige einbezogene Aktivitäten deutlich, aber nicht das ganze Aktivitätenspektrum der Aufgabe. Ähnliches gilt für die Aufgabenanalysen von Sjuts (2006) sowie Sundermann und Selters (2006) zur Diagnose spezifischer Kompetenzen.

Derartige Arbeiten stellen einen direkten Zusammenhang zwischen der Aufgabe und den einbezogenen Aktivitäten bzw. entsprechenden Lernzielen und Kompetenzen her. Die aktivitätenbezogenen Analysen innerhalb dieser Arbeit knüpfen daran an, haben aber zum Ziel das gesamte Potenzial einer Aufgabe bezüglich der Anregung mathematischer Aktivitäten (Aktivitätenspektrum) auszuloten, weniger den Beitrag zu ausgewählten Lernzielen. Zusätzlich zur Analyse des Potenzials einer Aufgabe bezüglich der Anregung vielseitiger Aktivitäten wird innerhalb dieser Arbeit (Kapitel 5) an exemplarischen Aufgaben untersucht, inwiefern Schüler die intendierten Aktivitäten umsetzen.

Für Lernaufgaben wird durch das Herausarbeiten des Aktivitätenspektrums einer Aufgabe erkennbar, welche mathematischen Kompetenzen mit der Aufgabe gefördert werden können. Bei Beurteilungsaufgaben wird durch das Aktivitätenspektrum deutlich, welche Fähigkeiten ein Schüler bei der Bearbeitung der Aufgabe unter Beweis stellen muss. Das Lösen mathematischer Aufgaben und Problemstellungen ist ein komplexer Vorgang, der in der Regel eine Vielzahl an Tätigkeiten erfordert (vgl. Lechner 2002, S. 255). Dabei ist eine Aufgabe umso anspruchsvoller, je mehr und je verschiedenartiger die zur Bearbeitung notwendigen Aktivitäten sind (vgl. Lechner 2002, S. 255). Bei offenen Aufgaben können die verschiedenen Lösungswege der Schüler mit unterschiedlichen und unterschiedlich vielen Aktivitäten verbunden und somit unterschiedlich komplex sein, weshalb in den Aufgabenanalysen (vgl. Kapitel 5 und Anhang 2) die kompetenzspezifischen Anforderungsniveaus nicht immer genau benannt werden können.

Mit dem in dieser Arbeit entwickelten Konzept der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen werden den Schülern Rückmeldungen über ihre individuellen Stärken und Schwächen, differenziert in die vier Aktivitätsbereiche heuristisch-experimentell, darstellend-interpretativ, formal-operativ, kritisch-argumentativ gegeben (vgl. 1.3). Als fünfte Komponente werden die dargelegten inhaltlichen Kenntnisse der Schüler (Grundwissen) erfasst. In der Aufgabenauswahl ist zu untersuchen, welche dieser Bereiche berücksichtigt werden. Generell kann sowohl innerhalb einer Aufgabe als auch innerhalb einer Aufgabensequenz auf Ausgewogenheit geachtet werden. In der letzten Variante kann dann bei einer Aufgabe eine Schwerpunktsetzung auf ein oder zwei Aktivitätsbereiche erfolgen. Bei der Auswahl der Aufgaben für die schulpraktische Erprobung wurde die erste Variante gewählt, d. h. versucht innerhalb einer Aufgabe mindestens drei Aktivitätsbereiche zu berücksichtigen. Das kommt dem Erscheinungsbild wirklicher Problemstellungen näher, die vielfältige Kompetenzen einbinden.

Zur Untersuchung, welche Aktivitätsbereiche eine Aufgabe anspricht, dienen die folgenden Analysefragen (Auswahl):

Darstellend-interpretative Aktivitäten

- Sind Sachverhalte mathematisch darzustellen, z. B. formal, graphisch, fachsprachlich-verbal, schematisch etc.?
- Wird es nötig, zwischen verschiedenen Darstellungen zu übersetzen?
- Sind (z. B. graphische) Darstellungen zu interpretieren?

Heuristisch-experimentelle Aktivitäten

- Werden die Schüler angeregt, Zusammenhänge herzustellen, Inhalte und Konzepte zu verknüpfen, eigene Lösungsstrategien zu entwickeln?
- Haben sie Gelegenheit, kreativ zu denken und zu arbeiten?
- Können sie heuristische Strategien (z. B. Verallgemeinern, Systematisieren) anwenden?

Formal-operative Aktivitäten

- Ist es erforderlich, formale mathematische Verfahren/Algorithmen auszuführen?
- Sind algebraische Operationen/Umformungen auszuführen oder Gleichungen zu lösen?

Kritisch-argumentative Aktivitäten

- Ist es wichtig oder notwendig, Aussagen zu begründen oder zu beweisen?
- Sind Fallunterscheidungen durchzuführen?
- Sind Schlussfolgerungen zu ziehen oder zu begründen?
- Sind Modelle zu diskutieren oder zu bewerten?

### 2.2.2 Komplexitätsbeschreibende Merkmale von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

Neben Merkmalen, die entscheiden, ob eine Aufgabe zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen geeignet ist, gibt es Merkmale, die nicht entscheidend, aber charakterisierend sind. Diese Merkmale beschreiben die kognitiven Anforderungen der Aufgabe, zunächst aus objektiver Sicht. Es ist zu vermuten, dass die kognitiven Anforderungen Einfluss darauf haben, welche Aktivitäten bei einer Aufgabe auf welchem Niveau ausgeführt werden. Die Analyse der kognitiven Anforderungen eingesetzter Aufgaben ist bedeutsam für die Formulierung aufgabenspezifischer Burteilungskriterien (vgl. Kapitel 3 und 4) und die Reflexion der Umsetzung durch die Schüler (vgl. Kapitel 5).

Zur Auswahl der komplexitätsbeschreibenden Merkmale werden zwei bestehende Systeme der objektiven Aufgabenanalyse untersucht und verglichen: die Kategorien der Aufgabenkomplexität von Williams und Clarke (1997) und das sehr differenzierte System der Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen von J. Neubrand (2002). Wenn möglich, werden weitere Aspekte von Aufgabenanforderungen eingeordnet, um verschiedene vorliegende Ansätze zu verbinden. J. Neubrand (2002) strukturiert objektive Kriterien in Aufgabenkern, Aufgabenperipherie und strukturbildende Aspekte von Aufgaben. Damit werden Aspekte ähnlicher Bedeutung bei der Beschreibung der Orientierung des Mathematikunterrichts zusammengefasst. Das eigene System der Aufgabenklassifikation bezüglich objektiver Merkmale wird dagegen durch Bereiche strukturiert, die sich in ihren Verbindungen mit mathematischen Aktivitäten unterscheiden. Um derartige Merkmalsgruppen aufzudecken werden die Kategorien der Systeme von J. Neubrand sowie Williams und Clarke in Tabelle 2/3 gegenübergestellt.

Es wird deutlich, dass es eine Gruppe von Merkmalen gibt, welche die Aufgabenstellung an sich betreffen: die sprachliche Komplexität, die Art und Weise der Anweisungen, die Art der Präsentationen und den geforderten Grad der Ausführung. Diese Merkmale können eine unmittelbare Wirkung auf alle einbezogenen Aktivitäten haben.

Eine zweite Gruppe von Merkmalen betrifft Anforderungen bezüglich der mathematischen Kenntnisse der Schüler, die sich direkt auf die Beurteilungskategorie Grundwissen auswirken können. Die inhaltlichen Kenntnisse können aber indirekt auch mit der Anzahl und Qualität ausgeführter Aktivitäten in Verbindung stehen.

Eine dritte Merkmalsgruppe betrifft Anforderungen, die sich direkt auf Aktivitäten beziehen. Die Komplexität der Repräsentationsformen und die Komplexität der mathematischen Operationen steht direkt mit dem darstellend-interpretativen bzw. formal-operativen Aktivitätsbereich in Verbindung. Die von J. Neubrand aufgefächerten Ansprüche bezüglich des Findens einer Lösungsstrategie, des Problemlösecharakters, der strukturellen Tiefe und der Offenheit einer Aufgabe entsprechen im Wesentlichen heuristisch-experimentellen Anforderungen. Auch die Komplexität der kontextuellen Einbindung äußert sich im Anspruch bezüglich des Findens der Lösungsstrategie, also in heuristischen Anforderungen, was von J. Neubrand direkt formuliert wird, aber auch an den Stufen der kontextuellen Komplexität von Williams und Clarke ablesbar ist. Ansprüche auf Grund notwendiger Argumentationen werden in beiden Modellen nicht explizit betrachtet. M. Neubrand et al. (2002, S. 107) sehen dagegen die Komplexität einer Aufgabe von einbezogenen Argumentationen beeinflusst. Die Autoren zeigen, dass PISA-Aufgaben, welche Schüler explizit auffordern zu argumentieren, erhöhte Schwierigkeiten machten (vgl. Neubrand, M. et al. 2002, S. 114).

Alle vier Aktivitätsbereiche haben somit Einfluss auf die Komplexität der Aufgabe, was rechtfertigt, die Anforderungen einer Aufgabe bezüglich der vier Aktivitätsbereiche heuristisch-experimentell, formal-operativ, darstellend-interpretativ und kritisch-argumentativ zu analysieren.

Es werden Beziehungen zwischen den bereichspezifischen Anforderungen und der Anzahl, Art und Qualität der entsprechenden Aktivitäten vermutet, die auch in Bezug auf die Beurteilung mathematischer Kompetenzen von Bedeutung sind. Bereichsspezifische Anforderungen können Einfluss auf die Kompetenzdarlegungen der Schüler haben und sollten deshalb in der Reflexion, evtl. auch in der Rückmeldung der Schülerleistungen bei der Bearbeitung einer Aufgabe Beachtung finden. Inwiefern die bereichsspezifischen Anforderungen Einfluss auf die Beurteilungskriterien und die Zuweisung von Bewertungen haben sollten, ist derzeit eine offene Frage. Darüber hinaus ist es denkbar, dass bereichsspezifische Anforderungen bereits die Art und die Anzahl der Aktivitäten, welche die Schüler bei der Bearbeitung einer Aufgabe ausführen, beeinflussen können, was Hinweise auf die Gestaltung von Beurteilungsaufgaben geben kann. Systematische empirische Untersuchungen dazu sind im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich. Ein Eindruck über die Beziehungen zwischen Aufgabenparametern und den von den Schülern ausgeführten Aktivitäten soll aus einer Fallstudie gewonnen werden (vgl. Kapitel 5).

Tab. 2/3: Gegenüberstellung der Aspekte von Aufgabenkomplexität von Williams und Clarke (1997) und Neubrand (2002). Die Färbung kennzeichnet die Zuordnung zu den in dieser Arbeit verwendeten Kriteriengruppen, die unten erklärt werden.

| **Komponenten objektiver Anforderungen mathematischer Aufgaben nach dem Konzept von Williams und Clarke (1997)** | **Objektive Aufgabenmerkmale der Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen von J. Neubrand (2002)** |
|---|---|
| Sprachliche Komplexität | Anweisungen |
| | Art der Aufgabenpräsentation |
| Komplexität bzgl. der mathematischen Konzepte | Wissenseinheit |
| | Art des Wissens |
| | Mathematisches Stoffgebiet der Aufgabe |
| Komplexität der Repräsentationsformen | |
| Komplexität der Operationen | |
| Komplexität des Kontextes | Kontext |
| | Aspekte der Modellierung: Unterschiedlicher kognitiver Anspruch im Finden der Lösungsstrategie |
| | Arten von Aufgaben: Unterschiedlicher kognitiver Anspruch auf Grund des Problemlösecharakters der Aufgabe |
| | Strukturelle Tiefe: Unterschiedlicher kognitiver Anspruch auf Grund innermathematischer Anforderungen |
| | Heuristische Tiefe: Unterschiedlicher kognitiver Anspruch auf Grund der Offenheit der Aufgabe |
| Intellektuelle Komplexität | |

In Tabelle 2/3 werden die Komponenten der Modelle zur objektiven Aufgabenanalyse von J. Neubrand (2002) sowie Williams und Clarke (1997) gegenübergestellt. Im Anschluss werden die davon abgeleiteten, für die Beschreibung der Anforderungen von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen bedeutsamen, Merkmalsgruppen erläutert.

Die Komplexität bezüglich intellektueller Fähigkeiten, welche sich auf die Aufgabe als Ganzes bezieht, wird auf Grund der Beschreibung bereichsspezifischer Anforderungen in diesem Analyseteil nicht untersucht. Die Analyse nach den von Williams und Clarke zur Beschreibung der intellektuellen Komplexität eingesetzten Stufen kognitiver Anforderungen von Bloom (1976) wird, wie von Blömeke et. al (2006) vorgeschlagen, bereits verwendet, um die kognitive Forderung als ein Qualitätsmerkmal der Aufgabe zu beschreiben (2.2.1).

2.2.2.1 Anforderungen auf Grund der Aufgabenformulierung

Anforderungen, die sich direkt aus der Formulierung der Aufgabenstellung ergeben, sind die sprachliche Komplexität aus dem Modell von Williams und Clarke sowie die Merkmale Anweisungen und Grad der Ausführung aus dem Modell von J. Neubrand. Diese Merkmale sind in Tabelle 2/3 mit dem hellsten Grauton markiert.

Sprachliche Komplexität

Zur sprachlichen Komplexität von Aufgaben („Linguistic Complexity“, Williams/Clarke 1997b, S. 409) trägt das verwendete Vokabular, einschließlich fachsprachlicher Begriffe, und die Satzstruktur, einschließlich logischer Verknüpfungen, bei. Außerdem spielen offene Fragen („open-ended phrasing“), wie „Was könnte sein, wenn ... ?“, eine Rolle, welche für Schüler ungewohnt sein können und erst verstanden und interpretiert werden müssen.

Auch für Christiansen und Walther (1986, S. 276/277) ist die Art und Weise, wie die Aufgabe als Text präsentiert wird („the textual presentation“), ein Element der Aufgabenanalyse. In ihrer Kategorie „Form and Appearance“ ist zusätzlich wichtig, ob der Text Ansatzpunkte für eine Reflexion oder für einen Dialog zwischen Leser und Text liefert und ob sich die Form der sprachlichen Formulierungen innerhalb der Aufgabenstellung ändert.

Das in der Aufgabenstellung verwendete Vokabular und die Komplexität der Satzstruktur haben auf das Verständnis der Aufgabenstellung Einfluss und somit auf die Lösung und die damit verbundenen mathematischen Aktivitäten. Dies gilt insbesondere, wenn Interpretationen offener Fragestellungen oder Deutungen logischer Strukturen notwendig sind. Der Rahmenplan bietet eine Orientierung darüber, ob die verwendeten fachsprachlichen Begriffe Schülern der angesprochenen Altersgruppe bekannt sind oder erst erarbeitet werden müssen. Dies ist auch für Anwendungsaufgaben zu prüfen, wenn (Fach-)Begriffe aus dem Kontext auftreten (z. B. bei Anwendungen aus der Finanzmathematik).

Bei der Erprobung des Analysemodells wurde die Erfahrung gemacht, dass sich die Analysepunkte der sprachlichen Komplexität mit denen des Verständnisses, einem Kriterium auf Grund der Beurteilungssituation, überschneiden. Eine angemessene sprachliche Komplexität von Beurteilungsaufgaben ist aus Gründen der Gerechtigkeit daher den Entscheidungsfaktoren (2.2.1), nicht den beschreibenden Faktoren, zuzuordnen.

Anweisungen

Aufgabenstellungen können nach Neubrand (2002, S. 119) implizite und explizite Anweisungen enthalten. Explizite Anweisungen entsprechen direkten Handlungsanweisungen. Sie geben an, welche Aktivitäten, wenigstens primär, auszuführen sind (z. B. „Begründe!“). Bei impliziten Anweisungen wird nicht direkt formuliert, was zu tun ist, sondern der Schüler muss die Fragestellung interpretieren und selbst Anweisungen und Teilaufgaben ableiten. Zum Beispiel macht die Frage „Ist das Modell geeignet?“ eine Analyse des Modells bezüglich (selbst) gewählter Kriterien und eine Bewertung notwendig. Die Notwendigkeit dieser und weiterer Aktivitäten ist von den Schülern selbst zu erkennen. Implizite Anweisungen sind durch die Zusammenhänge innerhalb der Aufgabe gegeben. Beispielsweise kann auch ohne explizite Aufforderung erwartet werden, dass die Schüler ihre Schlussfolgerungen begründen, wenn sie diesen Anspruch aus dem Unterricht gewohnt sind. Hier wird deutlich, dass die Anforderungen einer Aufgabe von der Unterrichtsgestaltung abhängen können. Vor allem offene Aufgaben enthalten kaum direkte Anweisungen und sind dennoch mit konkreten Erwartungen verbunden. Neben der Gefahr, dass gewünschte Aktivitäten nicht ausgeführt werden, haben nicht-explizite und offene Fragestellungen aber auch das Potenzial, vielfältigere Schüleraktivitäten anregen zu können als es explizite Fragestellungen erlauben (vgl. Schulz 2000).

Die hier genannten Aspekte wurden bereits unter dem Kriterium der Erwartungstransparenz (2.2.1) betrachtet. Dennoch spielt die Form der Anweisungen nicht nur als Auswahlkriterium, sondern auch in der Reflexion der Aufgabenbearbeitungen (vgl. Kapitel 5) eine Rolle.

Aufgabenpräsentation

Die Art der Aufgabenpräsentation gibt an, inwiefern in die Aufgabenstellung Text, Symbole, Visualisierungen, Tabellen, graphische Darstellungen, Modelle oder weitere Präsentationsformen einbezogen werden (vgl. Neubrand, J. 2002, S. 120).

Die Präsentationsform der Aufgabenstellung kann über zwei Wege die Schüleraktivitäten bei der Bearbeitung beeinflussen. Zum einen hat die Aufgabenpräsentation Auswirkungen auf das Verständnis der Aufgabe. Graphische Darstellungen, aber auch Modelle, Beispielaufgaben und weitere in die Aufgabenstellung einbezogene zusätzliche Medien können den Schülern als Hilfen dienen. Je anschaulicher ein Sachverhalt dargestellt ist, desto besser sollte ein Zugang möglich sein (vgl. Zech 1996, S. 328). Geeignete Veranschaulichungen unterstützen das Verständnis des mathematischen Gehaltes der Aufgabe und lenken nicht vom mathematischen Kern ab. Die zweite Funktion ist die der Anregung. Präsentationen können die Schüler anregen, ebenfalls derartige Mittel zu verwenden. So könnten formale Aufgabenstellungen zu überwiegend formalen Lösungswegen führen, die Verwendung von Skizzen oder Graphiken die Häufigkeiten dieser Darstellungen in den Schülerlösungen erhöhen. In diesem Sinne dienen Darstellungen evtl. sogar als „Schlüsselbegriffe" und legen bestimmte Lösungswege und damit verbundene Aktivitäten nahe.

In der Erprobung des Analysemodells wurde festgestellt, dass sich die Analysepunkte des Aspektes der Aufgabenpräsentation mit dem Aspekt Verständnis der Aufgabenstellung und der Analyse der darstellend-interpretativen Anforderungen überschneiden.

Damit überschneiden sich nach den Erfahrungen der Erprobung alle Aspekte der Anforderungen bezüglich der Aufgabenformulierung mit anderen Kriterien für Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen und werden folglich nicht separat erfasst. Die Komplexität des Analyseinstrumentes soll nur so groß wie nötig sein.

#### 2.2.2.2 Komplexität der einbezogenen mathematischen Inhalte

Die Kriteriengruppe Komplexität der einbezogenen mathematischen Inhalte vereinigt das Kriterium der Komplexität bezüglich der mathematischen Konzepte von Williams und Clarke und die Kriterien Wissenseinheit, mathematisches Stoffgebiet und Art des Wissens von J. Neubrand.

Wissenseinheit

Unter den zur Lösung einer Aufgabe erforderlichen Wissenseinheiten versteht J. Neubrand (2002, S. 95) „die von einem Experten in Hinblick auf die Anforderungen der jeweiligen Aufgabe aktivierten Wissensbestandteile". Unterschieden werden von ihr, ob eine oder mehrere Wissenseinheiten[50] zur Bearbeitung erforderlich sind und, ob es sich um implizit oder explizit[51] gegebene Wissenseinheiten handelt.

Die Anzahl und Art der durch die Aufgabe angesprochenen Wissenseinheiten hat neben ihrer Bedeutung für die didaktische Aufgabenqualität (Vernetzung) Einfluss auf die potenziell initiierbaren Aktivitäten. Aufgaben, die nur eine Wissenseinheit einbeziehen, die explizit aktiviert wird (Grundaufgaben), sind dazu geeignet spezielle mathematische Tätigkeiten zu trainieren. Mit solchen Aufgaben können formal-operative Tätigkeiten angeregt werden, wie algebraische Umformungen ausführen oder Algorithmen abarbeiten. Durch den Einsatz von Grundaufgaben können die Schüler nicht zu heuristisch-experimentellen und kritisch-argumentativen Aktivitäten angeregt werden. Heuristisch-experimentelle Aktivitäten sind erforderlich, wenn Wissenseinheiten nicht explizit gegeben oder zu verbinden sind. Auch bei Argumentationen sind mehrere Wissenseinheiten aufeinander zu beziehen. Wird eine Darstellungsform als Wissenseinheit betrachtet, sind auch bei darstellend-interpretativen Aktivitäten Wissenseinheiten zu verknüpfen. Im Falle einer impliziten Aktivierung mehrerer Wissenseinheiten sind auf Grund der notwendigen Vernetzungen und Modellierungen vielfältige mathematische Aktivitäten zu erwarten (vgl. Beschreibung der Aktivitäten beim Modellbildungskreislauf 1.3.3).

Anhand der folgenden Analysefragen können die in der Aufgabe angesprochenen Wissenseinheiten untersucht werden:
- Werden mit der Aufgabe eine oder mehrere Wissenseinheiten angesprochen?
- Wird durch die Aufgabenstellung die Wissenseinheit explizit aktiviert oder macht eine implizit einbezogene Wissenseinheit eine Modellierung erforderlich?

Stoffgebiet und curriculare Wissensstufe

Die konzeptuelle Komplexität von Williams und Clarke („Conceptual Complexity", 1997b, S. 409) bezieht sich auf Typen und Kombinationen notwendiger mathematischer Konzepte. Eine Aufgabe kann mehr oder weniger komplex sein, je nach dem, wie hoch das

---

[50] Abgrenzung einer Wissenseinheit nach J. Neubrand (2002, S. 100): „Bei der Klassifikation der Aufgaben werden jeweils die in den Aufgaben angesprochenen hierarchisch obersten Ebenen des zur Lösung der Aufgabe notwendigen Wissens betrachtet. Wissenseinheit ist also der Wissensbestandteil, der von einem Experten als eine Einheit abrufbar und im Hinblick auf die gestellte Anforderung der Aufgabe gruppiert ist."

[51] Durch die Unterscheidung nach explizit oder implizit vorliegenden Wissenseinheiten werden Aufgaben getrennt, die zu ihrer Lösung einen Modellierungsprozess benötigen oder nicht (Neubrand 2002, S. 101ff.). Modellierungsprozesse liegen vor, wenn Wissenseinheiten implizit gegeben sind, vom Bearbeiter ausgewählt und aktiviert werden müssen. Das kann auf (außermathematische) Anwendungsaufgaben aber auch auf innermathematische (komplexe) Situationen zutreffen. In beiden Fällen sind Übersetzungsprozesse notwendig. Der Begriff des Modellierens wird von J. Neubrand also in einem erweiterten Sinne verwendet.

Anspruchsniveau und die Anzahl der erforderlichen Konzepte ist, wobei sich der Anspruch aus der Stellung im relevanten Lehrplan ergibt. Auch in anderen Konzepten der Aufgabenanalyse wird die „curriculare Wissensstufe“ als ein Faktor für die Aufgabenschwierigkeit gesehen. Baumert, Bos und Lehmann (2000, S. 75/76) unterscheiden bei der Analyse der TIMSS III-Aufgaben für die gymnasiale Oberstufe, ob es sich überwiegend um Wissensinhalte aus dem Alltag bzw. der Grundschule, der Sekundarstufe I oder der Sekundarstufe II handelt. Eine zusätzliche Stufe konzeptueller Komplexität wird erreicht, wenn verschiedene Konzepte miteinander zu verbinden sind oder ein neues Konzept innerhalb der Aufgabenbearbeitung zu entwickeln ist (vgl. Williams/Clarke 1997b, S. 409).

Neben der curricularen Wissensstufe wird dem Stoffgebiet Bedeutung zugeordnet (vgl. J. Neubrand 2002, S. 115/116). Bezüglich der Anregung mathematischer Aktivitäten könnte vermutet werden, dass unterschiedliche Stoffgebiete Schwerpunkte in verschiedenen Aktivitätsbereichen setzen. Beispielsweise könnten innerhalb der Linearen Algebra gehäuft darstellend-interpretative Aktivitäten ausgeführt werden, in der Analysis eher formal-operative. Auffällige Schwerpunktsetzungen sind zu vermeiden, um zu verhindern, dass Stoffgebiete mit spezifischen Aufgabentypen gleichgesetzt werden. In dieser Hinsicht bietet die Differenzierung in Aktivitäts- oder Kompetenzbereiche eine Kontrollmöglichkeit, denn prinzipiell können alle vier Aktivitätsbereiche in allen Stoffgebieten berücksichtigt werden. Bei globalen Vernetzungen mathematischer Inhalte ist die eindeutige Zuordnung zu einem mathematischen Stoffgebiet nicht möglich. Dann wird beschrieben, welche Stoffgebiete einbezogen werden.

Die thematische und curriculare Einordnung der mit der Aufgabe angesprochenen Wissensinhalte erfolgt durch die Analysefrage:

- Welchen curricularen Wissensstufen und welchen Stoffgebieten können die einbezogenen Inhalte zugeordnet werden?

Art des Wissens

Bezüglich der Art des zur Lösung einer Aufgabe notwendigen Wissens unterscheidet J. Neubrand (2002, S. 107) zunächst zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen. Prozedurales Wissen besteht zum einen aus der formalen Sprache, dem benutzten symbolischen Darstellungssystem, und zum anderen aus der Kenntnis von Regeln, Algorithmen und Prozeduren (vgl. Neubrand, J. 2002, S. 108). Konzeptuelles Wissen gibt dagegen Zusammenhänge zwischen mathematischen Konzepten wieder (vgl. Neubrand, J. 2002,

S. 109). J. Neubrand fügt in ihrem Aufgabenmodell zwei weitere Kategorien hinzu: Faktenwissen und Aufgaben, die Kombinationen von Wissensarten erfordern.[52]

Es ist anzunehmen, dass die konzeptuelle Komplexität indirekt Einfluss auf die Aktivitäten der Schüler bei der Bearbeitung der Aufgabe hat. Ist innerhalb der Aufgabe lediglich Faktenwissen bzw. das Wissen von konkreten Einzelinhalten abzurufen und wiederzugeben, sind keine mathematischen Aktivitäten im Sinne der Darlegung mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten erforderlich. Andererseits beruhen alle komplexeren Wissensarten und auch mathematische Aktivitäten auf der Kenntnis von Einzelinhalten. Prozedurales Wissen wird innerhalb von Aufgabenbearbeitungen bei der Ausführung mathematischer Verfahren bzw. Algorithmen deutlich. Diese Wissensart sollte mit der Ausführung formal-operativer Aktivitäten verbunden sein. Seltener werden die Verfahren durch die Schüler (verbal) beschrieben werden, was einer darstellend-interpretativen Aktivität entspräche. Konzeptuelles Wissen sollte mit heuristischen Aktivitäten, wie Herstellen von Zusammenhängen, Verallgemeinern, Analogisieren, einhergehen.

Zur Beschreibung der Art des einbezogenen Wissens wird in Anlehnung an J. Neubrand (2002, S. 111) die folgende Analysefrage formuliert:

- Ist zur Bearbeitung der Aufgabe Faktenwissen, prozedurales Wissen oder konzeptuelles Wissen oder eine Kombination von Wissensarten notwendig?

2.2.2.3 Komplexität bezüglich spezifischer Aktivitätsbereiche

Ein großer Teil der in den Modellen von Williams und Clarke sowie von J. Neubrand enthaltenen Aspekte der Charakterisierung objektiver Aufgabenanforderungen steht direkt mit bestimmten mathematischen Kompetenzen in Verbindung (in Tabelle 2/3 mit den dunkelsten Grauton markiert). So steht die Komplexität von Repräsentationsformen (Williams/Clarke 1997b, S. 408/409, 1997, S. 452) in direktem Zusammenhang zu darstellend-interpretativen Aktivitäten, die Komplexität bezüglich mathematischer Operationen (Williams/Clarke 1997b, S. 409) dagegen mit formal-operativen Aktivitäten. Die Komplexität des Kontextes (Williams/Clarke 1997b, S. 408) sowie alle weiteren in Tabelle 2/3 aufge-

[52] Renkl und Helmke (1992, S. 48) unterscheiden zwischen perfomanzorientierten Aufgaben, die mechanisches Wissen über einzelne Fakten und Verfahren erfordern und strukturorientierten Aufgaben, die bedeutungshaltiges Wissen über mathematische Begriffe und Prinzipien einschließen. Bloom (1976, S. 217) wählt die Kategorien „Wissen von konkreten Einzelinhalten", „Wissen über Wege und Mittel mit konkreten Einzelinhalten zu arbeiten", „Wissen über Verallgemeinerungen und Abstraktionen eines Fachgebietes". Diese Kategorien stimmen bezüglich der Unterscheidung kognitiver Anforderungen im Wesentlichen mit den von J. Neubrand überein.

führten Aspekte des Analysemodells von J. Neubrand (Kontext, Aspekte der Modellierung, Arten von Aufgaben, Strukturelle Tiefe und heuristische Tiefe) stehen in erster Linie mit heuristisch-experimentellen Aktivitäten in Zusammenhang. Die Merkmale der Anforderungen bezüglich bestimmter Aktivitätsbereiche werden im Folgenden beschrieben.

*Heuristische Anforderungen*

Die heuristischen Anforderungen setzen sich aus den Aspekten kontextuelle Einbettung und Modellierung, Offenheit (heuristische Tiefe) und Problemlösecharakter der Aufgabe sowie strukturelle Tiefe zusammen.

Kontextuelle Einbettung und Modellierung

Der Begriff *Kontext* wird von J. Neubrand (2002, S. 112) wie der Begriff der Modellierung nicht nur auf außermathematische Anwendungen, sondern auch auf innermathematische Einbettungen bezogen. Der Kontext einer Aufgabe spiegelt die berücksichtigten Vernetzungen mathematischer Konzepte wider. Außermathematische Kontexte bedingen eine Vernetzung von Fach- und Sachwissen. Innermathematische Kontexte drücken die Beziehungshaltigkeit der Aufgabe innerhalb der Mathematik aus (vgl. Neubrand 2002, S. 114).

In der Systematisierung von Williams und Clarke (1997b, S. 40) ist eine Aufgabe bezüglich der situativen Einbettung wenig komplex, wenn die zur Lösung der Aufgabe erforderlichen mathematischen Operationen explizit benannt werden. Eine zweite Stufe wird erreicht, wenn das mathematische Schlüsselkonzept spezifiziert und so auf die damit verbundene Operation hingewiesen wird. Die höchste Komplexität bezüglich des Kontextes ist gegeben, wenn die zur Lösung der Aufgabe relevante mathematische Operation hinter den kontextuell spezifischen Ausdrücken versteckt bleibt. Für die Schüler ergibt sich dann die Notwendigkeit, den Aufgabentext zu interpretieren, um die erforderlichen Operationen zu identifizieren. Die kontextuelle Komplexität einer Aufgabe entspricht einer Barriere aus Details, welche spezifisch für die situative Einbettung sind (vgl. Williams/Clarke 1997b, S. 408). Anforderungen, die auf einen Aufgabenkontext zurückgehen, sind vor allem heuristische Anforderungen: Die spezielle Situation ist zu analysieren, Zusammenhänge mit mathematischen Konzepten sind herzustellen, möglicherweise Vereinfachungen, Verallgemeinerungen, Spezialisierungen vorzunehmen und schließlich sind die Überlegungen zu systematisieren, zu ordnen, zu synthetisieren. Bei einer vollständigen Modellierung werden jedoch alle Aktivitätsbereiche angesprochen (vgl. 1.3.2). Die Komplexität bedingt durch einen Kontext kann somit auch Einfluss auf die anderen drei Aktivitätsbereiche haben.

J. Neubrand (2002, S. 121/122)[53] bezieht die Kategorie „Finden des Lösungsansatzes oder der Lösungsstrategie“ auf das Erkennen der (mathematischen) Wissenseinheit in einem spezifischen (Sach-)Zusammenhang und unterscheidet ebenfalls, ob durch die Aufgabenstellung oder zusätzliche Informationen das Finden des Lösungsansatzes erleichtert oder, z. B. durch zusätzliche Angaben, erschwert wird.

Mit der kontextuellen Komplexität ist der „Bekanntheitsgrad“ (Zech 1996, S. 329) sowie der „Abstraktionsgrad“ (Zech 1996, S. 328) einer Aufgabe verbunden. Vertraute Sachverhalte stellen geringere Anforderungen dar als fremde. Ebenso können in einer Aufgabe enthaltene bekannte Teilaufgaben bis hin zu Automatismen vereinfachend wirken (vgl. Zech 1996, S. 329). Unter „Abstraktionsgrad“ versteht Zech (1996, S. 328), die Anzahl der unwesentlichen Angaben in der Aufgabenstellung. Diese verbergen die wesentliche mathematische Operation und erhöhen die kontextuelle Komplexität. Vor allem der Bekanntheitsgrad führt dazu, dass Art und Anzahl ausgeführter heuristischer Aktivitäten nicht nur mit der Komplexität, sondern auch mit der Art des Kontextes zusammenhängen können. J. Neubrand (2002, S. 132ff.) unterscheidet bzgl. der Art des Kontext nicht nur inner- und außermathematische Kontexte, sondern weiter „real-world“ und eingebettete Aufgaben im außermathematischen Bereich und lokal und global im innermathematischen Bereich. Es liegt die Vermutung nahe, dass „real-world“ Aufgaben und innermathematisch globale Kontexte weitaus mehr und vielfältigere Aktivitäten induzieren können als lokale Kontexte. Diese Kriterien können innerhalb der Beschreibung des Kontextes auftreten, werden in dieser Arbeit aber nicht systematisch erfasst.

Zur Beschreibung der kontextuellen Einbettung werden folgende Analysefragen gewählt:

- Welche Stufe kontextueller Komplexität liegt vor: Wird innerhalb der Aufgabenstellung ein mathematisches Schlüsselkonzept spezifiziert, also auf die erforderliche mathematische Operation hingewiesen (1. Stufe)? Bleiben die mathematischen Operationen in der

[53] Für Neubrand (2002, S. 122) entspricht das „Finden der Lösungsstrategie“ dem „Mathematisieren“ bzw. „Übersetzen“ bei anwendungsbezogenen Aufgaben. In dieser Arbeit wird Mathematisieren, d. h. Übertragen in ein mathematisches Modell, in eine heuristische und eine darstellend-interpretative Komponente aufgefächert. Zunächst ist ein geeignetes mathematisches Modell für das Anwendungsproblem zu finden oder zu entwickeln (heuristisch-experimentell). Dann erfolgt das Übersetzen, d. h. das Übertragen der in der Sprache des Kontextes gegebenen Information in die für das gewählte Modell spezifische mathematische Sprache (darstellend-interpretativ)(vgl. 1.3.2).

Einbettung verborgen (2. Stufe)? Wird das Auffinden der hilfreichen mathematischen Operation durch die Aufgabenformulierung erschwert (3. Stufe)?[54]

- Liegt ein außermathematischer oder ein innermathematischer Kontext vor?

Offenheit und Problemlösecharakter der Aufgabe

Aspekte der Offenheit einer Aufgabe werden als Indikator verwendet, um einzuschätzen, ob mit einer Aufgabe „Problemlösestrategien, Strategiewissen oder Heuristiken entwickelt werden können" (Neubrand, J. 2002, S. 135). Die „heuristische Tiefe" (Neubrand, J. 2002, S. 135ff.) einer Aufgabe äußert sich dabei in der Anzahl der möglichen Lösungen, der multiplen Lösbarkeit und der Offenheit in der Fragestellung.

Die Förderung heuristischer Fähigkeiten erfolgt auf verschiedenen unterrichtlichen Ebenen: Eine Aufgabenstellung muss möglichst verschiedene Lösungswege einfordern bzw. wenigstens zulassen, bei der Bearbeitung sind individuelle Herangehensweisen zu unterstützen und bei der Reflexion der Aufgabe sind die unterschiedlichen Ansätze zu diskutieren und zu würdigen. Zur Beschreibung der objektiven Merkmale der Aufgabe ist relevant, „ob die Aufgabe überhaupt die Möglichkeit enthält, Heuristiken im Unterricht aufzuzeigen" (Neubrand, J. 2002, S. 136). Ein Indikator dafür ist so J. Neubrand „vor allem die Forderung nach vielfältigen Lösungsmöglichkeiten".

Offenheit und Problemlösecharakter einer Aufgabe sollten sich auf die Art, Anzahl und Vielfalt heuristischer Aktivitäten auswirken. Eine methodisch offene Aufgabe macht die eigenständige Entwicklung von Lösungsstrategien durch das Herstellen von Zusammenhängen erforderlich. Innerhalb der individuellen Lösungswege können weitere heuristische Aktivitäten auftreten, z. B. Verallgemeinern, Systematisieren, Probieren, Experimentieren, Spezialisieren. Aufträge, die auch im Zielzustand offen sind, wie die in 1.1.2 vorgestellte Aufgabe zum günstigsten Handytarif, sollten das Spektrum möglicher heuristischer Aktivitäten weiter verbreitern. Zugleich kann aber auch die Vielfalt der Aktivitäten insgesamt von der Offenheit der Aufgabe abhängen.[55]

---

[54] Da auf der ersten Stufe kontextueller Komplexität nach Williams und Clarke (1997b, S. 408) die erforderliche mathematische Operation explizit spezifiziert wird, also kein Kontext vorliegt und somit auch keine heuristischen Anforderungen, werden hier drei Stufen der kontextbedingten Komplexität neu definiert.

[55] Bezüglich der Offenheit erscheint die Beobachtung der Aufgabe im Unterricht und die Analyse der individuellen Bearbeitungen von besonderer Bedeutung, denn eine objektiv offene Aufgabe kann durch Hinweise auf mögliche Herangehensweisen oder durch die Einordnung in eine spezielle Unterrichtseinheit („Verfahrentraining") zu einer geschlossenen Aufgabe werden (vgl. auch Blömeke et al. 2006). Eigene (unsystemati-

Vom Merkmal der Offenheit unterscheidet J. Neubrand (2002, S. 123ff.) den Problemlösecharakter einer Aufgabe und systematisiert, welche Komponente des mathematischen Problemlöseprozesses – Anfangssituation, Transformation, Endsituation[56] (vgl. Bruder 2000, S. 69/70) – gegeben und welche gesucht ist. Jeder der möglichen acht Aufgabentypen (vgl. Bruder 2000, S. 70, Neubrand, J. 2002, S. 125) bildet wesentliche Lerntätigkeiten ab (Bruder, Vortrag „Welche Aufgabe – wann?“, 15.12.2003, Humboldt-Universität zu Berlin, vgl. Bruder 2000, S. 71). Der Typ einer Aufgabe kann mit Anzahl, Art und Vielfalt der heuristischen Aktivitäten aber auch der Aktivitäten allgemein zusammenhängen. Beispielsweise lässt eine Grundaufgabe (Ausgangssituation und Transformation gegeben, Ziel gesucht) keine heuristischen Aktivitäten zu, wohl aber z. B. eine Umkehraufgabe, bei der nur das Ziel vorgegeben ist. Grundaufgaben sind überwiegend mit formal-operativen Aktivitäten verbunden, Beweisaufgaben (Transformation gesucht, Anfang und Ziel vorgegeben) dagegen mit argumentativen und heuristischen Aktivitäten. Innerhalb der praktischen Aufgabenanalysen dieser Arbeit wird der Aufgabentyp vermerkt, wenn er bedeutsam für die Umsetzung der Aktivitäten ist, aber nicht systematisch erfasst.

In Anlehnung an J. Neubrand werden folgende Analysefragen zur Beschreibung der Offenheit einer Aufgabe formuliert:

- Ist die Aufgabe eindeutig lösbar oder gibt es mehrere (gleichwertige) Lösungen?
- Gibt es einen oder vielfältige mögliche Lösungswege? Ist die Aufgabe methodisch offen?
- Liegt eine nicht explizit formulierte Fragestellung vor?

Strukturelle Tiefe

Mit einer Aufgabe können unterschiedliche kognitionspsychologische Ebenen angesprochen werden, indem „Metakonzepte“ einbezogen werden, die über der Aufgabe selbst liegen und aus Aufgaben unterschiedliche Anforderungen machen, die rein stofflich nicht beschreibbar sind (vgl. Neubrand, J. 2002, S. 128). Differenziert werden von J. Neubrand drei Formen für Metakonzepte, die jeweils einem Aspekt struktureller Tiefe entsprechen: 1.) Unterschiedliche Typen von Situationsmodellen, 2.) Anwendung des mathematischen Wissens auf verschiedenen Ebenen (konkret – allgemein), 3.) Vernetzungen durch aufgabenimmanentes Wiederholen oder essentielle mathematische Tätigkeiten.

sche) Beobachtungen zeigten, dass ein und dieselbe Aufgabe in einer Klasse durch sehr unterschiedliche Strategien, in einer anderen Klasse aber durch ein geübtes Verfahren bearbeitet werden kann.

[56] Zur Struktur des Problemlöseprozesses allgemein siehe Dörner 1987 (z. B. S. 10).

Für die vorliegende Arbeit ist vor allem der zuletzt genannte Aspekt von Interesse. Bei der Beschäftigung mit einem mathematischen Inhalt während einer Aufgabenbearbeitung werden nicht nur die Inhalte selbst geübt, sondern auch „übergeordnete Prinzipien“, wie das Beweisen (vgl. Neubrand, J. 2002, S. 134, vgl. auch Lernen in Dimensionen 1 und 2, 1.1.2). In der Variablengruppe „essentielle mathematische Tätigkeiten“ untergliedert J. Neubrand Beweisen (formal), Begründen (informell), Verallgemeinern, etwas in Beziehung setzen/vergleichen, Klassifizieren, Logisches Ordnen. Im Analysemodell dieser Arbeit werden derartige Aktivitäten innerhalb der aktivitätenbezogenen Aufgabenanalyse (2.2.1) erfasst.

*Formal-operative Anforderungen*

Die Komplexität einer Aufgabe bezüglich mathematischer Operationen („Operational Complexity“, Williams/Clarke 1997b, S. 409) schließt alle Arten und Kombinationen von Operationen ein, die zur Lösung der Aufgabe erforderlich sind. Zur Einstufung des Anspruchs der zur erfolgreichen Bearbeitung einer Aufgabe notwendigen Operationen dient der aktuelle Lehrplan. Um den Anforderungen der Sekundarstufe II gerecht zu werden, wird die „Operational Complexity“ von Williams und Clarke um die mathematischen Verfahren und Algorithmen erweitert, welche in der Sekundarstufe II die algorithmischen Anforderungen einer Aufgabe wesentlich bestimmen.

Der Einfluss zu Grunde liegender formaler mathematischer Konzepte (z. B. einer Gleichung) auf die Schwierigkeit einer Aufgabe wurde möglicherweise bislang überbewertet. Die Wirkung der Art und Anzahl notwendiger mathematischer Operationen und Verfahren auf die Schwierigkeit einer Aufgabe muss differenziert und in Abhängigkeit vom Aufgabentyp betrachtet werden. M. Neubrand et al. (2002, S. 111) zeigen, dass sich bei technischen Aufgaben die (empirische) Schwierigkeit vor allem aus der curricularen Wissensstufe der geforderten Routinen ergibt, der Umfang der Bearbeitung dagegen keinen signifikanten Beitrag zur Aufgabenschwierigkeit leistet. Bei rechnerischen Modellierungsaufgaben kommen zusätzlich zur curricularen Wissensstufe die Komplexität der Modellierung und der Umfang der Bearbeitung ins Spiel (vgl. Neubrand, M. et al. 2002, S. 112).

Zwischen den algorithmisch-kalkülhaften Anforderungen und der Anzahl, Art und Vielfalt der von den Schülern ausgeführten formal-operativen Aktivitäten ist ein direkter Zusammenhang zu erwarten.

Zur Beschreibung der formal-operativen Anforderungen dienen folgende Analysefragen:

- Welcher curricularen Wissensstufe sind die auszuführenden Operationen und Verfahren zuzuordnen?
- Wie wird die Anzahl der Operationen bzw. die Komplexität der algorithmischen Anforderungen charakterisiert: einzelne Operationen, komplexe Verknüpfungen von Operationen, Verfahren mit wenigen Rechenschritten, komplexe Verfahren?

*Darstellend-interpretative Anforderungen*

Die Komplexität der Darstellungen („Representational Complexity“, Williams/Clarke 1997b, S. 408/409, 1997, S. 452) wird erzeugt durch Symbole, Diagramme, Graphen, aber auch verbale Darstellungen, Tabellen und weitere Repräsentationsformen, welche verwendet oder interpretiert werden müssen, um die Aufgabe verstehen und bewältigen zu können. Anzahl, Art und Vielfalt der notwendigen Repräsentationsformen und die Erfordernis zwischen Darstellungsformen zu übersetzen haben vermutlich nicht nur Einfluss auf die Komplexität der Aufgabe, sondern speziell auch auf die Anzahl und Art der ausgeführten darstellend-interpretativen Aktivitäten. Anspruchsvolle Übersetzungen und Analysen bedingen auch heuristische, u. U. auch argumentative Tätigkeiten. Insbesondere die eigenständige Auswahl von Darstellungsmitteln, welche der Lösungsfindung dienlich sind, sie möglichst erleichtern, ist eine solche heuristische Aktivität. So können zeichnerisch-ikonische Darstellungen (Skizzen) oder auch Konkretisierungen allgemeiner Zusammenhänge als Hilfsmittel dienen (vgl. „Anschaulichkeitsgrad“, Zech 1996, S. 328, „sekundäres Medium“, Aebli 1981, S. 359/360). Während des Lösungsprozesses sind jedoch – ebenso wie bei der Aufgabenstellung – mehrere Faktoren ausschlaggebend dafür, ob die Darstellungen den Lösungsprozess unterstützen oder erschweren, z. B. die Eignung des gewählten Darstellungsmittels oder die Vertrautheit der Schüler mit der Darstellungsform (vgl. Aebli 1981, S. 360, Jahnke 1984).

Die Anforderungen bezüglich darstellend-interpretativer Aktivitäten werden beschrieben durch die Analysefragen:

- Welche Darstellungsformen werden durch die Aufgabe gefordert oder angeregt?
- Welche Übersetzungen zwischen Darstellungen sind erforderlich?
- Sind diese Darstellungen den Schülern geläufig oder sind sie für sie ungewohnt? Sind eigene/neue Darstellungsformen zu entwickeln?

*Kritisch-argumentative Anforderungen*

Werden die bisher dargelegten spezifischen Anforderungen von Aufgaben betrachtet, können drei der vier Aktivitätsbereiche von Lechner (heuristisch-experimentell, formal-operativ und darstellend-interpretativ) wiedergefunden werden. Der kritisch-argumentative Aktivitätsbereich blieb bisher weitestgehend unberücksichtigt. In vorliegenden Klassifikationssystemen für mathematische Aufgaben werden die Anforderungen bezüglich des Argumentierens nicht in dem Maße explizit analysiert wie z. B. heuristische Anforderungen. M. Neubrand et al. (2002, S. 107) benennen dagegen Argumentationen als ein anforderungsbeeinflussendes Merkmal von Aufgaben und zeigen, dass Aufgaben, die von den Schülern explizites Argumentieren, d. h. Begründungen und Beweise, verlangen, hohe Schwierigkeiten aufweisen (S. 114). In dieser Arbeit wird deutlich, dass Anforderungen im argumentativen Bereich auch für Schüler mathematisch-profilierter Klassen eine höhere Schwierigkeit darstellen als die in anderen Aktivitätsbereichen (vgl. Kapitel 4). Reiss (2002, S. 42) stellte bei Untersuchungen in Gymnasien fest, dass Aufgaben, die explizit Begründungen verlangen, schlechter bearbeitet werden. Und auch bei Untersuchungen in anderen Bereichen der Mathematik fiel auf, dass methodische Defizite in der Beweisführung vorliegen und (auch begabte) Schüler Schwierigkeiten haben, Behauptungen mit Hilfe einer logischen Argumentationskette zu stützen (vgl. Stengel 2002, S. 64). Nach Goldberg (1992, S. 34/35) liegen Ursachen der Schwierigkeiten beim Beweisenlernen im kognitiven Bereich der Schüler (Schwierigkeiten im Gebrauch der Umgangs- und Fachsprache, Schwierigkeiten beim Verwenden von Variablen/Symbolen, ungenügend ausgeprägtes Verständnis logischer Bestandteile der Sprache), aber auch in Aspekten der Unterrichtsgestaltung, wie einer zu starken Bindung an formale Darstellungen (vgl. Heske 2002, S. 52/53).

Mathematik ist charakterisiert durch logische und sprachliche Strenge und dies kommt beim Beweisen besonders zum Ausdruck. Beide Aspekte von Strenge sind im Unterricht angemessen zu berücksichtigen, ohne „durch überhöhte Forderungen einen lebendigen Gedankenaustausch im Unterricht zu erschweren und inhaltliches Verstehen zu behindern“ (Walsch 2000, S. 28). Die Ziele bezüglich der Entwicklung logischer Fähigkeiten sind nicht durch das Beweisen allein erreichbar, sondern „es bedarf der Ergänzung durch vielseitige Anstöße, Fragestellungen und Übungen, bei denen der Gehalt an überzeugenden Argumentationen im Vordergrund steht und nicht das Beweisen von Sätzen“ (Walsch 2000, S. 30). Walsch (1992, S. 31) erscheint es bedeutsam, Schülern Gelegenheit zu geben, eigene Ergebnisse, Vermutungen, Urteile zu begründen sowie Behauptungen anderer zu werten und eventuell zu widerlegen (vgl. Goldberg 2002, S. 11).

Nach diesen Aussagen zur spezifischen Schwierigkeit des Argumentierens ist zu vermuten, dass sich die Anforderungen der mathematischen Argumentation deutlich auf die Tätigkeiten der Schüler auswirken, nicht nur auf die argumentativen. Schon die Aufforderung „Begründe“ oder „Beweise“ kann Einfluss darauf haben, ob sich ein Schüler überhaupt der Aufgabe stellt, denn „aus der Sicht der Schüler ist das Beweisen oft negativ belegt“ (Walsch 1992, S. 27). Ihre Ablehnung begründen die Schüler mit geringen Erfolgschancen und Unsicherheiten bzgl. der Beweisführung (vgl. Walsch 1992, S. 27).

Anforderungen bzgl. argumentativer Kompetenzen ergeben sich aus dem Grad an Formalisierung und aus der Komplexität auf Grund der Verknüpfung unterschiedlicher Argumente und Schlussweisen. Es sind so Malle (2002, S. 6) „zwei grundlegend verschiedene Sachen, eine Begründung zu finden und diese ordentlich zu formulieren“. Er berichtet, dass auch Studienanfänger bei einer Beweisaufgabe oftmals eine Beweisidee finden, aber keine korrekte Argumentation aufschreiben können. Malle (2002, S. 6) unterscheidet nicht zwischen Begründen und Beweisen, sondern zieht für den Mathematikunterricht (generell) das „sanftere Wort ‚Begründen‘“ vor. Um formale Anforderungen zu unterscheiden, scheint es jedoch sinnvoll, das (anschauliche) Begründen und das (formale) Beweisen zu trennen.

Für Goldberg (2002, S. 9) bedeutet *Begründen* im Mathematikunterricht, „andere und sich selbst durch (logisches) Verbinden einzelner Argumente von der Richtigkeit einer Aussage zu überzeugen“. Die Überzeugungsfunktion (Malle 2002, S. 4) steht im Vordergrund. Beim *Begründen* wird fachsprachlich und mit mathematischen Argumenten gearbeitet. In Verbindung mit außermathematischen Kontexten können, z. B. beim Bewerten der Eignung eines mathematischen Modells, mathematische und nichtmathematische Argumente verknüpft werden. Begründungen unterliegen nicht den strengen logischen Regeln und formalen Ansprüchen von Beweisen bzw. Nachweisen und werden oft verbal formuliert.

Beim fachwissenschaftlichen *Beweisen* werden die zulässigen Argumente auf Axiome und bereits bewiesene Aussagen und die zulässigen Verbindungen auf die logischen Schlussregeln eingeschränkt (vgl. z. B. Walsch 1972, S. 28). Dabei diskutieren aber auch Mathematiker immer wieder, welche Regeln in der Mathematik gültig sind (vgl. Reiss 2002, S. 39, Dreyfus 2002). Das Beweisen ist die Argumentationsform, die am stärksten durch logische und sprachliche Strenge gekennzeichnet ist (vgl. Walsch 2000, S. 28, Walsch 1972). Dies sollte ebenso für den Mathematikunterricht gelten, wenn auch hier nicht mit Axiomensystemen gearbeitet wird und viele Sätze anschaulich gewonnen werden. Unter einem *Beweis bzw. Nachweis* wird in dieser Arbeit ein mehrstufiger Prozess verstanden, der sich formal in die Abschnitte Behauptung, Beweisschritte oder Argumentationsfolge, Beweisschluss gliedert. Zulässige Argumente sind dabei bereits im Unterricht bewiesene Aussagen, aber auch solche, die im Unterricht, z. B. auf Grund von Plausibilitätsbetrachtungen oder Begründungen, als gültig anerkannt wurden. Die Verbindungen der Argumente sollten die logischen Schlussweisen sein, wobei die Darstellung nicht nur formal, sondern auch fachsprachlich verbal, aber präzise, erfolgen kann. Möglich sind verschiedene Beweisverfahren, wie indirekter Beweis, vollständige Induktion, Beweis durch Fallunterscheidung, bei denen Teile der logischen Schlusskette bereits vorgegeben sind. Andere Beweise dagegen sind in ihrer Struktur offener, z. B. viele geometrische Beweise. Die Komplexität von Beweisen, d. h. Art und Anzahl vorzunehmender Argumentationsschritte ist unterschiedlich.[57]

Neben diesen beiden komplexeren Argumentationsformen, die sich im Formalisierungsgrad unterscheiden, wird in dieser Arbeit das *(einfache) Schlussfolgern,* z. B. das Schließen auf ein lokales Extremum nach einer Extremwertbetrachtung, als Kompetenz des Argumentierens verstanden. Auch, wenn die Grenze zum Grundwissen nicht immer gezogen werden kann, zeigt die explizite Anwendung von Schlussregeln, dass Grundregeln des mathematischen Argumentierens und die logischen Bestandteile der Sprache und Symbolik beherrscht werden[58].

Für die Beschreibung der Anforderungen von Aufgaben bezüglich kritisch-argumentativer Aktivitäten sind die folgenden Analysefragen wichtig:

- Sind zur Lösung der Aufgabe (nur) einfache logische Schlussfolgerungen nötig?
- Müssen die Schüler Aussagen mit mathematischen Mitteln begründen?
- Ist ein logisch und mathematisch exakter Beweis bzw. Nachweis zu führen?
- Wie komplex ist die Argumentationskette (Anzahl, Art der Argumentationsschritte)?

[57] Beweisaufgaben an sich sind Problemstellungen und schließen viele einzelne Aktivitäten ein (ähnlich dem Modellbildungsprozess). Deshalb werden sie innerhalb der Aktivitätenanalyse weiter aufgeschlüsselt. Neben der argumentativen Komponente werden bei einem vollständigen Beweis in der Regel auch heuristische, formale und darstellende Aktivitäten einbezogen.

[58] Argumentationen auf allen Ebenen unterscheiden sich von verbalen Erläuterungen und Kommentaren durch argumentative Ausdrücke, wie „weil“, „daraus folgt“, „somit“, die auch durch entsprechende logische Symbole ersetzt werden können. Der logische Zusammenhang wird so entwickelt und dargestellt.

#### 2.2.2.4 Beschreibung durch Anforderungsniveaus

Eine Möglichkeit der konkreten Benennung kognitiver Anforderungen sind Anforderungsbereiche, wie sie in den Bildungsstandards (Reproduzieren, Zusammenhänge herstellen, Verallgemeinern und Reflektieren, KMK 2004, KMK 2005) und in den Einheitlichen Prüfungsanforderungen (EPA) Mathematik (KMK 2002, Tabelle 2/4) formuliert werden.

Tab. 2/4: Anforderungsbereiche der EPA (KMK 2002, S. 12ff.)

| |
|---|
| Anforderungsbereich I umfasst<br>die Verfügbarkeit von Daten, Fakten, Regeln, Formeln, mathematischen Sätzen usw. in einem abgegrenzten Gebiet im gelernten Zusammenhang<br>die Beschreibung und Verwendung gelernter und geübter Arbeitstechniken und Verfahrenweisen in einem abgegrenzten Gebiet und einem wiederholenden Zusammenhang |
| Anforderungsbereich II umfasst<br>selbständiges Auswählen, Anordnen, Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang<br>selbständiges Übertragen des Gelernten auf vergleichbare neue Situationen, wobei es entweder um veränderte Fragestellungen oder um veränderte Sachzusammenhänge oder um abgewandelte Verfahrensweisen gehen kann |
| Anforderungsbereich III umfasst<br>planmäßiges und kreatives Bearbeiten komplexer Problemstellungen mit dem Ziel, selbständig zu Lösungen, Deutungen, Wertungen und Folgerungen zu gelangen<br>bewusstes und selbständiges Auswählen und Anpassen geeigneter gelernter Methoden und Verfahren in neuartigen Situationen |

Auch zur Einordnung der Anforderungen von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen sind Zuordnungen zu konkreten Anforderungsbereichen sinnvoll. Besser als die ausführlichen Beschreibungen der Anforderungen, die für die Reflexion der Ergebnisse wichtig sind, erlauben sie eine schnelle Übersicht, um die Eignung der Aufgabe für die Lerngruppe abzuschätzen und ermöglichen einen Überblick über die Einbeziehung unterschiedlicher Anforderungsniveaus, z. B. in einem Themengebiet. Der in dieser Arbeit verwendeten Differenzierung werden Beschreibungen von Anforderungsbereichen für die vier Aktivitätsbereiche und die einbezogenen mathematischen Inhalte gerecht, denn in einer Aufgabe können die Anforderungen zwischen einzelnen angesprochenen mathematischen Kompetenzen durchaus variieren. In einer Beweisaufgabe z. B. können die argumentativen Anforderungen hoch, die formal operativen dagegen niedrig sein. Es können aber auch Zusammenhänge bestehen, z. B. zwischen hohen Anforderungen bzgl. mathematischer Inhalte und hohen heuristischen Anforderungen. Im Folgenden werden kompetenzbereichspezifische Anforderungen exemplarisch konkretisiert, z. T. auch durch Beispiele aus den EPA (KMK 2002, S. 12ff.). Unterschiedliche Anforderungsniveaus ergeben sich aus der Neuartigkeit einbezogener Elemente und aus der Komplexität durch Anzahl und Vernetzung der Elemente.

Tab. 2/5: Anforderungsbereiche bzgl. einbezogener mathematischer Inhalte

| |
|---|
| Anforderungsbereich I bzgl. einbezogener mathematischer Inhalte umfasst u. a.<br>die Verfügbarkeit von Definitionen, Fakten, Regeln, Formeln, mathematischen Sätzen aus einer Wissenseinheit, die zu den Standardinhalten der Sekundarstufe II gehört<br>die Verfügbarkeit von Standardinhalten der Sekundarstufe I und der Primarstufe ohne Vernetzungen zwischen Wissenseinheiten |
| Anforderungsbereich II bzgl. einbezogener mathematischer Inhalte umfasst u. a.<br>die Verfügbarkeit von Einzelinhalten verschiedener Stoffeinheiten und Jahrgangsstufen<br>die Verfügbarkeit von Zusammenhängen zwischen Standardinhalten |
| Anforderungsbereich III bzgl. einbezogener mathematischer Inhalte umfasst u. a.<br>die Verfügbarkeit zahlreicher Einzelinhalte und deren Zusammenhänge aus unterschiedlichen Stoffeinheiten und unterschiedlichen Schulstufen<br>die Erarbeitung neuer Wissensinhalte innerhalb einer Aufgabe |

Tab. 2/6: Anforderungsbereiche bzgl. einbezogener darstellend-interpretativer Aktivitäten

| |
|---|
| Anforderungsbereich I bzgl. einbezogener darstellend-interpretativer Aktivitäten umfasst u. a.<br>Skizzen auf bekannte Weise anfertigen, z. B. Graphen von Grundfunktionen skizzieren<br>(formale) Routinedarstellungen anwenden, z. B. algebraische Umformungen darlegen |
| Anforderungsbereich II bzgl. einbezogener darstellend-interpretativer Aktivitäten umfasst u. a.<br>charakteristische Eigenschaften einer Funktion aus dem Graphen erschließen<br>einen Graphen in einen Funktionsterm oder einen Funktionsterm in einen Graphen übersetzen<br>eine verbal beschriebene Situation in eine formale Darstellung übersetzen, wenn die mathematischen Konzepte aus dem Unterricht bekannt sind |
| Anforderungsbereich III bzgl. einbezogener darstellend-interpretativer Aktivitäten umfasst u. a.<br>graphische Darstellung komplexer oder neuartiger Zusammenhänge<br>kreatives Übersetzen einer komplexen oder neuartigen Situation in eine formale Darstellung |

Tab. 2/7: Anforderungsbereiche bzgl. einbezogener heuristisch-experimenteller Aktivitäten

| |
|---|
| Anforderungsbereich I[59] bzgl. einbezogener heuristisch-experimenteller Aktivitäten umfasst u. a.<br>Auswahl eines Standardverfahrens, das zur Lösung der Problemstellung geeignet ist, wobei analoge Problemstellungen im Unterricht bearbeitet wurden<br>Zusammenhänge zwischen Standardinhalten herstellen, auf die im Unterricht bereits eingegangen wurde |
| Anforderungsbereich II bzgl. einbezogener heuristisch-experimenteller Aktivitäten umfasst u. a.<br>bekannte Verfahren und heuristische Strategien für Problemstellungen auswählen, die in ähnlicher Form im Unterricht bearbeitet wurden (z. B. Umkehrungen von Standardaufgaben)<br>Zusammenhänge zwischen Inhalten verschiedener Stoffeinheiten und/oder Jahrgangsstufen herstellen<br>Eigenschaften von Funktionen, mathematischen Zusammenhängen u. ä. analysieren |
| Anforderungsbereich III bzgl. einbezogener heuristisch-experimenteller Aktivitäten umfasst u. a.<br>Lösungsstrategien für neuartige oder komplexe Problemstellungen finden<br>komplexe Zusammenhänge herstellen (Inhalte verschiedener Stoffeinheiten und Schulstufen)<br>einen Sachverhaltes verallgemeinern, der nur aus Beispielen bekannt ist |

Tab. 2/8: Anforderungsbereiche bzgl. einbezogener formal-operativer Aktivitäten

| |
|---|
| Anforderungsbereich I bzgl. einbezogener formal-operativer Aktivitäten umfasst u. a.<br>Routineverfahren/Routineoperationen der Sekundarstufe I und wenig komplexe Verfahren und Operationen der Sekundarstufe II ausführen |
| Anforderungsbereich II bzgl. einbezogener formal-operativer Aktivitäten umfasst u. a.<br>komplexe Verfahren der Sekundarstufe II ausführen<br>Standardoperationen kombinieren |
| Anforderungsbereich III bzgl. einbezogener formal-operativer Aktivitäten[60] umfasst u. a.<br>Kalküle und Verfahren auf neuartige Situationen selbständig anpassen<br>Operationen oder verschiedene Verfahren, auch verschiedener Stoffeinheiten und Schuljahre, zusammensetzen<br>ein neuartiges Verfahrens kreieren |

[59] Beispiele für Anforderungsniveau I im heuristisch-experimentellen Bereich sind kaum zu finden: Werden bekannte Verfahren in bekannten Situationen angewendet, liegt keine heuristische Anforderung vor. Werden aus dem Unterricht bekannte Zusammenhänge hergestellt, handelt es sich eigentlich um Grundwissen. Es kann sich hier also nur um das selbständige Auswählen bekannter Verfahren in bekannten Zusammenhängen und um das selbständige Herstellen bekannter Zusammenhängen handeln, also um das eigenständige Nachvollziehen heuristischer Aktivitäten, die im Unterricht gemeinsam ausgeführt wurden.

[60] Es ist anscheinend nicht möglich, Beispiele von Aktivitäten des Anforderungsbereichs III formal-operativer Aktivitäten zu finden, ohne das auch eine heuristisch-experimentelle Komponente vorliegt.

Tab. 2/9: Anforderungsbereiche bzgl. einbezogener kritisch-argumentativer Aktivitäten

| |
|---|
| Anforderungsbereich I bzgl. einbezogener kritisch-argumentativer Aktivitäten umfasst u. a.<br>eine Begründung/einen Beweises, die/der im Unterricht erarbeitet wurde, wiedergeben<br>wiederholende Beschreibung eines Beweisverfahrens |
| Anforderungsbereich II bzgl. einbezogener kritisch-argumentativer Aktivitäten umfasst u. a.<br>Beweise, deren Beweisstruktur aus dem Unterricht bekannt ist, ausführen<br>vollständige Fallunterscheidungen in überschaubaren Situationen durchführen |
| Anforderungsbereich III bzgl. einbezogener kritisch-argumentativer Aktivitäten umfasst u. a.<br>Beweise führen, zu denen eigenständige Beweisgedanken erforderlich sind<br>eigenständig Ergebnisse, Modelle, Vorgehensweisen überprüfen und bewerten |

### 2.2.3 Überblick über das entwickelte Modell der Analyse und Beschreibung von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

Als Ergebnis der in Abschnitt 2.2.1 und 2.2.2 geführten Diskussion von Merkmalen verschiedener vorliegender Modelle der Aufgabenklassifikation und -analyse werden in diesem Abschnitt zusammenfassend die ausgewählten Kriterien und beschreibenden Merkmale für Aufgaben zu differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen aufgelistet. Zusammen mit den Analysefragen (vgl. 2.2.1 und 2.2.2) liegt damit ein praktischer Kriterienkatalog vor, der für die Auswahl und Konstruktion der in dieser Arbeit eingesetzten Aufgaben verwendet wird. Die Eignung des Kriterienkataloges für Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen wird nach den Erfahrungen bei der Erprobung in Abschnitt 6.1 kritisch reflektiert.

Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

Bedingungen auf Grund der Beurteilungssituation
- Validität,
- Gerechtigkeit,
- individuelle Wege (Offenheit)

Bedingungen durch Anspruch an Aufgabenqualität
- individuelle und gesellschaftliche Bedeutung von Aufgaben,
- kognitive Forderung

Bedingungen verbunden mit dem Ziel des Ansprechens vielseitiger mathematischer Kompetenzen
- darstellend-interpretative Aktivitäten,
- heuristisch-experimentelle Aktivitäten,
- formal-operative Aktivitäten,

- kritisch-argumentative Aktivitäten

Komplexitätsbeschreibende Merkmale von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

Komplexität der einbezogenen mathematischen Inhalte
- Wissenseinheit/Stoffgebiet und curriculare Wissensstufe,
- Art des Wissens

Komplexität bezüglich spezifischer Aktivitätsbereiche
- Anforderungen bezüglich darstellend-interpretativer Aktivitäten,
- Anforderungen bezüglich heuristisch-experimenteller Aktivitäten,
- Anforderungen bezüglich formal-operativer Aktivitäten,
- Anforderungen bezüglich kritisch-argumentativer Aktivitäten

## 2.3 Entwicklung von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

> „…, the crucial function of the teacher is *not to motivate students for activity on a selected task*, but to *select task which motivate his students for activity* – and which as far as possible do this in and by themselves.“ (Christiansen/Walther 1986, S. 294).

Das Zitat von Christiansen und Walther bringt es auf den Punkt: Die Auswahl geeigneter Aufgaben ist wesentlich für die Anregung anspruchsvoller und vielseitiger Schüleraktivitäten und damit auch für die Beurteilung entsprechender Kompetenzen. Ein Instrument zur zielorientierten und spezifischen Analyse von Aufgaben wurde in 2.2 entwickelt und wird hier angewendet, um die Eignung von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen zu bewerten und gegebenenfalls Ansatzpunkte für eine Modifikation oder Erweiterung von Aufgaben zu finden. Gleichzeitig wird das Modell der Aufgabenanalyse und das Vorgehen bei der Konstruktion von Aufgaben verdeutlicht.

### 2.3.1 Angebot an Aufgaben

Die wohl nach wie vor wichtigste Aufgabenquelle für Lehrer ist das Schulbuch. Die (herkömmliche) Unterrichtsorganisation ist insgesamt stark an das verwendete Schulbuch gebunden (vgl. Christiansen/Walther 1986, S. 293). Schulbücher nehmen möglicherweise sogar einen größeren Einfluss auf das Unterrichtsgeschehen als Lehrpläne (vgl. Dockhorn 2000), werden deshalb mitunter als „heimlicher Lehrplan“ bezeichnet. Das Schulbuch bietet einen Rahmen für die Organisation des Lernprozesses, erleichtert die Sequenzierung des mathematischen Inhalts und die Aufteilung der Unterrichtszeit (vgl. Christiansen/Walther 1986, S. 295). Sowohl Standardbeispiele zu Aufgabentypen als auch diesbezügliche Übungen können dem Schulbuch entnommen werden (vgl. Christiansen/Walther 1986, S. 293). Aus Gründen der Arbeitsökonomie wird diese Stellung auch erhalten bleiben. Gerade auch differenzierende und auf selbständiges Lernen und Üben gerichtete Unterrichtformen machen eine Vielzahl von Übungsaufgaben und Problemstellungen notwendig, auf die der Lehrer schnell und situationsgerecht zugreifen kann. Dennoch weisen die nicht zufriedenstellenden Ergebnisse internationaler Vergleichsstudien auch darauf hin, dass das dominierende Unterrichtsmittel zu wenig auf eine ausgewogene Förderung der Schüler ausgerichtet ist und das kalkülhafte Arbeiten mehr als anspruchsvolle Kompetenzen wie das Argumentieren und Problemlösen unterstützt. „Trotz einiger motivationsorientierter Verbesserungen" (Bruder 2000, S. 71) berücksichtigt das Aufgabenangebot in Schulbüchern unterschiedliche Aufgabentypen, insbesondere anspruchsvolle Umkehr- oder Problemaufgaben, noch nicht ausreichend (vgl. Bruder 2000, S. 71). Offene Fragestellungen treten in gängigen Schulbüchern in der Regel kaum auf (vgl. Dockhorn 2000). Dockhorn (2000) zeigt Wege auf, wie Fragestellungen aus Lehrbüchern verändert, auch aufgewertet werden können, wobei es ihm vor allem darum geht, diese Aufgaben zu öffnen (vgl. Wiegand/Blum 1999).

Auch bei der Suche nach Aufgaben, die zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen geeignet sind, können Schulbücher hilfreich sein. Neben der Öffnung der Aufgaben, die in vielen Fällen nötig sein wird, um heuristische Aktivitäten anzuregen, sind zur Konstruktion von Aufgaben für den speziellen Zweck der Beurteilung vielseitiger mathematischer Kompetenzen weitere Analyse- und ggf. anschließende Modifikationsschritte erforderlich. Mit dem dafür in dieser Arbeit entwickelten Analyseinstrument wird in Abschnitt 2.3.2 exemplarisch eine Lehrbuchaufgabe analysiert und zielgerichtet modifiziert.

Eine weitere Quelle für Aufgaben zur Beurteilung mathematischer Aktivitäten sind Materialien, die zur Umsetzung der Bildungsstandards entwickelt wurden, vor allem dann, wenn sie eine objektive Analyse wichtiger Aufgabenmerkmale und Anforderungen, wenigstens in Ansätzen, einschließen. Dies ist zum Beispiel bei den kommentierten Aufgabenbeispielen der Bildungsstandards (KMK 2004, KMK 2005) der Fall, bei denen einbezogene mathematische Kompetenzen und zugehörige Anforderungsniveaus benannt, wenn auch nicht näher beschrieben werden. Gleiches gilt für die umfangreiche Aufgabensammlung in Blum et al. 2006 (S. 207ff.). In einer eigenen Arbeit (Risse 2006b) zur Unterstützung der Umsetzung der Bildungsstandards und des neuen Berliner Rahmenlehrplans für die Sekundarstufe I wurden Aufgaben hinsichtlich ihrer Anforderungen bezüglich der einbezogenen allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards beschrieben und Hinweise zur Umsetzung der Aufgaben im Unterricht gegeben.

In zahlreichen weiteren Veröffentlichungen finden sich Aufgaben, die geeignet sind, spezifische Kompetenzen zu entwickeln, wovon im Folgenden nur einige Beispiele gegeben werden können. Eine Analyse dieser Aufgaben mit den in 2.2 zusammengestellten Entscheidungskriterien deckt auf, ob sie auch zur Beurteilung derartiger Kompetenzen geeignet sind. Aufgabenbeispiele zu allen „vier Qualitäten mathematischen Arbeitens“ stellt Lechner 2002 (S. 255ff.) vor.

Verschiedenartige Aufgaben mit Schwerpunkt auf der Argumentation finden sich bei Bürger (2000). Bei den Erläuterungen zu einigen Aufgaben wird auch auf Schüleraktivitäten und Anforderungen eingegangen. Neben argumentativen Tätigkeiten werden von diesen Aufgaben auch die anderen Aktivitätsbereiche einbezogen. Da Argumentieren vom Herstellen von Beziehungen zwischen Sachverhalten gekennzeichnet ist (vgl. Bürger 2000, S. 33), sind mit argumentativen Aktivitäten vor allem auch heuristisch-experimentelle Aktivitäten verbunden. Interessante Argumentationsaufgaben mit „gezielten Trugschlüssen“ stellt Hanisch (1985, S. 140) vor. Jahnke (2002) entwickelt eine „begründende Unterrichtseinheit zur Einführung in die Analysis“ (Klasse 11). Beispiele unterschiedlichster Argumentations- und Beweisaufgaben finden sich auch bei Fischer und Malle (1985, S. 178ff.).

Offene Aufgaben sind, ebenso wie Aufgaben die direkt zur Förderung von Problemlösestrategien konstruiert wurden, geeignet, heuristische Kompetenzen zu fördern. Auch bei diesen Aufgaben werden aber häufig mehrere, wenn nicht sogar alle, Kompetenzbereiche verknüpft: Darstellungen, formale Tätigkeiten und Argumentationen sind häufig in die Problemlösung integriert. Auf Grund der großen Bedeutung offener Aufgaben für die Unterrichtsqualität (vgl. 2.2.1) gibt es zahlreiche mathematikdidaktische Veröffentlichungen mit Beispielen offener Aufgaben und Anregungen zum Öffnen von Aufgaben, z. B. Herget 2000, Dockhorn 2000, Wiegand/Blum 1999, Bruder 2000, Büchter/Leuders 2005 (S. 88ff.), Schulz 2000. Auch dabei bleibt zu prüfen, ob diese Aufgaben Kriterien an Beurteilungsaufgaben erfüllen. Vor allem bei sehr offenen Fragestellungen ergibt sich häufig eine Diskrepanz zu den Kriterien an Aufgaben zu Beurteilungszwecken, insbesondere bzgl. der Erwartungstransparenz und der Validität (vgl. dazu auch die Aufgabenanalysen in den

Kapiteln 4 und 5). In der Rubrik „Die etwas andere Aufgabe“ der Zeitschrift „mathematik lehren“ werden Aufgaben vorgestellt, die höhere Fähigkeiten, wie z. B. schöpferische, beschreibende, begründende und beurteilende Fähigkeiten ansprechen und dennoch auch für Klausuren und Klassenarbeiten geeignet gehalten werden (vgl. Herget 1996, S. 53). Unter dem Motto „Weg vom Kalkül – hin zum Analysieren, Interpretieren und Argumentieren“ stellt Althoff (2001) Prüfungsaufgaben für die Jahrgangsstufen 9 bis 13 zusammen, die sich auf vielseitige Fähigkeiten beziehen. Weitere Beispiele für anspruchsvolle und vielseitige „Aufgaben zum Leisten“ finden sich bei Büchter und Leuders 2005.

Werden zur Umsetzung bestimmter Unterrichtsziele keine geeigneten Aufgaben gefunden, gibt es nur die Möglichkeit, solche selbst zu entwickeln. Christiansen und Walther (1986, S. 295) sehen in der eigenständigen Konstruktion von Aufgaben eine gute Gelegenheit für den Lehrer zum Thema Aufgaben und Aktivitäten in der komplexen Situation des Unterrichts dazuzulernen, was vor allem auf die unmittelbaren Rückmeldungen aus den Schülerarbeiten zurückzuführen ist. Der Lehrer kann beobachten, ob die Aktivitäten bei der Umsetzung der Aufgabe seinen Erwartungen entsprechen (vgl. Kapitel 5). In Abschnitt 2.3.3 wird exemplarisch eine Aufgabe, mit dem Ziel der Anregung vielseitiger und anspruchsvoller Kompetenzen konstruiert.

### 2.3.2 Exemplarische Analyse und Modifikation einer Lehrbuchaufgabe

An dieser Stelle wird exemplarisch eine Lehrbuchaufgabe hinsichtlich ihrer Eignung zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen geprüft. Für die Auswahl der Aufgabe werden die entscheidenden Faktoren des Analysemodells untersucht. Analysen der charakterisierenden Merkmale, insbesondere der kompetenzspezifischen Anforderungen, welche zur Reflexion der Umsetzung und der Beurteilungsergebnisse notwendig sind, werden in Kapitel 5 vorgenommen. Vollständige Aufgabenanalysen befinden sich außerdem in Anhang 1.3 und Anhang 2.

Beispiel 1a:
Analyse der Aufgabe „Absorption von Licht“ (ursprüngliche Aufgabe)
Quelle: Analysis Leistungskurs. Berlin 1997: Volk & Wissen, S. 77

Aufgabenstellung

Dringt Licht in Wasser ein, so verliert es mit zunehmender Wassertiefe durch Absorption an Intensität. In reinem Meerwasser nimmt die Lichtintensität pro Meter um ca. 75 % des bis dahin verbliebenen Wertes ab.

a) Beschreiben Sie den Vorgang mit einer geometrischen Folge.
b) Wie viel Prozent der ursprünglichen Intensität sind in 1 m, 2 m, 3 m Wassertiefe noch vorhanden?
c) In welcher Tiefe beträgt die Lichtintensität nur noch 1/1000 des ursprünglichen Wertes?

Bedingungen auf Grund der Beurteilungssituation

Validität

Der Schwerpunkt liegt auf formal-operativen Aktivitäten. Um diese ausführen zu können, ist das physikalische Phänomen in eine geometrische Folge zu übersetzen, wozu der Text verständig gelesen, analysiert und interpretiert werden muss. In Folge der Beschränkung auf darstellend-interpretative und formal-operative Kompetenzen spiegelt die Aufgabe nicht die breiten Kompetenzanforderungen an den Mathematikunterricht wider.

Gerechtigkeit

Verständlichkeit: Die Aufgabenstellung ist überwiegend in der Sprache des Kontextes formuliert, enthält physikalische Begriffe. Diese (Absorption, Intensität) sind Schülern der gymnasialen Oberstufe in aller Regel bekannt, überwiegend sogar aus dem Alltag. Den mathematischen Begriff der geometrischen Folge kennen die Schüler, so ist die Aufgabe gedacht, aus den vorhergehenden Stunden der Stoffeinheit Reelle Zahlenfolgen. Prozentsätze sind den Schülern spätestens seit der achten Klasse vertraut.

Erwartungstransparenz: Alle Aufforderungen werden direkt formuliert. Die Aufforderung des Beschreibens anhand einer geometrischen Zahlenfolge ist jedoch irreführend, da gemeint ist, das in der Aufgabenstellung beschriebene physikalische Phänomen in die formale Darstellung zu übersetzen.

Ergebnis und Produktorientierung: Dieser Aspekt wird durch explizite Teilaufgaben erfüllt. Die Aufgabe ist sogar ergebniszentriert, da kaum prozessbezogene Aktivitäten einbezogen werden.

Schwierigkeit: Zur Lösung der Aufgabe ist Verständnis des Begriffs der geometrischen Zahlenfolge notwendig, was die Schüler in den vorhergehenden Stunden erworben haben sollten. Alle notwendigen algebraischen Umformungen und Berechnungen entsprechen Routineoperationen der Sekundarstufe I. Die Anforderungen sind für einen Leistungskurs oder einen mathematisch profilierten Kurs gering und nur angemessen, wenn es sich um eine erste Übung zum Konzept der geometrischen Zahlenfolge handelt.

Möglichkeit individueller Wege (Offenheit)

Teilaufgabe a) wird methodisch eingeschränkt durch die Vorgabe, eine geometrische Folge zu verwenden. Die Teilaufgaben b), c) sind nicht methodisch eingeschränkt, lassen aber auf Grund ihrer formalen Fragestellungen den Schülern wenig Spielraum für eigene Wege.

Bedingungen durch Anspruch an Aufgabenqualität

Individuelle und gesellschaftliche Bedeutung: Der physikalische Kontext hat gesellschaftliche Bedeutung und kann bei den Schülern, wenigstens bei einigen, Interesse hervorrufen. Es wird deutlich, dass das wichtige mathematische Konzept der geometrischen Zahlenfolge auch außermathematisch anwendbar ist. Auf Grund der starken methodischen Einengung, die keine eigenständige Modellierung zulässt, ist die Aufgabe methodisch weder bedeutsam noch interessant.

kognitive Forderung: Die Aufgabe stellt für Schüler eines Leistungskurses keine kognitive Forderung dar: Die Zuordnungsvorschrift für geometrische Zahlenfolgen ist heranzuziehen, um die Daten der Aufgabenstellung einzusetzen. Alles andere sind numerische Berechnungen und algebraische Operationen geringer bis mäßiger Schwierigkeit. Es werden kognitive Fähigkeiten höchstens bis zur Stufe des Analysierens notwendig.

Kriterien verbunden mit dem Ziel des Ansprechens vielseitiger mathematischer Kompetenzen

Darstellend-interpretative Aktivitäten: im Kontext gegebene Daten in die symbolische Sprache übersetzen, formal darstellen

Heuristisch-experimentelle Aktivitäten: Zusammenhänge zwischen den Angaben der Aufgabenstellung und den Parametern der allgemeinen Zuordnungsvorschrift geometrischer Zahlenfolgen herstellen

Formal-operative Aktivitäten: algebraische Umformungen und Berechnungen ausführen

Kritisch-argumentative Aktivitäten: keine

Fazit der Analyse der entscheidenden Faktoren

Die Schulbuchaufgabe erfüllt die Anforderungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen nicht zufriedenstellend. Dies liegt zum einen an der Vorgabe des mathematischen Modells „geometrische Zahlenfolge“, was bewirkt, dass kaum heuristische Aktivitäten notwendig sind, sondern mit Kenntnis der Zuordnungsvorschrift für geometrische Zahlenfolgen die Aufgabe praktisch gelöst ist. Das Aktivitätsspektrum der Aufgabe ist dadurch eng. Außerdem sind die kognitiven Anforderungen der Aufgabe für einen Leistungskurs und die profilierten elften Klassen der schulpraktischen Erprobung (vgl. Kapitel 4 und 5) zu gering. Wichtige mathematische Konzepte der Unterrichtsreihe „Reelle Zahlenfolgen“, wie das Konzept der Monotonie oder des Grenzwertes, werden nicht einbezogen. Diese Schwachstellen sollen durch die folgende Modifikation beseitigt, der interessante Kontext aber beibehalten werden.

Beispiel 1b:
Analyse der Aufgabe „Absorption von Licht“ (modifizierte Aufgabe)

Aufgabenstellung[61]

Dringt Licht in Wasser ein, so verliert es mit zunehmender Wassertiefe durch Absorption an Intensität. In einem Gewässer wurde gemessen, dass die Lichtintensität pro Meter um ca. 75 % des bis dahin verbliebenen Wertes abnimmt.

a) Beschreiben Sie diesen physikalischen Vorgang mit Hilfe einer Zahlenfolge.
b) Untersuchen Sie Monotonie und Konvergenz dieser Folge. Werten Sie Ihre Ergebnisse in Bezug zur physikalischen Realität. Ist das Modell geeignet?
c) Wie viel Prozent der ursprünglichen Intensität sind in 1 m, 2 m, 3 m Wassertiefe noch vorhanden?
d) In welcher Tiefe beträgt die Lichtintensität erstmals weniger als 1/1000 des ursprünglichen Wertes?

[61] Eine mögliche Lösung zu dieser Aufgabe wird in 3.2.2 vorgestellt.

Bedingungen auf Grund der Beurteilungssituation

Validität

Die Notwendigkeit des Textverständnisses zum Lösen der Aufgabe bleibt in der modifizierten Fassung erhalten. Das grundlegende Verständnis der physikalischen Vorgänge wird noch bedeutender, da es nicht nur für die Übersetzung in ein mathematisches Modell sondern auch für die Bewertung des Modells in Verbindung mit der Realität erforderlich ist. Der Schwerpunkt der mathematischen Aktivitäten liegt nicht mehr auf formal-operativen Aktivitäten, sondern alle vier Aktivitätsbereiche werden (ausgewogen) einbezogen und somit Kompetenzanforderungen an das Fach Mathematik umfassender berücksichtigt.

Gerechtigkeit

Verständlichkeit: Die Verständlichkeit der Aufgabenstellung bleibt erhalten, vorausgesetzt die Schüler haben die Begriffe Monotonie und Konvergenz in den vorangegangen Stunden kennen gelernt und angewendet.

Erwartungstransparenz: Aufforderungen werden explizit formuliert. Wichtig für die Erwartungstransparenz ist, dass die Schüler die Anforderungen an eine angemessene Untersuchung der Monotonie und der Konvergenz und an die Darlegung einer solchen Untersuchung aus dem Unterricht kennen, was zum Zeitpunkt der Aufgabenstellung der Fall sein sollte. Problematisch ist möglicherweise die Aufforderung zum Bewerten, wenn die selbständige schriftliche Formulierung einer Bewertung für die Schüler eine neuartige Anforderung ist. Aus ihrem Alltag und aus anderen Unterrichtsfächern sollten sie jedoch eine Vorstellung von einer Bewertung haben und sich ableiten können, dass die Begründung der Einschätzung hier mit mathematischen Argumenten erfolgen muss.

Ergebnisorientierung: Die Ergebnisorientierung der ursprünglichen Aufgabe bleibt erhalten, jedoch nicht die Ergebniszentrierung, da prozessorientierte Aktivitäten einbezogen werden. Es ist von einer nachvollziehbaren Darstellung abhängig, ob die Untersuchungen oder die Bewertung in Teilleistungen separiert und diese honoriert werden können.

Schwierigkeit: Die Schwierigkeit wurde gegenüber der herkömmlichen Aufgabe erhöht, da komplexere mathematische Konzepte der Sekundarstufe II und kognitive Fähigkeiten bis zur höchsten Stufe des Evaluierens einbezogen werden. Sie wird für einen Leistungskurs als angemessen eingeschätzt, wenn die mathematischen Konzepte aus dem Unterricht bekannt sind. [62]

Möglichkeit individueller Wege (Offenheit)

Heuristisch und argumentativ geprägte Teilaufgaben machen individuelle Wege möglich. Insbesondere Analyse und Bewertung des verwendeten Modells lassen individuelle Herangehens- und Darstellungsweisen zu. Die Schüler sind außerdem gefordert selbst ein mathematisches Modell zu entwickeln, wenn auch innerhalb des Bereichs der Zahlenfolgen. Hierzu gibt es unterschiedliche Ansätze. Naheliegend ist ein exemplarisches Vorgehen: Bestimmen einiger Folgenglieder und Verallgemeinern zur Zuordnungsvorschrift. Ebenso können die Schüler aus dem Kontext schließen, dass es sich um eine geometrische Zahlenfolge handeln muss und die allgemeine Zuordnungsvorschrift dieser Folgen anwenden.

<u>Bedingungen durch Anspruch an Aufgabenqualität</u>

Individuelle und gesellschaftliche Bedeutung: Die Bedeutung durch den Kontext ist unverändert. Hinzu kommt eine methodische Bedeutung, denn die Schüler wenden zum einen wichtige und gesellschaftlich relevante Methoden der Sekundarstufe II, wie Untersuchungen auf Konvergenz und Monotonie, an. Zum anderen hat die eigenständige Modellierung und die Bewertung des Modells durch Vergleich mit der Realität allgemeine Bedeutung.

Kognitive Forderung: Die eigenständige Modellierung, die Untersuchung auf Monotonie und Konvergenz und die Analyse und Bewertung des Modells erhöhen die kognitiven Anforderungen auf Grund der erhöhten Anforderungen bezüglich mathematischer Konzepte. Kognitive Fähigkeiten bis zur Stufe des Evaluierens werden einbezogen.

<u>Kriterien verbunden mit dem Ziel des Ansprechens vielseitiger mathematischer Kompetenzen</u>

Heuristisch-experimentelle Aktivitäten: mathematisches Modell entwickeln (Zusammenhänge herstellen, analysieren, verallgemeinern, ...), geeignete Strategien zur Untersuchung von Monotonie und Konvergenz finden, Argumente zur Bewertung des Modells wählen, Beziehungen zwischen physikalischem Kontext und mathematischem Modell analysieren

---

[62] Für die Schüler der Untersuchungsklasse stellten die Übersetzung in die mathematische Darstellung und die Lösung auf mathematischer Ebene keine Schwierigkeiten dar. Bezüglich der Wertung gab es im Wesentlichen zwei Standpunkte: Einige Schüler hielten das Modell für realistisch. Einige Schüler hielten das Modell nicht für geeignet, da es Dichte- und Temperaturänderungen mit zunehmender Tiefe nicht berücksichtigt. Dabei wurde deutlich, dass es für die Schüler ungewohnt war, mathematische Strukturen physikalischen Eigenschaften gegenüber zu stellen. Einigen Schülern gelang keine Argumentation.

Darstellend-interpretative Aktivitäten: in die symbolische Sprache übersetzen, formal darstellen, Zusammenhänge verbal beschreiben, evtl. auch graphisch veranschaulichen

Formal-operative Aktivitäten: algebraische Operationen und Berechnungen ausführen, formale Verfahren ausführen

Kritisch-argumentative Aktivitäten: Schlussfolgerungen ziehen, mathematisch argumentieren, bewerten

Fazit der Analyse der entscheidenden Faktoren

Die modifizierte Aufgabe erfüllt im Wesentlichen die Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen, Die Einwende bezüglich der Gerechtigkeit entfallen, wenn die Schüler bereits selbständig modelliert und mathematische Modelle bewertet sowie Monotonie und Konvergenz einfacher Folgen analysiert haben.

Anmerkung: Anliegen der Aufgabe ist es auch Grundkenntnisse der Schüler zum Thema Zahlfolgen zu prüfen. Es ist deshalb nicht möglich, eine völlig eigenständige Modellierung zuzulassen. Diese Einschränkung kann und sollte im Anschluss an die Bearbeitung diskutiert werden. Bei der Bewertung des diskreten Modells der Zahlenfolge wird deutlich werden, dass das kontinuierliche Modell der Exponentialfunktion geeigneter ist und deshalb in Physik und Chemie Anwendung findet (Lambert-Beersches Gesetz). Der Kontext kann in der Differenzialrechnung aufgegriffen und das physikalische Gesetz abgeleitet werden.

### 2.3.3 Exemplarische kriteriengeleitete Entwicklung einer Aufgabe

In der Unterrichtssequenz „Lineare Gleichungssysteme" der Sekundarstufe II dominieren häufig kalkülhafte Anforderungen. Im Mittelpunkt steht in der Regel das sichere Beherrschen des Gaußalgorithmus. Durch die gezielte Konstruktion von Aufgaben können jedoch die inhaltlichen Anforderungen der Einheit mit der Förderung allgemeiner mathematischer Kompetenzen verbunden werden. Umkehraufgaben bieten nicht nur die Möglichkeit des verständnisorientierten Übens und der Diagnose echten Verstehens (vgl. Büchter/Leuders 2005, S. 95) sondern sie zeichnen sich gegenüber den Grundaufgaben auch durch eine erhöhte Offenheit aus (vgl. Büchter/Leuders 2005, S. 95, Bruder 2000, S. 70, Herget 2000, S. 8). Für Umkehraufgaben gibt es im Regelfall kein Standardlösungsverfahren, mehrere Möglichkeiten führen zum Ziel bzw. zum mathematischen Ausgang: z. B. systematisches Probieren, analytisches Vorgehen/Rückwärtsarbeiten. Kognitionspsychologisch gesehen ist eine Barriere zu überwinden (vgl. Neubrand, J. 2002, S. 127), weshalb Umkehraufgaben zur Förderung und Beurteilung heuristischer Kompetenzen geeignet sind. Ambrus und Schulz (2002, S. 72/73) geben Anregungen, wie mit Umkehraufgaben zum Lösen von Gleichungen und Linearen Gleichungssystemen nicht nur äquivalente Umformungen in vielfältigster Weise geübt werden können, sondern auch auf die Problemlösestrategie „Rückwärtsarbeiten“ aufmerksam und ein automatisch verwendetes Verfahren bewusst gemacht werden kann. Eine anspruchsvolle Umkehraufgabe zur Lösung eines linearen Gleichungssystems in der Sekundarstufe I (Angabe einer zweielementigen Lösungsmenge) findet sich bei Herget 2000 (S. 8). Hier wird eine Umkehraufgabe zur in der Sekundarstufe II dominierenden Grundaufgabe des Lösens von Gleichungssystemen mit drei Unbekannten vorgestellt. Das Auftreten eines Parameters in der Lösungsmenge kann eine zusätzliche (heuristische) Anforderung darstellen.

Beispiel 2:
Analyse der Aufgabe „Lineares Gleichungssystem gesucht“

Aufgabenstellung

Die Menge $L=\{(1+2t, -1, 2+t);\ t \in IR\}$ ist Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems. Wie könnte das lineare Gleichungssystem lauten? Geben Sie zwei Möglichkeiten an.

Bedingungen auf Grund der Beurteilungssituation

Validität

Der Schwerpunkt der Aufgabe liegt auf heuristisch-experimentellen Aktivitäten, da ein Ansatz für eine den Schülern ungewohnte Aufgabenstellung zu finden ist. Eine Lösung kann jedoch nicht gefunden werden, wenn die Schüler die formale Darstellung der Lösungsmenge nicht interpretieren können. Außerdem können die heuristischen Kompetenzen nur beurteilt werden, wenn die Lösungsfindung (nachvollziehbar) dargelegt wird. Weitere Kompetenzen, formal-operative und darstellend-interpretative, können in der Regel nur beurteilt werden, wenn ein Zugang gelingt. Die beurteilbaren Kompetenzen finden sich in den Bildungsstandards (KMK 2004) und den EPA (KMK 2002) wieder. Über diese wichtigen Kompetenzen des Mathematikunterricht hinaus kann beurteilt werden, ob der Schüler das Konzept der linearen Gleichungssysteme, insbesondere den Zusammenhang zwischen Lösungsmenge und Eigenschaften des Gleichungssystems verstanden hat.

Gerechtigkeit

Verständlichkeit: Die Aufgabenstellung ist verständlich, wenn den Schülern die verwendeten mathematischen Begriffe und die symbolische Darstellung der Lösungsmenge vertraut sind.

Erwartungstransparenz: Die genannten Kompetenzen können nur aus einer ausreichend ausführlichen und nachvollziehbaren Darstellung des Lösungsweges erschlossen werden. Die Schüler sollten diese Anforderung gewohnt sein. Anderenfalls ist eine direkte Aufforderung zur Darstellung des Lösungsweges notwendig.

Ergebnisorientierung: Beide Teilaufgaben setzen sich aus einer Reihe von Lösungsschritten zusammensetzen. Die Separation und Würdigung von Teilleistungen ist aber ebenfalls an eine explizite Dokumentation derselben gekoppelt.

Schwierigkeit: Sind alle mathematischen Elemente den Schülern bekannt, liegen die Schwierigkeiten hier eindeutig bei den methodischen Anforderungen. Das Lösen einer Umkehraufgabe kann auch für Schüler leistungsstarker Lerngruppen eine neuartige Herausforderung sein.

Möglichkeit individueller Wege (Offenheit)

Die Aufgabe ist methodisch offen. Individuelle Herangehensweisen sind möglich und nötig, da es für Umkehraufgaben in der Regel kein Standardlösungsverfahren gibt. Wie für Umkehraufgaben allgemein beschrieben, ergeben sich Lösungsansätze auf unterschiedlichen kognitiven Niveaus, hier z. B. systematisches Probieren, Ausnutzen der allgemeinen Darstellung einer Lösungsmenge oder das algebraische Eliminieren des Parameters.

Bedingungen durch Anspruch an Aufgabenqualität

Individuelle und gesellschaftliche Bedeutung: Lineare Gleichungssysteme stellen ein mächtiges und vielseitiges mathematisches Modell dar. Bedeutung kann der Aufgabe aber auch dadurch zugemessen werden, dass exemplarisch das Herangehen an Umkehraufgaben diskutiert wird.

Kognitive Forderung: Die Aufgabe sollte auch für Schüler eines Leistungskurses oder eines profilierten Kurses eine Herausforderung darstellen. Sie kann nur gelöst werden, wenn das Konzept der linearen Gleichungssysteme mit einparametrigen Lösungsmengen verstanden wurde. Anspruchsvolle Fähigkeiten, wie Analysieren und Synthetisieren, werden erforderlich.

Kriterien verbunden mit dem Ziel des Ansprechens vielseitiger mathematischer Kompetenzen

Darstellend-interpretative Aktivitäten: die formale Darstellung der Lösungsmenge interpretieren, formal darstellen, evtl. Zusammenhänge verbal beschreiben

Heuristisch-experimentelle Aktivitäten: Zusammenhänge zwischen den Komponenten der Lösungsmenge und den Variablen des linearen Gleichungssystems herstellen, Verbindungen zwischen Lösungsmenge und Form des Ausgangssystems ziehen, eine geeignete Herangehensweise finden, systematisch probieren

Formal-operative Aktivitäten: algebraische Umformungen ausführen, evtl. Gaußalgorithmus ausführen (Probe)

Kritisch-argumentative Aktivitäten: evtl. die möglichen Lösungen prüfen und bewerten

Fazit der Analyse der entscheidenden Kriterien

Die Aufgabe erfüllt die Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen, vorausgesetzt die Schüler sind mit der Lösung linearer Gleichungssysteme und der formalen Darstellung der Lösungsmenge vertraut.

Die Aufgabenanalyse zeigt, dass die konstruierte Aufgabe geeignet ist, das Konzept der linearen Gleichungssysteme zu überprüfen. Dabei beschränkt sie sich nicht nur auf das Ausführen dieses Routineverfahrens, sondern bezieht vielseitige mathematische Aktivitäten ein. Aus den Erfahrungen der Erprobung[63] wurde jedoch deutlich, dass auch mit dem Aufgabentyp eine Schwierigkeit verbunden sein kann (vgl. Problemlösecharakter der Aufgabe, 2.2.2). Deshalb sollte die Aufgabe nur zur Leistungsbeurteilung eingesetzt werden, wenn die Schüler bereits eigenständig Umkehraufgaben bearbeitet haben.

[63] Die Schüler der Untersuchungsklasse hatten Schwierigkeiten einen Zugang zu dieser Aufgabe zu finden, obwohl sie sowohl die Kenntnisse bezüglich linearer Gleichungssysteme als auch heuristische Kompetenzen besaßen, was sie an anderen Aufgaben zeigten. Die Ursachen werden darin gesehen, dass ihnen Umkehraufgaben fremd waren. Aber auch der Zusammenhang zwischen den Komponenten der Lösungsmenge und den Variablen des Linearen Gleichungssystems konnte selten hergestellt werden.

# 3 Ein Konzept zur differenzierten Beurteilung und Rückmeldung mathematischer Kompetenzen

Im ersten Kapitel dieser Arbeit wurden Kriterien für eine kompetenzorientierte Leistungsbeurteilung zusammengestellt (1.5.2). Im zweiten Kapitel wurden Kriterien für Aufgaben erarbeitet, die zur differenzierten Analyse mathematischer Kompetenzen geeignet sind. Darauf aufbauend wird in diesem Kapitel ein Gesamtkonzept der differenzierten Beurteilung und Rückmeldung mathematischer Kompetenzen entwickelt. Jede Beurteilungsform kann mit ihren spezifischen Methoden und Rahmenbedingungen nur einen Ausschnitt der vielseitigen Kompetenzen des erweiterten Leistungsbegriffs ansprechen. Deshalb gilt es zunächst den Rahmen für das Konzept der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen abzustecken. Anschließend werden die Abschnitte des Beurteilungsprozesses beschrieben sowie an Beispielen für die Sekundarstufe II konkretisiert und veranschaulicht. Schließlich soll die Eignung des erstellten Konzepts anhand der Kriterien einer kompetenzorientierten Leistungsbeurteilung (vgl. 1.5.2) geprüft werden.

## 3.1 Abgrenzung des Beurteilungsgegenstandes

Das Beurteilungskonzept kann grob wie folgt beschrieben werden: Die Schüler zeigen bei der schriftlichen Bearbeitung mathematischer Aufgaben vielseitige mathematische Kompetenzen, die differenziert und systematisch erfasst und beurteilt und in differenzierter und individueller Form zurückgemeldet werden. Diese Beschreibung deutet auf einen breiten Rahmen der Leistungsbeurteilung (z. B. häufige Beurteilungsanlässe, vielseitige Kompetenzen) hin, aber dennoch auch auf eine deutliche Einschränkung des Konzeptes (z. B. schriftliche Bearbeitungen, Individualleistungen). Anhand gegebener diagnostischer Möglichkeiten können grundsätzlich nur Ausschnitte von Lernprozessen erfasst werden, weshalb es für jedes Instrument der Analyse von Lernprozessen von Schülern erforderlich ist, „bestimmte Aspekte und Arbeitsweisen auszuwählen, diese Wahl theoriegeleitet zu begründen und die gewählte Perspektive präzise zu beschreiben“ (Prengel 2006, S. 26). In diesem Abschnitt erfolgt die Auswahl und Begründung der Aspekte und Methoden für das Konzept der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen.

### 3.1.1 Abgrenzung des Kompetenzbereiches

Im Sinne eines erweiterten Lernbegriffs soll Leistungsbewertung nicht nur fachlich-inhaltliche sondern ebenso methodisch-strategische, sozial-kommunikative und personale Leistungen einbeziehen (vgl. Grunder/Bohl/Broszat 2001, S. 45, Bohl 2001). Zwischen diesen Bereichen gibt es neben zahlreichen Überschneidungen auch wesentliche Unterschiede. Die Übertragung einer in einem Lernbereich etablierten Beurteilungsform auf andere Lernbereiche ist deshalb nicht sinnvoll und oft nicht möglich. Für die Förderung aber auch für die Beurteilung bestimmter Kompetenzen sind angepasste spezifische Methoden notwendig. Bei der Entwicklung eines erweiterten Beurteilungskonzeptes ist es deshalb wichtig, zu klären, auf welche Kompetenzen sich das Konzept beziehen soll.

In dieser Arbeit wird ein Beurteilungskonzept für mathematische Kompetenzen entwickelt, der Schwerpunkt der Beurteilung liegt auf fachlich-inhaltlichen und methodisch-strategischen Kompetenzen. Da „neue Beurteilungsformen“ oft auf nicht-fachlich-inhaltliche Leistungen bezogen werden (vgl. Grunder/Bohl/Broszat 2002, S. 45, Grunder/Bohl 2001, S. 18), ist an dieser Stelle die Konzentration auf scheinbar gut durch traditionelle Beurteilungsformen abgedeckte Leistungen (vgl. Grunder/Bohl 2001 S. 18, Bohl 2001, S. 18/19) zu begründen:

1. Die traditionellen Formen der Leistungsbeurteilung werden den aktuellen Anforderungen, auch an fachlich-inhaltliche Kompetenzen nicht gerecht. Insbesondere ist das in herkömmlichen Klassenarbeiten verwendete Aufgabenspektrum zu eng, um das breite Spektrum wichtiger mathematischer Kompetenzen abzudecken (vgl. 1.5, Leuders 2006, S. 79/80, Leuders 2004, S. 64/65).
2. Fachliche Kompetenzen geben die Grundlage für die Entwicklung allgemeinerer Kompetenzen bzw. allgemeine Kompetenzen können nur zusammen mit der Vermittlung inhaltlichen Wissens erworben werden (vgl. Weinert 1999, S. 29).
3. Fachliche Kompetenzen können wiederum nur gezeigt werden, wenn die dafür notwendigen allgemeinen Kompetenzen (z. B. Beharrlichkeit, Selbstkontrolle) vorhanden sind. Unter Umständen können Kompetenzen wie Konzentrationsfähigkeit, Durchhaltevermögen, Textverstehen, sprachliche Ausdrucksfähigkeit nicht einmal von der Fachleistung getrennt werden (vgl. Arnold/Jürgens 2001, S. 75). Innerhalb der Förderung mathematischer Kompetenzen kann deshalb auch auf Kompetenzen des erweiterten Lernbegriffs eingewirkt bzw. auf Abhängigkeiten hingewiesen werden.

Die Bildungsstandards geben den Rahmen für das, was fachliche Förderung und somit auch fachliche Leistungsbeurteilung einbeziehen sollte. Die dort genannten Kompetenzbereiche haben sowohl eine fachgebundene als auch eine allgemeinbildende Komponente. Im Beurteilungskonzept dieser Arbeit wird eine Differenzierung in die vier Aktivitätsbereiche heuristisch-experimentell, darstellend-interpretativ, formal-operativ und kritisch-argumentativ nach Lechner (2002, S. 255ff.) vorgenommen (vgl. 1.3). Diese berücksichtigt die von den Bildungsstandards geforderten mathematischen Kompetenzen, wichtige fachliche Aspekte sowie wichtige Lernziele des Mathematikunterrichts, insbesondere die allgemeinen Lernziele von Winter (1975), wie in 1.3.2 gezeigt wurde. Als fünfte Komponente wird das mathematische Grundwissen der Schüler beurteilt, da keine der mathematischen Kompetenzen ohne das notwendige Grundwissen gezeigt werden kann: „Jedes sinnerfüllte Lernen erfordert auf Seiten des Lernenden eine inhaltlich relevante Vorwissensbasis. Neue Informationen können weder in ihrer aufgabenspezifischen Bedeutsamkeit beurteilt, noch in ihrer inhaltlichen Besonderheit produktiv verarbeitet werden, ohne dass der Lernende dabei auf verfügbares Wissen zurückgreifen muss“ (Weinert 1999, S. 27). Jegliche Problemlösung, Modellierung, Argumentation wird nur möglich sein, wenn das notwendige (bereichspezifische) Grundwissen vorhanden ist.

Damit kann der berücksichtigte Kompetenzbereich wie folgt zusammengefasst werden:

Tab. 3/1: Komponenten des Konzeptes zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

| Grundwissen (GW) | | | |
|---|---|---|---|
| heuristisch-experimentelle Kompetenzen (HE) | darstellend-interpretative Kompetenzen (DI) | formal-operative Kompetenzen (FO) | kritisch-argumentative Kompetenzen (KA) |

### 3.1.2 Begrenzung auf Individualleistungen

Das Erfassen der mathematischen Kompetenzen erfolgt im Konzept dieser Arbeit auf der Grundlage der selbständigen Bearbeitung mathematischer Aufgaben durch einen einzelnen Schüler und beschränkt sich somit auf Individualleistungen. Es ist Anliegen des Konzeptes individuelle Kompetenzen zu erfassen und dem Schüler eine auf ihn zugeschnittene Rückmeldung zu geben, die ihn bei seinen persönlichen Lernanstrengungen unterstützt. Dafür erscheint es wichtig, den Schüler selbständig arbeiten zu lassen und den Einfluss anderer Schüler oder des Lehrers auf die dargelegte Leistung gering zu halten.

Arbeitet ein Schüler allein an einer Problemstellung, ist er gezwungen, sich auf seine eigenen Fähigkeiten zu verlassen: Entscheidungen können nicht auf andere Schüler abgeladen werden. Aktivitäten müssen selbst geplant und durchgeführt werden (vgl. Christiansen/-Walther 1986, S. 268/269). Er kann dabei erleben, dass die Ergebnisse „sein Werk" sind und er aus eigenen Kräften etwas gelernt hat (vgl. Christiansen/Walther 1986, S. 269). So ist bereits die Arbeitsform bedeutsam für das Erkennen eigener Kompetenzen.

Der Nachteil ist, dass sich die Berücksichtigung kommunikativer Kompetenzen auf die schriftliche Darlegung des Lösungsweges beschränkt, was im verwendeten System vorwiegend darstellend-interpretative und kritisch-argumentative Kompetenzen sind. Kompetenzen, welche die Zusammenarbeit zwischen Schülern betreffen, das große Spektrum der sozialen Kompetenzen und auch personale Kompetenzen, die Austausch bedingen, können auf diese Weise nicht untersucht werden. Dies ist insofern eine deutliche Einschränkung, weil kooperative Leistungen in vielen Lebensbereichen außerhalb der Schule systematisch eingefordert werden und in der Schule bereits soziales Lernen an sich einen Wert darstellt (vgl. Wollring 2006, S. 64).

Im Fall von kooperativen Lernformen erfährt das individuelle Gruppenmitglied, wie seine Leistung mit der anderer Gruppenmitglieder in Beziehung steht. Seine Lernschemata können so geändert werden und er erkennt, in welcher Weise er von Aktivitäten anderer beeinflusst wird oder selbst deren Aktivitäten beeinflussen kann (vgl. Christiansen/Walther 1986, S. 269, Tulodziecki/Herzig/Blömeke, S. 30). Diskussionen bei Aufgabenbearbeitungen in Gruppen können Begründungen der eigenen Position erfordern, die zu einem tieferen Verständnis führen (vgl. Tulodziecki/Herzig/Blömeke, S. 30). Derartige kognitive Prozesse bleiben jedoch weitestgehend verborgen. Bei gemeinschaftlichen Arbeiten kann der Lösungsanteil eines Schülers nicht anhand der schriftlichen Darlegung bestimmt werden. Dazu wäre eine lückenlose Beobachtung der Gruppe bei der Bearbeitung notwendig.

Die Vorteile individueller und sozialer Lern- und Arbeitsformen können somit nicht vereint werden, ohne auch Nachteile, speziell auch bzgl. der Leistungsbeurteilung, in Kauf zu nehmen. Dennoch ist es sinnvoll, beide Formen zu verbinden. So kann z. B. eine gemeinsame Rückschau nach der Bearbeitung einer Aufgabe einen Vergleich eigener Wege mit denen der anderen ermöglichen und eine kritische Reflexion und Einordnung der eigenen Lösung und gezeigten Kompetenzen erlauben. Neben der Selbstreflexion ist für die individuelle Konstruktion mathematischer Inhalte in sozialen Bezügen und für die Kompetenzentwicklung eine individuelle Rückmeldung der gezeigten Kompetenzen durch den Lehrer von Bedeutung (vgl. 3.3).

In Bezug auf die Entscheidung, mathematische Kompetenzen als Individualleistungen zu beurteilen, sind zwei Anmerkungen zu machen:

1. Die Festlegung wurde für die Umsetzung innerhalb der Erprobung getroffen. Prinzipiell ist die gewählte Form der Differenzierung von Kompetenzen, die Beurteilung anhand aufgaben- und kompetenzspezifischer Beurteilungskriterien sowie die differenzierte Rückmeldung anhand von Rückmeldungsbögen auch für kooperative Arbeitsformen geeignet. Wird das Konzept, wie es hier für die Beurteilung von Leistungen einzelner Schüler beschrieben wird auf die Bearbeitung mathematischer Problemstellungen in Kleingruppen übertragen, können Gruppenleistungen in differenzierter Form beschrieben werden. Sollen neben Gruppenleistungen auch individuelle Leistungen eingeschätzt werden, ist eine Beobachtung der Gruppe notwendig, um die Beiträge der einzelnen Schüler zu- und einordnen zu können. Dabei können Konzepte Anwendung finden, wie sie bereits bei der Projektarbeit eingesetzt werden (z. B. „Arbeitsprozessbericht" Bastian 1996, „Beobachtungsbögen" Paradies/Wester/Greving 2005).
2. Innerhalb der Erprobung des Konzeptes wurden die Aufgaben als Hausaufgaben bearbeitet[64]. Dadurch konnte eine Modifikation der objektiven Aufgabenanforderungen durch die Umsetzung im Unterricht (vgl. 2.1) verhindert werden. Das gilt auch für individuelle Hilfestellungen durch den Lehrer, die im Unterricht oft unvermeidbar sind. Ein weiterer Vorteil war, dass die Bearbeitung der Aufgaben von den Schülern selbständig geplant werden konnte, was auch die freie Zeiteinteilung und Auswahl von Hilfsmitteln einschloss. Diese Bedingungen kommen realen Problemsituationen nahe. Die Darlegung der individuellen mathematischen Kompetenzen wird so z. B. nicht durch Zeitknappheit verhindert. Die Rahmenbedingungen entsprechen eher den von Lernsituationen als den von Situationen des Leistens (vgl. 1.5). Der Nachteil dieser Organisationsform ist die geringe Kontrolle. Es kann nicht sicher nachvollzogen werden, ob die Schüler die Aufgaben allein lösen oder doch mit Mitschülern oder den Eltern. Die ausführliche Darlegung komplexer Lösungswege ist jedoch kaum möglich, wenn die Gedankengänge nicht selbständig nachvollzogen werden können. Dass es möglich ist, Schüler ei-

[64] Diese Umsetzung war vor allem organisatorisch verursacht, bedingt durch die Wahl der Untersuchungsgruppe: Die Schüler der Netzwerkklassen bearbeiten regelmäßig komplexe Aufgaben als Hausaufgaben. Dadurch ergaben sich häufige Beurteilungsanlässe, ohne die Unterrichtsgestaltung zu verändern.

genverantwortlich anspruchsvolle Aufgaben auch außerhalb des Unterrichts bearbeiten zu lassen, um ihre eigenen Kompetenzen zu verbessern, beschreibt auch von Saint-George (2003) in einem Erfahrungsbericht. Die z. T. sehr unterschiedlichen Lösungsansätze der Schüler bei der Erprobung, die Breite an abweichenden Dokumentationsformen und Darstellungen lässt darauf schließen, dass die Aufgaben weitestgehend selbständig bearbeitet wurden. Dem kam natürlich die Leistungsorientierung vieler Schüler mathematisch-profilierter Klassen zu Gute, die am eigenen Kompetenzaufbau, nicht (nur) an guten Noten, interessiert sind. Aber auch die Differenzierung der Beurteilung kann hier förderlich sein: Da nicht nur das Ergebnis zählt, sondern die eigenen Ideen, Argumentationen, Darlegungen, können die Schüler motiviert werden, eigene Wege zu gehen. Eine zusätzliche Absicherung kann erfolgen, wenn die Schüler regelmäßig ihre Lösungswege innerhalb einer gemeinsamen Reflexion vorstellen oder kritische Arbeiten durch Rückfragen an den Schüler beleuchtet werden. Dabei wird die Annahme zu Grunde gelegt, „dass eine authentische Vorführung nur gelingen kann, wenn auch authentische Lernprozesse dieser vorausgegangen sind“ (Arnold/Jürgens 2001, S. 74).

### 3.1.3 Erfassen aufgabenspezifischer Leistungen

Die Kontextabhängigkeit ist als wesentliches Merkmal des Kompetenzbegriffs zu sehen: „Kompetenz bezieht sich immer darauf, Anforderungen in spezifischen Situationen bewältigen zu können“ (Klieme/Leutner 2006, S. 4). Ein diagnostisches Probleme der Beurteilung anspruchsvoller (mathematischer) Kompetenzen ist, dass Resultate komplexer Aufgabenstellungen häufig nicht auf die Bearbeitung thematisch anderer Aufgaben generalisiert werden können (vgl. Arnold/Jürgens 2001, S. 75). Kompetenzen werden aber auch als Verbindung zwischen Wissen und Können gesehen und als Befähigung zur Bewältigung unterschiedlicher Situationen, weshalb die Umsetzung in Aufgaben und Tests entsprechend breit zu gestalten ist (vgl. Klieme 2004, S. 13). So verbindet sich mit dem Kompetenzbegriff, auch dem der Bildungsstandards, eine Kombination von „inhaltsübergreifend“ und zugleich „anforderungs- und situationsbezogen“ (Klieme 2004, S. 11).

Die offene Diskussion über den Allgemeinheitsgrad von Kompetenzen bleibt bei der Entwicklung, Konkretisierung und Umsetzung eines Konzeptes zur Beurteilung von (mathematischen) Kompetenzen zu berücksichtigen. Das wird durch ein Beurteilungskonzept ermöglicht, welches sich in zwei Phasen gliedert:

- aufgabengebundenes Erfassen und Rückmelden dargelegter (situationsbezogener) Kompetenzen und
- Dokumentation und Darstellung der über einen längeren Zeitraum zu verschiedenen Inhalten dargelegten Kompetenzen.

Die aufgabengebundene Beurteilung und Rückmeldung erlaubt es, die Schüler konkret an ihren Bearbeitungen ausgewählter Aufgaben auf ihre situationsbezogenen Stärken und Schwächen hinzuweisen. Die Dokumentation der Leistungen über einen längeren Zeitraum zeigt Tendenzen der Leistungsentwicklung und weist durch stabile Unterschiede zwischen Kompetenzbereichen auf individuelle situationsunabhängige Stärken und Schwächen hin.[65] Dabei ist die Anzahl der Aufgaben entscheidend für die Reliabilität der Einschätzung stabiler Kompetenzausprägungen, wie Baxter et al. (1993, S. 212) zeigten.

Der Situationsbezogenheit von Kompetenzen werden aufgabenabhängige Beurteilungskriterien gerecht. Einer Inhaltsungebundenheit würden kompetenzspezifische aber aufgabenunabhängige Beurteilungskriterien entsprechen. Für die praktische Umsetzung wurden kompetenz- und aufgabenspezifische Beurteilungskriterien formuliert, deren Struktur durch kompetenzspezifische aufgabenübergreifende Merkmale gegeben wird, die aber auch wichtige aufgabenspezifische Anforderungen widerspiegeln (vgl. 3.2).

### 3.1.4 Begrenzung auf schriftliche Bearbeitungen

Im Beurteilungskonzept dieser Arbeit wird versucht, die drei Aspekte von Leistungsbeurteilung Diagnose, Leistungsbewertung und Rückmeldung im Sinne des Kompetenzerlebens (vgl. Büchter/Leuders 2005, S. 166) zu verbinden. Die Diagnose der Fähigkeiten und Kenntnisse ist die Grundlage der Leistungsbewertung und diese trägt im Positiven wie im Negativen zum Kompetenzerleben bei. Eine qualitativ hochwertige Diagnose ist jedoch nur möglich, wenn eine ausreichende Basis dafür gegeben ist: „Differenzierte Informationen über Schülerleistungen erhält man oft nur und vor allem dann, wenn man Schülerinnen und Schülern die Gelegenheit gibt, besser noch: sie konsequent dazu auffordert, umfangreiche individuelle Produktionen anzufertigen“ (Leuders 2006, S. 80). Die vielfältigen Gedanken und Lösungshandlungen der Schüler sind der wichtigste Gegenstand förderorientierter Diagnose und deshalb sichtbar und der Analyse zugänglich zu machen (vgl. Ruf/Winter 2006, S. 56). Das Ergebnis einer Aufgabe bzw. das fehlende Ergebnis sagt

[65] Die Darstellung der Leistungen über einen längeren Zeitraum wird deshalb Kompetenzentwicklung genannt. Dabei ist jedoch zu beachten, dass Veränderungen auch inhaltsabhängig sein können.

wenig über die Fähigkeiten des Aufgabenbearbeiters aus. Ein knapp notierter Lösungsweg liefert einige Informationen mehr. Deutlich mehr kann erst aus einem ausführlich kommentierten Lösungsweg erfahren werden, in welchem die individuellen Ansätze verbal beschrieben und begründet werden und sprachlich reflektiert wird (vgl. Leuders 2006, S. 80). Um individuelle Produktionen zu begünstigen, sollten Aufgaben gestellt werden, die vielfältige Lösungswege zulassen und zu umfangreicheren Eigenproduktionen auffordern (vgl. Leuders 2006, S. 80, Sjuts 2006).

Derartige Eigenproduktionen könnten auch mündlicher Art sein. Zwischen mündlichen und schriftlichen Leistungen von Schülern gibt es oft deutliche Unterscheide, vor allem in der Primarstufe (vgl. Wollring 2006, S. 65), aber durchaus auch in den Sekundarstufen. Um das gesamte Potenzial eines Schülers darzustellen, sind daher auch mündliche Artikulationen in die Leistungsbeurteilung einzubeziehen (vgl. Wollring 2006, S. 65).

Die gewählte Differenzierung kann ebenso für die Beurteilung mündlicher Kompetenzdarlegungen eingesetzt werden. Aus den mündlichen Darlegungen der Schüler ist dann jedoch sofort auf die zugrundeliegende mathematische Aktivität zu schließen und nahezu zeitgleich das Niveau der entsprechenden Kompetenz zu beurteilen. Selbst mit vorbereiteten Beobachtungsbögen[66] und klaren Bewertungskriterien ist dies bei der Dynamik mündlicher Leistungsüberprüfungen erst nach einem gewissen Training möglich. Die Erprobung des Konzeptes wurde deshalb auf schriftliche Darlegungen der Lösungsprozesse beschränkt. Anhand qualitativer Verfahren kann aus den schriftlichen Darlegungen der Schüler auf die ausgeführten Aktivitäten geschlossen werden. Das Niveau der entsprechenden Kompetenzen kann dann durch Vergleich mit den erstellten Beurteilungskriterien zugeordnet werden. Ein weiterer Vorteil schriftlicher Kompetenzdarlegungen ist die Fixierung von Leistung und Beurteilung. Diese Dokumentation kann in zwei Varianten nützlich sein: Erstens können die Schüler ihre Leistungen und die darauf bezogenen Rückmeldungen für das eigenständige Lernen nutzen. Zweitens können die Leistungen anderen z. B. innerhalb eines Portfolios vorgelegt werden (vgl. 6.3.2).

[66] Insbesondere mündliche Leistungsbeurteilungen sollten, auf Grund der kurzen Zeit, die für die Beurteilung zur Verfügung steht, Beurteilungsinstrumente einbeziehen, die auf diese Situation zugeschnitten sind. Dagegen fungieren mündliche Unterrichtsleistungen aber nicht selten als ein „Sammelbecken für alle möglichen Zensierungsobjekte“ (Arnold/Jürgens 2001, S. 76).

## 3.2 Leistungserfassung anhand kompetenz- und aufgabenspezifischer Beurteilungskriterien

Eine rein quantitative Bestimmung von Leistungen, wie das Zählen richtig gelöster Aufgaben, ist für komplexere mathematische Kompetenzen, wie Argumentieren, Darstellen, Problemlösen, nicht möglich. Hier ist eine Beschreibung der Qualität vorzunehmen, die nie ganz objektiv, im Sinne von unabhängig vom Auswertenden, sein kann. Leistung kann aber generell nicht wertfrei beschrieben werden (vgl. Bohl 2001, S. 30): „Die Definition der Leistung muss von den Beteiligten, ganz besonders von den Lehrerinnen und Lehrern, geleistet werden. Jede Definition stellt eine subjektive Gewichtung bestimmter Leistungsmerkmale dar.“ (Bohl 2001, S. 30). Ein gewisser Entscheidungsspielraum kann somit nicht ausgeräumt werden.[67] Er sollte aber vor den Beurteilungsprozess verlegt werden, um innerhalb der Beurteilung zuverlässig und objektiv, aber auch zügig bestimmten Leistungen entsprechende Bewertungen zukommen lassen zu können. Das scheint nur möglich, wenn Beurteilungskriterien[68] als gemeinsame verbindliche Standards vorliegen, die zugleich Güte und Nachvollziehbarkeit der Beurteilung erhöhen. Gerade bei offenen Aufgaben ermöglicht die Aufschlüsselung von Bewertungskriterien deren Einsatz in Klassenarbeiten u. ä. (vgl. Perlich 2006, S. 27). Den Schülern wird deutlich, dass auch offene Aufgaben „gerecht“ bewertet werden können und unterschiedliche Lösungswege zu einer gleichen Bewertung führen können (vgl. Perlich 2006, S. 27/28). Auf Grund der Verschiedenartigkeit der Anforderungen bezüglich unterschiedlicher mathematischer Aktivitäten und der Situationsgebundenheit von Kompetenzdarlegungen wird es für sinnvoll erachtet, Beurtei-

[67] Leistungserfassung ist anscheinend am ehesten objektiv und zuverlässig, wenn der Entscheidungsspielraum des Beurteilenden minimal ist. Wurde z. B. für einen Test zur formalen Ableitung festgelegt, dass die Note 1 nur vergeben wird, wenn kein Fehler auftritt, sollte die Benotung vom Beurteilenden unabhängig sein. Bei komplexeren Kompetenzen ist der Entscheidungsspielraum bei der Bewertung ungleich höher als bei einfachen formalen Aktivitäten, die zu einem Ergebnis führen, das entweder richtig oder falsch ist. Beim Problemlösen sind z. B. unterschiedliche Lösungswege zu vereinbaren. Für die Bewertung gibt es zwischen richtig und falsch ein ganzes Spektrum von Bewertungsmöglichkeiten. Viele Fragen sind dabei offen, die ein Lehrer selbst entscheiden muss, z. B. Sind zwei richtige Lösungswege gleich zu bewerten, wenn die eine Strategie clever, die andere umständlich ist? Wie ist ein Schüler zu bewerten, der in seiner Bearbeitung eine ganze Reihe von Kompetenzen zeigt, aber nicht auf das richtige Ergebnis kommt? Wie ist mit einem mathematisch begabten Schüler umzugehen, der seinen Lösungsweg nicht verständlich darstellt?

[68] Der übliche Begriff „Beurteilungskriterium“ ist etwas irreführend, da es sich hier streng genommen um die Phase der Leistungserfassung handelt. Die Beurteilungskriterien werden hier verwendet, um den Leistungen ein Niveau (einen Punktwert) zuzuschreiben. Leistungserfassung und Leistungsbeurteilung können bei den genannten, nicht quantitativ erfassbaren Kompetenzen nicht voneinander getrennt werden.

lungskriterien zu formulieren, die der jeweiligen Kompetenz und der jeweiligen Aufgabe angepasst sind.

Für eine kompetenzspezifische Erfassung von Leistungen sind die Aufgabenbearbeitungen der Schüler zunächst nach den dargelegten Kompetenzen bzw. den entsprechenden ausgeführten Aktivitäten zu analysieren. Die für das Konzept geeigneten Aufgaben (vgl. Kapitel 2) sind methodisch offen. Die Schüler können somit sehr unterschiedliche Lösungsstrategien verwenden. Ein „Abhaken" bestimmter Teilergebnisse ist bei der kompetenzorientierten Leistungsbeurteilung nicht möglich. Hier müssen die individuellen Wege durchdrungen und nach den ausgeführten Aktivitäten aufgeschlüsselt werden, um entsprechende Kompetenzen nachfolgend einordnen zu können.

### 3.2.1 Aktivitätenbezogene Analyse der Schülerarbeiten

Die bei der Bearbeitung einer mathematischen Aufgabe von einem Schüler ausgeführten Aktivitäten werden innerhalb dieses Beurteilungskonzepts interpretativ, anhand qualitativer Untersuchungsmethoden, aus der schriftlichen Lösungsdarstellung erschlossen.[69] Ausführliche Gespräche mit dem Schüler zu den tatsächlich von ihm ausgeführten Aktivitäten bzw. vollzogenen Gedankengängen sind in der Regel im Schulalltag nicht möglich. Um alle von den Schülern ausgeführten Aktivitäten, nicht nur die mit der Aufgabe intendierten, zu erfassen, wird die Methode des offenen Codierens (vgl. Flick 2000, S. 198, 200, Böhm 2003, S. 477/478 und 5.1.2) gewählt. Dabei werden die Arbeiten der Schüler in Abschnitte gegliedert, die einzelnen Aktivitäten entsprechen. Diese Abschnitte werden mit einer Aktivität benannt (codiert), die direkt dem Text entnommen wird. Das Herantragen theoretischer Codes, hier der intendierten Aktivitäten, wird in diesem Schritt vermieden, um soweit es die Darlegung der Lösung zulässt, alle Aktivitäten der Schüler aufzudecken.

Für die Beurteilung werden in ihrer Struktur und Anforderung ähnliche Aktivitäten zusammengefasst, z. B. verschiedene algebraische Operationen zur Kompetenz „algebraische Umformungen ausführen". Dieser Prozess entspricht einer Kategorisierung, d. h. der Zusammenfassung von Begriffen zu Oberbegriffen (vgl. Flick 2000, S. 197, 5.1.3). Für die Benennung der gebildeten Kategorien sind die intendierten Aktivitäten leitend, aber auch andere von den Schülern ausgeführte Aktivitäten werden gewürdigt und beurteilt, ggf. unter Erstellung zusätzlicher Beurteilungskriterien. An dieser Stelle erfolgt noch keine Zusammenfassung zu den vier Aktivitätsbereichen, sondern wichtige Untergruppen der

---

[69] Zur Begründung der Methodenauswahl siehe Abschnitt 5.1.1

Bereiche werden zusammengefasst (z. B. graphisch Darstellen innerhalb des Aktivitätsbereiches darstellend-interpretativ oder Begründen im Bereich kritisch-argumentativ).

Die aktivitätenbezogene Analyse der Schülerarbeiten liefert somit die Basis für die Beurteilung der dargelegten mathematischen Kompetenzen. Sie deckt auf, welche Kompetenzen anhand der Bearbeitung der Aufgabenstellung beurteilt werden können, weil entsprechende Aktivitäten ausgeführt wurden und gruppiert den Lösungsweg in Abschnitte, die jeweils der Beurteilung unterschiedlicher Kompetenzen dienen.

Die aktivitätenbezogene Aufgabenanalyse kann an der vorliegenden Lösung dokumentiert werden. Dies wird vor allem dann der Fall sein, wenn die kompetenzspezifische Beurteilung noch neu ist oder, wenn, wie bei den Analysen in Kapitel 5, die ausgeführten Aktivitäten von direktem Interesse sind. Steht die Beurteilung im Vordergrund und ist das Konzept der differenzierten Beurteilung vertraut, werden die aktivitätenbezogenen Aufgabenanalysen nicht mehr separat dokumentiert werden, sondern fließen mit der Beurteilung zusammen. Für die Schüler ist dann durch Kommentierungen oder Textbezug bei der Beurteilung kenntlich zu machen, welche Rückmeldung sich auf welchen Lösungsabschnitt bezieht. Wenn möglich wird auch in den Beurteilungskriterien festgehalten, auf welche Aufgabenteile sich die Beurteilungen beziehen sollen.

### 3.2.2 Kompetenz- und aufgabenspezifische Beurteilungskriterien

Eine Aufgabe kompetenzorientierter Beurteilungsformen ist es, individuell besondere Leistungen zu würdigen und dennoch gemeinsame Standards umzusetzen (vgl. 1.5.2). Eine individuelle Begegnung mit Schülerleistungen scheint jedoch nicht mit objektiven Normen und Beurteilungskriterien vereinbar zu sein, denn vor der Beurteilungssituation festgelegte Bewertungskriterien sind für unerwartete Aktivitäten nicht zugänglich (vgl. Gallin/Hußmann 2006). Andererseits können individuelle Stärken und Schwächen nicht beschrieben werden, wenn es keinen Maßstab für Leistungen gibt. Besonderheiten können immer nur im Vergleich erkannt werden. Im Konzept der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen wird versucht, konkrete Beurteilungskriterien zu formulieren, die jedoch nicht an einen Lösungsweg gebunden sind und individuelle Zugänge zulassen. Zum anderen können aus den kompetenzspezifischen Beurteilungskriterien die zu den individuellen Aktivitäten des Schülers passenden ausgewählt und ggf. durch solche ergänzt werden, die Besonderheiten der individuellen Leistung berücksichtigen.

Zur Leistungsfeststellung sind Lernziel- bzw. kompetenzorientierte Kriterien (sachliche Bezugsnorm) geeignet, da (nur) diese eine objektive Leistungserfassung erlauben (vgl. 1.5.1). Auch die Rückmeldung individueller Leistungsentwicklungen (individuelle Bezugsnorm) stützt sich auf sachnormorientierte Einzelmessungen (vgl. Arnold/Jürgens 2001, S. 64).

Nicht-algorithmische Leistungen, wie die bezüglich des Argumentierens, Problemlösens und Darstellens sind nicht direkt quantifizierbar. Hier ist die Qualität der Ausführung einer Aktivität einzuschätzen, wobei Interpretationen und Zuordnungen zu Kompetenzstufen notwendig werden, die nicht eindeutig festgelegt sind. Die Beurteilung, im Hinblick auf anspruchsvolle Ziele, ist ohne Einfluss der Subjektivität des Beurteilenden nicht möglich[70] (vgl. Fischer/Malle 1985, S. 322). Kompetenz- und jahrgangsspezifische Maßstäbe, welche eine solche Zuordnung unterstützen könnten, liegen derzeit nicht vor. Deshalb ist es ein Element der Umsetzung des Konzeptes der differenzierten Leistungsbeurteilung, kompetenzspezifische Beurteilungskriterien zu formulieren, um die Güte und Transparenz der Beurteilung zu verbessern. Um der Kontextabhängigkeit von Kompetenzdarlegungen gerecht zu werden (vgl. 3.1.3), werden kompetenzspezifische Kriterien vor der Bewertung auf die jeweilige Aufgabenstellung konkretisiert. Durch konkrete, aufgabenspezifische Bewertungsschemata können Abweichungen zwischen verschiedenen Beurteilenden verringert werden (vgl. Büchter/Leuders 2005, S. 180), wodurch auch ein klassenübergreifender Vergleich möglich wird. Aber in erster Linie dienen sie dazu, dass gleiche Leistungen von ein und demselben Lehrer gleich beurteilt werden, was auch von den Schülern bei einer gerechten Bewertung erwartet wird. Walsch (1972, S. 77) begründet die Festlegung für die Beurteilung wesentlicher Gesichtspunkte vor der Beurteilung damit, dass bei einer größeren Anzahl qualitativer Wertungen die Objektivität der Urteile eingeschränkt wird, z. B. indem gewisse Gesichtspunkte beim Beurteilen nicht durchgängig beachtet werden oder zufällig auftretende Besonderheiten das jeweilige Urteil beeinflussen.

Kompetenzspezifische Beurteilungskriterien sind des Weiteren für die Transparenz der Leistungsbeurteilung und deren Rückmeldung unabdingbar. Den Schülern sollten die Kriterien, an denen ihre Leistungen gemessen werden, vor der Beurteilungssituation be-

---

[70] „Derartige Beurteilungen erfordern vom Beurteiler ein Sich-Einlassen auf den Prozess der Beurteilung mit all seinen Chancen aber auch möglichen Gefahren und Fehlern, derer man sich bewusst sein sollte. Diese Subjektivität darf aber nicht mit dem Stil eines unfehlbaren Richters verbunden sein, der Lehrer sollte sich vielmehr einer permanenten Diskussion über Leistungsbeurteilung mit Kollegen, Schülern und Eltern stellen." (Fischer/Malle 1985, S. 322)

kannt sein. Der erste und wichtige Schritt dazu ist, dass die Schüler die Differenzierung der Leistungsbeurteilung kennen und sich der Breite des Spektrums mathematischer Aktivitäten bewusst sind. Kompetenzspezifische Beurteilungskriterien können mit den Schülern gemeinsam erarbeitet oder diskutiert werden. Die aufgabenspezifische Konkretisierung nimmt der Lehrer vor. Möglicherweise erfolgt diese schrittweise und wird erst im Laufe der Beurteilung endgültig festgelegt, um individuellen Herangehensweisen der Schüler gerecht zu werden.[71] Letztendlich sind die Kriterien auch für die Transparenz der Beurteilung grundlegend. Sie erlauben eine nachvollziehbare und vergleichbare Erläuterung der quantitativen Bewertung (vgl. 3.3). Nach Arnold und Jürgens (2001, S. 29) können sachbezogene Rückmeldungen nur mit Hilfe differenzierter, d. h. kriteriengeleiteter Stellungsnahmen erfolgen. Werden bei der Bewertung von Leistungen Leistungsansprüche und Kriterien inhaltlich diskutiert, können die Schüler sie erkennen und sich daran orientieren (vgl. Winter, F. 2002, S. 178).

Aufgabenspezifische Beurteilungskriterien beschreiben Kriterien, die für ein bestimmtes aufgaben- und kompetenzspezifisches Niveau zu erfüllen sind. Für die Zuordnung eines Niveaus ist nicht die Entscheidung für einen Lösungsweg sondern die Qualität der Ausführung des gewählten Weges entscheidend (vgl. Leuders 2006, S. 81, Perlich 2006, S. 27). Die so erhaltenen Informationen sind nicht statistisch-empirisch abgesichert, auch kann sich das Bewertungsschema während der Auswertung noch verändern (vgl. Leuders 2006, S. 82). Dennoch können mit offenen Aufgaben auf der Basis von Kenntnissen über den vorhergehenden Unterricht sowie die Lernentwicklung, die Fähigkeiten und Beschränkungen einzelner Schüler, viele Informationen über die Leistungsfähigkeit dieser Schüler erhalten werden, die zur Diagnose geeignet sind (vgl. Leuders 2006, S. 82). Vorraussetzung ist jedoch, dass die Zuordnung von Schülerleistungen zu Niveaustufen reliabel ist.

Nach Sacher (2001, S. 78) sollte ein Regelsystem, dass Schülerleistungen Bewertungen zuweist u. a. folgenden Anforderungen genügen:

- Die Zuordnung ist logisch eindeutig: Gleiche Leistungen werden gleich honoriert (z. B. durch gleiche Noten/Punkte, gleichartige Verbalurteile). Die Umkehrung gilt nicht, z. B. können gleichen Noten durchaus verschiedene Leistungen entsprechen.

[71] Das heißt nicht, auf den sozialen Vergleich überzugehen. Die Beurteilungskriterien werden an die von den Schülern gewählten Methoden, nicht an das Niveau ihrer Bearbeitung angepasst.

- Die Zuweisung erfolgt fehlerkontrolliert: Über die Größenordnung des unvermeidlichen Fehlers wird informiert und es werden Möglichkeiten eröffnet, diesen zu begrenzen.
- Flexibilität ist gewährleistet: Da die Anforderungen, wenigstens bei der kriterialen Norm, von Stoffgebiet und Schulstufe abhängen, muss das Regelsystem ermöglichen, verschieden hohe Anforderungen zu stellen.

Diese Kriterien werden durch das Konzept der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen erfüllt, wobei die ersten beiden Forderungen erst durch die konkreten Beurteilungskriterien gewährleistet werden. Die aufgabenspezifischen Beurteilungskriterien kommen außerdem der Forderung von Grunder, Bohl und Broszat (2001, S. 47) nach, Beurteilungskriterien konkret zu formulieren und durch überprüfbare bzw. beobachtbare Indikatoren zu ergänzen (vgl. Beispiel 3, Anhang 1.3).

Bei der Zuordnung eines Niveaus handelt es sich um ein „Einschätzverfahren“ (Arnold/ Jürgens 2001, S. 83). Schätzverfahren entsprechen innerhalb der pädagogischen Beurteilungsmethoden einer Zwischenstufe: Es sind weder Beobachtungsverfahren, die Verhaltensweisen direkt protokollieren, noch Testverfahren, die mit standardisierten Bedingungen und strikter Auswertungsobjektivität arbeiten (vgl. Arnold/Jürgens 2001, S. 83). Schätzverfahren sind vielmehr „strukturiert erfragte Vermutungen über Ausprägungsgrade von komplexen Merkmalen, die in einer - zumeist aber in einer Vielzahl - von Situationen beobachtbar sind“ (Arnold/Jürgens 2001, S. 83). Eine Konkretisierung bis hin zu einfachen Zählanweisungen ist für komplexe Merkmale nicht möglich oder nicht effizient. Verwendet werden gestufte Skalen, die durch aussagefähige Symbole (z. B. +, - oder 1, 2, 3, 4, 5)[72] oder verbal formulierte Abstufungen auf- oder absteigend gegliedert sind (vgl. Arnold/ Jürgens 2001, S. 75). Die konkret formulierten Zuordnungskriterien erhöhen dabei die Auswertungsobjektivität und die Sicherheit der Niveauzuordnung.

Es stellt sich nun die Frage, wie kompetenzspezifische Beurteilungskriterien gefunden werden können. Wann kann z. B. einem Schüler eine sehr gute Argumentationsfähigkeit bezogen auf die Bearbeitung einer Aufgabe bescheinigt werden? Welche Kriterien sind dafür zu erfüllen? Derzeit liegen ausgearbeitete, empirisch gestützte Kompetenzmodelle nur für einzelne Lernbereiche, Altersgruppen und Schülerpopulationen vor (vgl. Klieme 2004, S. 13). Die Beschreibungen der Kompetenzniveaus fallen dabei oft (noch) zu abstrakt aus (vgl. Klieme 2004, S. 13). Es besteht die Hoffnung, dass neue Forschungsvorha-

[72] In der ersten Fallstudie wurden die Wertungen –1, 0, 1, 2 vergeben, in den folgenden Untersuchungen wurden die Leistungen 5 Niveaus (0 bis 4 Punkte) zugeordnet (vgl. Kapitel 4).

ben zur Erarbeitung und empirischen Überprüfung von Kompetenzstruktur- und Kompetenzentwicklungsmodellen (vgl. Klieme/Leutner 2006) oder zur Entwicklung standardbasierter Vergleichsstudien zu Beurteilungskriterien führen, die auch in alltäglichen Beurteilungen einsetzbar sind. So lange obliegt es dem Lehrer oder einer Lehrergruppe Kriterien für eine Einstufung der mathematischen Kompetenzen seiner Schüler aufzustellen.

Anhaltspunkte für kompetenzspezifische Beurteilungskriterien oder deren Entwicklung können didaktische Veröffentlichungen zur Förderung und Beurteilung bestimmter Kompetenzen geben. Anregungen für Bewertungskriterien für kreative Produkte finden sich z. B. in Leuders 2003b (S. 304ff.), der ein Bewertungsschema aufstellt, welches in den Dimensionen Kreativität und Korrektheit jeweils die Aspekte Gestaltung, Nutzung von Mathematik, Sprache und Gründlichkeit betrachtet. Perlich (2006) formuliert Kriterien der Bewertung offener Aufgaben: Befolgung der Arbeitsanweisung, Nachvollziehbarkeit des Lösungsweges, Zeitaufwand, Einsatz von angemessenen Hilfsmitteln, mathematische Richtigkeit, Schlüssigkeit und Genauigkeit des Ergebnisses, Verwendung von Fachbegriffen, sprachliche Richtigkeit und zeichnerische Genauigkeit. Da es von der Aufgabe abhängt, welche dieser Kriterien herangezogen werden, konkretisiert Perlich folgerichtig die allgemeinen Kriterien auf ein Aufgabenbeispiel (aufgabenbezogenes Bewertungsschema).

Zur „Beurteilung von Schülerleistungen im Beweisen“ gibt es eine tiefgehende Ausarbeitung von Walsch aus dem Jahre 1972 (S. 76ff.). Da diese Kriterien, möglicherweise in modifizierter Form, auch für die Beurteilung anderer Argumentationsformen von Bedeutung sind, werden sie in der folgenden Übersicht aufgelistet. Die von Walsch formulierten Fragen resultieren nicht nur aus theoretischen Erwägungen, sondern haben sich bei empirischen Untersuchungen in den Klassenstufen 6 bis 8 als wesentlich und angemessen herauskristallisiert (vgl. Walsch 1972, S. 78), was anhand von zahlreichen Beispielaufgaben und zugehörigen Ergebnissen der Untersuchungen belegt wird.

Tab. 3/2: Gesichtpunkte für eine qualitative Beurteilung von Beweisversuchen aus Walsch 1992 (S. 78ff.)

| Gesichtspunkte für eine qualitative Beurteilung von Beweisversuchen |
| --- |
| $F_1$ - Ist ein sinnvoller Zusammenhang mit der Aufgabenstellung erkennbar? |
| $F_2$ - Werden begründende und schlussfolgernde Formulierungen gebraucht? |
| $F_3$ - Enthält der Beweisversuch nur Richtiges? |
| $F_4$ - Sind die Fehler nur sachlicher Art? |
| $F_5$ - Sind die Fehler nur logischer Art? |
| $F_6$ - Enthält der Beweisversuch alle notwendigen Schritte? |
| $F_7$ - Enthält der Beweisversuch nur notwendige Schritte? |
| $F_8$ - Enthält der Beweisversuch einen „Schlusssatz“? |
| $F_9$ - Stimmt der „Schlusssatz“ mit der zu beweisenden Behauptung überein? |
| $F_{10}$ - Ist die Darstellung mathematisch und sprachlich korrekt? |

Bei genauer Betrachtung der Beurteilungsfragen von Walsch wird deutlich, dass diese in modifizierter Form auch z. B. für Versuche des Problemlösens sinnvoll sind. Aspekte, die spezifisch für logische Anforderungen in Beweisen sind, werden dabei durch solche ersetzt, die spezifisch für heuristische Anforderungen sind (Tabelle 3/3). Für diese Kriterien ist jedoch keineswegs untersucht, ob sie sich bei konkreten Beurteilungen heuristischer Kompetenzen als wesentlich und angemessen erweisen.

Tab. 3/3: Gesichtpunkte für eine qualitative Beurteilung von Problemlöseversuchen

| Gesichtspunkte für eine qualitative Beurteilung von Problemlöseversuchen |
| --- |
| $F_1$ - Ist ein sinnvoller Zusammenhang des gewählten Ansatzes mit der Aufgabenstellung erkennbar? |
| $F_2$ - Werden heuristische Strategien und eigenständige Denkprozesse gebraucht? |
| $F_3$ - Enthält die Problemlösung nur Richtiges? |
| $F_4$ - Sind die Fehler mathematischer Art? |
| $F_5$ - Enthält der Problemlöseprozess heuristische Widersprüchlichkeiten? |
| $F_6$ - Enthält die Problemlösung alle notwendigen Schritte? |
| $F_7$ - Enthält die Problemlösung keine überflüssigen Lösungsschritte? |
| $F_8$ - Schließt die Problemlösung mit einer Reflexion? |
| $F_9$ - Bezieht sich die Reflexion auf die Fragestellung oder den Kontext? |
| $F_{10}$ - Ist die Darstellung mathematisch und sprachlich korrekt? |

Es ist als eine wichtige Aufgabe didaktischer Forschung zu sehen, theoretisch und empirisch fundierte Kriterien für mathematische Kompetenzen zu formulieren. Dies ist für die Umsetzung der Bildungsstandards ebenso wichtig, wie deren Überprüfung durch überregionale Vergleichsuntersuchungen, da sie den Lehrer befähigen, die Kompetenzen seiner Schüler standardorientiert selbst zu überprüfen und dies nicht nur punktuell. Die in dieser Arbeit verwendeten Kriterien (vgl. z. B. Beispiel 3, 8 und Anhang 1.3) erweisen sich bei

Beurteilungen innerhalb der Erprobungen als angemessen und handhabbar, was aber nicht ohne Weiteres auf andere Beurteilungssituationen übertragen werden kann.

Eine Orientierung für die Definition aufgabenspezifischer Kompetenzniveaus geben die in Kapitel 2 zusammengestellten Kriterien der Aufgabenkomplexität. Sie beschreiben kompetenzspezifische Anforderungen der Aufgaben. Zur Formulierung der Beurteilungskriterien ist festzulegen, welche der Anforderungen mit welchem Gewicht zur Beurteilung beitragen. Um individuellen Leistungen flexibel begegnen zu können, sind vor der Beurteilung festgelegte Kriterien nicht als starres Raster zu sehen, sondern können während der Beurteilung angepasst werden. Bedingung bleibt, dass für alle Schüler der gleiche Maßstab gilt.

Im Folgenden wird das, die Beurteilung vorbereitende, unterstützende und leitende, Material, einschließlich der aufgabenspezifischen Beurteilungskriterien, für eine Aufgabe der Erprobung exemplarisch vorgestellt.

Beispiel 3:
Aufgabenspezifische Beurteilungskriterien für Aufgabe 11B2.1
„Absorption von Licht“

Aufgabenstellung

Dringt Licht in Wasser ein, so verliert es mit zunehmender Wassertiefe durch Absorption an Intensität. In einem Gewässer wurde gemessen, dass die Lichtintensität pro Meter um ca. 75 % des bis dahin verbliebenen Wertes abnimmt.

a) Beschreiben Sie diesen physikalischen Vorgang mit Hilfe einer Zahlenfolge.
b) Untersuchen Sie Monotonie und Konvergenz dieser Folge. Werten Sie Ihre Ergebnisse in Bezug zur physikalischen Realität. Ist das Modell geeignet?
c) Wie viel Prozent der ursprünglichen Intensität sind in 1 m, 2 m, 3 m Wassertiefe noch vorhanden?
d) In welcher Tiefe beträgt die Lichtintensität erstmals weniger als 1/1000 des ursprünglichen Wertes?

Mögliche Lösung:

a)

| | |
|---|---|
| $a_0$: | Intensität an der Wasseroberfläche |
| $a_1 = a_0 - a_0 \cdot 0{,}75 = a_0 \cdot 0{,}25$: | Intensität in 1 m Tiefe |
| $a_2 = a_1 \cdot 0{,}25 = a_0 \cdot 0{,}25^2$: | Intensität in 2 m Tiefe |

$a_3 = a_2 \cdot 0{,}25 = a_0 \cdot 0{,}25^3$: Intensität in 3 m Tiefe

$\Rightarrow\ a_n = a_{n-1} \cdot 0{,}25 = a_0 \cdot 0{,}25^n$: Intensität in $n$ Metern Wassertiefe

rekursive Zuordnungsvorschrift: $a_n = a_{n-1} \cdot 0{,}25$

explizite Zuordnungsvorschrift: $a_n = a_0 \cdot 0{,}25^n$

b)

Die Folge ist eine geometrische Folge, denn es gilt $a_n = a_0 \cdot q^n$. Dies bedeutet physikalisch, dass die Lichtintensität mit zunehmender Wassertiefe exponentiell abnimmt.

Monotonie: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 0{,}25 < 1 \ \Rightarrow\ a_n < a_{n-1}$: monoton fallend

Grenzverhalten: $\lim\limits_{n\to\infty} a_0 \cdot 0{,}25^n = 0$, da 0,25 < 1 und sich somit $0{,}25^n$ mit zunehmenden $n$ beliebig nahe der Null nähert.

Die Folge ist eine monoton fallende Nullfolge. Dies entspricht dem physikalischen Modell, denn die Lichtintensität nimmt mit zunehmender Wassertiefe kontinuierlich ab und geht in großen Tiefen gegen Null. Das mathematische Modell ist deshalb zur Beschreibung des physikalischen Prozesses prinzipiell geeignet. Es wurde hier jedoch vereinfachend angenommen, dass der Anteil des absorbierten Lichts konstant ist. Dies dürfte in der Realität nur näherungsweise der Fall sein, denn z. B. Verschmutzungen, Pflanzen sowie Dichte- und Temperaturänderungen können die Absorption verändern.

c)

1 m Tiefe: $\frac{a_1}{a_0} = 0{,}25 \ \Rightarrow$ 25% der ursprünglichen Intensität sind noch vorhanden.

2 m Tiefe: $\frac{a_2}{a_0} = 0{,}25^2 = 0{,}0625 \ \Rightarrow$ 6,25% der ursprüngl. Intensität sind noch vorhanden.

3 m Tiefe: $\frac{a_3}{a_0} = 0{,}25^3 = 0{,}0156 \ \Rightarrow$ 1,56% der ursprüngl. Intensität sind noch vorhanden.

d)

$$\frac{a_n}{a_0} = 0{,}001 = 0{,}25^n \ \Rightarrow\ \lg 0{,}001 = n \lg 0{,}25 \ \Rightarrow\ n = \frac{\lg 0{,}001}{\lg 0{,}25} \approx \frac{-3}{-0{,}602} \approx 4{,}98$$

Auf Grund des fallenden Verhaltens beträgt die Intensität erstmals in ca. 5 m Tiefe weniger als 1/1000 des ursprünglichen Wertes.

Kompetenzspektrum

Grundwissen (GW)

Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)

Übersetzen, Interpretieren (DI)

Ausführen formaler Verfahren (FO)

Ausführen von Operationen, Umformungen, Berechnungen (FO)

Schlussfolgerungen ziehen oder mathematisch Argumentieren (KA)

Diskutieren, Werten (KA)

Aufgabenspezifische Beurteilungskriterien

1. Grundwissen (GW)

Folgende Wissensinhalte sind zur Lösung der Aufgabe (voraussichtlich)[73] notwendig:

- Eigenschaften von Zahlenfolgen, insbesondere geometrischen Zahlenfolgen,
- explizite und rekursive Darstellung von Zahlenfolgen,
- Monotonie und Grenzverhalten von Zahlenfolgen,
- Potenzen und Logarithmus.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Die aufgelisteten, zur Lösung der Aufgabe notwendigen Grundkenntnisse werden korrekt dargelegt und angewendet – der Lösungsweg enthält keine Fehler oder Lücken/Abbrüche, die offensichtlich fehlendem Grundwissen zuzuschreiben sind. |
| 3 Punkte | Das Standardwissen zur Stoffeinheit (Faktenwissen, prozedurales Wissen zu den wichtigen Verfahren) wird fehlerfrei dargelegt. Beim konzeptuellen Wissen zu komplexen Zusammenhängen treten (wenige, kleinere) Fehler auf, wie z. B. Ungenauigkeiten in der begrifflichen Argumentation zum Grenzverhalten. |
| 2 Punkte | Die fundamentalen Wisseneinheiten aus dem aktuellen Stoffgebiet Zahlenfolgen sind anwendungsbereit bis auf eine, z. B. ist die Monotonie von Zahlenfolgen nicht verfügbar. |
| 1 Punkt | Elementare Wisseneinheiten, wie die Eigenschaften geometrischer Zahlenfolgen, sind anwendbar, aber auch deutliche Lücken zu grundlegenden Wisseneinheiten wie Monotonie und Konvergenz sind sichtbar. |
| 0 Punkte | Das für die Stoffeinheit typische Grundwissen wird nicht gezeigt. Das ist z. B. der Fall, wenn nur die formalen Berechnungen in c) ausgeführt werden können. |

2. Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)

In Aufgabenteil a) ist ein geeignetes mathematisches Modell für die in der Aufgabenstellung gegebene physikalische Problemstellung zu finden. Zwar ist in der Aufgabenstellung

[73] Welche Kenntnisse genau erforderlich werden, hängt vom gewählten Lösungsweg ab, z. B. kann die Monotonie der Zahlenfolge mit formalen Verfahren oder mit begrifflichen Überlegungen untersucht werden. Beim ersten Weg ist primär prozedurales Wissen, beim zweiten primär konzeptuelles Wissen zu aktivieren.

mit „Zahlenfolge“ das Suchfeld eingeschränkt, aber über die genaue Form der Folge wird nichts gesagt. Naheliegend erscheint es, das Modell, z. B. durch Bestimmung der ersten Folgenglieder und anschließende Verallgemeinerung, zu entwickeln.

Das Modell wird in Teil b) analysiert und gewertet, wofür ebenfalls geeignete Strategien und Verfahren auszuwählen sind. Hier hängt es vom zurückliegenden Unterricht ab, ob heuristische Fähigkeiten notwendig sind oder ein Standardverfahren abrufbar ist.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Die Kombination heuristischer Strategien und mathematischer Operationen ist als Lösungsweg geeignet. Es wird eine Zahlenfolge entwickelt, die den Vorgang richtig beschreibt (evtl. Übersetzungs-/Rechenfehler, keine heuristischen Mängel). Die Lösungsstrategie ist zielorientiert. Ein eigenständiger, kreativer Denkprozess liegt vor. |
| 3 Punkte | Verständnis des Begriffs Zahlenfolge wird gezeigt. Eine Lösung wurde erbracht, der Weg ist jedoch umständlich, wenig elegant (z. B. Berechnung für sehr viele $n$). In der Entwicklung liegen Flüchtigkeitsfehler vor, wie: $a_0=1$, $a_1=0{,}25$. |
| 2 Punkte | Die Herangehensweise ist sinnvoll. Der Lösungsweg ist jedoch unvollständig, z. B ein fehlender/nicht sinnvoller Lösungsschritt, wie eine unzulässige Verallgemeinerung. |
| 1 Punkt | Ein Lösungsansatz ist vorhanden, aber das gesuchte Modell kann nicht abgeleitet werden (z. B. richtige Berechnung einiger Folgenglieder, keine Verallgemeinerung). |
| 0 Punkte | Es gelingt kein Zugang zur Aufgabe. |

3. Übersetzen und Interpretieren (DI)

Das Übersetzen der verbalen Informationen in die mathematische Sprache betrifft hier die Übersetzung[74] in die formale bzw. symbolische Darstellung im Aufgabenteil a). Bei der Übersetzung werden den Parametern der Zahlenfolge die zugehörigen Daten aus dem physikalischen Ausgangskontext zugeordnet. Bei oder vor der Entwicklung des Modells sind die gewählten Variablen den Ausgangsbegriffen zuzuordnen, also zu definieren, denn der Übersetzungsprozess sollte nachvollziehbar sein.

In Teilaufgabe d) muss das erhaltene formale Rechenergebnis in Bezug zum mathematischen und physikalischen Kontext gestellt werden, was sinnvolles Runden einschließt.[75]

[74] Im Normalfall laufen Übersetzung und Entwicklung des Modells parallel ab. Hier wird versucht, die einzelnen Kompetenzen zu trennen.

[75] Obwohl dies trivial klingt, sind diese Tätigkeiten des Interpretierens auch für mathematisch begabte Schüler nicht selbstverständlich, da für viele Schüler das Problem gelöst ist, wenn das formale Rechenergebnis vorliegt.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Die verbalen Informationen der Aufgabenstellung werden richtig und vollständig in das mathematische Modell übersetzt. Beide Beschreibungen sind äquivalent. Die Darstellung der Entwicklungsschritte und die Enddarstellung sind fachwissenschaftlich und formal richtig. Die Enddarstellung ist verständlich und geeignet das Problem in mathematisch-formaler Sprache zu lösen. Die Übersetzung ist durch Zuordnung/Kommentierung der Variablen und die Auswahl geeigneter Variablen nachvollziehbar.<br>Das Rechenergebnis (4,98) wird geeignet gerundet und von der Modellebene in die Ebene des physikalischen Ausgangskontextes übersetzt. |
| 3 Punkte | Die Darstellung ist formal und mathematisch richtig, enthält aber „Unschönheiten“ bezüglich der Lesbarkeit, wie eine häufige Verwendung von Zahlen an Stelle einer allgemeinen Betrachtung mit Variablen oder die Auswahl ungeeigneter Variablen. Die Darstellung ist nicht effektiv bzw. unterstützt den Lösungsweg nicht optimal, z. B. Darstellung der Folgenglieder, aus der die allgemeine Struktur nicht ablesbar ist. Es fehlt eine Definition/Erklärung der Variablen.<br>Es treten formale Fehler bei der Interpretation (Rückübersetzung) auf oder die Formulierung ist fachsprachlich oder sprachlich ungeeignet. Die Übersetzung ist nicht vollständig, die Ebenen werden vermischt, z. B. „Ab dem 5ten Folgenglied ist die Intensität kleiner als ...“). |
| 2 Punkte | Die grundlegenden Zusammenhänge werden richtig übertragen, in der Enddarstellung treten jedoch Mängel auf oder es liegt ein Übersetzungsfehler vor, z. B. $q$=0,75 statt $q$=0,25, oder ein Interpretationsfehler, z. B. 4 nicht 5 m Tiefe werden angegeben. |
| 1 Punkt | Die Übersetzung/Interpretation gelingt nur in Ansätzen: Es gibt mehrere Übersetzungsfehler, die Übersetzung ist zu großen Teilen nicht sinnvoll oder nicht nachvollziehbar oder es findet nur eine formale Interpretation statt, ohne Bezug zum physikalischen Ausgangsproblem. Die Übersetzung/Interpretation ist nicht nachvollziehbar. |
| 0 Punkte | Es gelingt keine Übersetzung in die mathematische Sprache und (somit) auch keine Interpretation. |

4. Formale Verfahren ausführen

Als formale Verfahren der Analysis können in dieser Aufgabe die Bestimmung der Monotonie und die Betrachtung des Grenzverhaltens zur Anwendung kommen. Allerdings ist hier auch eine mathematische Argumentation ohne formale Verfahren möglich. Daher können hier abhängig von der gewählten Lösungsstrategie die Kompetenzen Ausführen formaler Verfahren und Schlussfolgerungen ziehen oder die Kompetenz des mathematischen Argumentierens eingeschätzt werden (eventuell auch alle drei Kompetenzen).

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Die eingesetzten formalen Verfahren werden mathematisch korrekt, exakt, vollständig und auch formal korrekt ausgeführt. |
| 3 Punkte | Die Verfahren werden im Wesentlichen beherrscht, ein Teilschritt ist jedoch fehlerhaft, nicht exakt oder unvollständig, z. B. ungünstige/fehlende Enddarstellung (wie $n_0(\varepsilon)$). |
| 2 Punkte | Ein formales Verfahren ist anwendbar, ein (zweites) formales Verfahren ist nicht anwendbar oder kleinere Fehler/Ungenauigkeiten finden sich in beiden Verfahren. |
| 1 Punkt | Es sind Grundzüge der Verfahren erkennbar, es findet aber keine algorithmisch-geordnete Ausführung statt. |
| 0 Punkte | Die formalen Verfahren der Folgenuntersuchung sind nicht anwendbar, z. B. intuitive Betrachtung ohne Standardverfahren der Oberstufenmathematik. |

5. Algebraische Operationen, Umformungen ausführen

Folgende kalkülhafte Grundfertigkeiten werden bei dieser Aufgabe (mindestens) verlangt: Potenzieren/Potenzgesetze, Grundrechenoperationen, Rechnen mit Brüchen/Dezimalbrüchen, Logarithmus/Logarithmengesetze, Berechnung von Logarithmen.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Es treten keine (Rechen-)Fehler auf, alle Umformungen/Teilergebnisse sind richtig. |
| 3 Punkte | Die formalen Grundfertigkeiten werden beherrscht, es liegen nur wenige Rechenfehler (Flüchtigkeitsfehler) vor, welche die Problemlösung nicht wesentlich beeinträchtigen. |
| 2 Punkte | Grundlegende formale Fertigkeiten werden dargelegt, es zeigen sich aber Unsicherheiten bezüglich anspruchsvollerer kalkülhafter Fertigkeiten, z. B. im Umgang mit dem Logarithmus. |
| 1 Punkt | Elementare algebraische Operationen werden beherrscht, es treten aber auch bei einfachen Operationen der Sekundarstufe I oder der Primarstufe Rechenfehler auf. |
| 0 Punkte | Die Aufgabe bzw. die betreffenden Teile der Aufgabe können auf Grund fehlender formaler Fertigkeiten nicht gelöst werden. |

6. Schlussfolgerungen ziehen bzw. mathematisches Argumentieren

Einfache Schlüsse, ohne tiefgehende mathematische Argumentationen, werden vor allem in den Teilaufgaben b) und c) auftreten, wenn aus einer Analyse der Form der Zahlenfolge und den Ergebnissen der formalen Verfahren die Eigenschaften der Folge abgeleitet werden. Diese Aufgabenteile können aber auch durch (komplexere) mathematische Argumentationen auf Grundlage der begrifflichen Zusammenhänge zwischen den mathematischen Objekten und Konzepten bearbeitet werden. Für beide Varianten werden Kriterien formuliert.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Gezogene Schlüsse sind mathematisch korrekt, logisch schlüssig, ausreichend fundiert. Die Betrachtung ist vollständig (alle möglichen Schlüsse werden einbezogen). Die Argumentationsbasis ist sinnvoll gewählt, sachlich, logisch und formal korrekt bzw. widerspruchsfrei. Die Argumentationskette ist vollständig, enthält aber auch keine überflüssigen Schritte. Sie ist nachvollziehbar, schlüssig, sprachlich korrekt. |
| 3 Punkte | Die Argumentation ist im Wesentlichen geeignet. Schlussfolgerungen werden jedoch nicht immer explizit dargelegt. Einzelne Argumente/Folgerungen sind ungenau oder nicht ausreichend fundiert. Die Argumentationskette ist nicht immer ganz schlüssig. |
| 2 Punkte | Grundzüge einer Argumentation sind erkennbar. Die Betrachtungen sind jedoch unvollständig oder die Grundlage der Folgerungen/Argumente ist nicht angemessen. Es treten (kleinere) mathematische oder logische Fehler auf. Die Argumentation ist teilweise schlecht nachvollziehbar, enthält Sprünge/Lücken. |
| 1 Punkt | Einzelne Schlüsse werden gezogen. Sie beruhen jedoch nicht auf hinleitenden Verfahren/angemessenen Argumenten, sind mathematisch oder logisch falsch. Die Untersuchung ist oberflächlich/voreilig. |
| 0 Punkte | Es werden keine Folgerungen formuliert oder Argumentationen vorgenommen. |

7. Diskutieren und Werten

Die Schüler sollen nach Analyse der Eigenschaften der Folge diese mit dem physikalischen Vorgang vergleichen und auf dieser Grundlage die Eignung des entwickelten Modells zur Beschreibung des physikalischen Prozesses beurteilen. Die Wertung kann kurz und prägnant erfolgen, da eine Analyse bereits vorliegt, sollte aber fundiert, schlüssig und sachlich sein.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Die physikalischen Eigenschaften werden den mathematischen gegenübergestellt, so dass eine Basis für die Wertung vorliegt. Eine korrekte, sachliche Folgerung auf die Brauchbarkeit des Modells wird formuliert. Analyse und Folgerung stehen in logischem Zusammenhang (schlüssige Folgerung). Die Argumente sind sachlich, logisch, formal korrekt. Die Wertung ist eindeutig, nachvollziehbar, (fach-)sprachlich richtig. |
| 3 Punkte | Eine sachliche Analyse und Wertung liegt vor, enthält jedoch formale Fehler, die Fachsprache wird unsicher verwendet oder die Argumentation ist nicht ganz vollständig. Analyse und Wertung betreffen nicht die relevanten Eigenschaften. Es findet keine Gegenüberstellung mathematische - physikalische Eigenschaften statt. |
| 2 Punkte | Analyse und Wertung finden statt, die Argumentation ist z. T. jedoch nicht schlüssig/ nicht ausreichend fundiert/voreilig oder Teilaspekte wurden falsch gewertet. |
| 1 Punkt | Die Argumentation enthält sachliche oder mathematische Fehler, ist oberflächlich/sehr unvollständig. Es findet keine angemessene Analyse, keine sachliche, begründete Wertung statt, z. B. „realistisch“ (ohne jeglichen Kommentar). |
| 0 Punkte | Es findet keine Analyse und Wertung statt. |

## 3.3 Rückmeldung anhand differenzierter Rückmeldungsbögen

Um den Schülern ihre individuellen Stärken und Schwächen bewusst zu machen, bedarf es einer Rückmeldung, die

- differenzierend ist, d. h. unterschiedliche Kompetenzen voneinander trennt und
- individuell ist, d. h. sich auf die persönlichen Fähigkeiten und Eigenschaften des angesprochenen Schülers bezieht.

Differenzierung wird erreicht, indem die für die Leistungsfeststellung verwendete Unterscheidung verschiedener mathematischer Kompetenzen (vgl. 3.2) für die Rückmeldung beibehalten wird, also keine Zusammenfassung wie z. B. bei der Notenbildung erfolgt. Eine weitere Zusammenfassung würde den Informationsgehalt der Rückmeldung und somit die Möglichkeiten der Formulierung konkreter lernfördernder Hinweise entscheidend verringern (vgl. Harvard Group 1995).

Individualisierung bedingt ein Abwenden von vergleichenden Maßstäben, welche das Arbeiten in einer Lerngruppe mit sich bringt (vgl. Wunder 2002, S. 62): „Die allgemeine Entwicklung des Jugendlichen soll im Vordergrund stehen, das Verhältnis zum Stoff ist nur ein Aspekt unter vielen; zudem soll das je individuelle Verhältnis zum Stoff maßgebend werden, nicht das vom Lehrer oder der Gruppe vorgegebene Fortschreiten“ (Wunder 2002, S. 62). Nach Wunder macht aber erst die radikale Individualisierung des Lernens, „bei der der Schüler mit Hilfe des Lehrers sein Interesse, seine Schwerpunkte, seinen Fortgang im jeweiligen Sachgebiet individuell definiert“ individualisierende Leistungsbeurteilung notwendig. Da solche Forderungen von der Praxis der Schule (noch) weit entfernt sind, stellt sich die Frage, wie Individualisierung der Leistungsbeurteilung gefördert werden kann, ohne eine radikale Individualisierung des Unterrichts vorauszusetzen. Wunder schlägt als Weg zur Reform der Leistungsbeurteilung vor, das Portfolio mit der herkömmlichen Note zu kombinieren.

Hier wird ein anderer Weg der individuellen Begegnung mit Schülerleistungen gewählt, der versucht, gemeinsame Standards, in Form der kompetenzorientierten Beurteilungskriterien zu berücksichtigen, aber individuelle Umsetzungen dieser Standards zuzulassen und zu unterstützen.[76] Das heißt, der individuelle Weg wird anerkannt und in seinen Besonder-

[76] Nach Arnold und Jürgens (2001, S. 27) können Lern- und Leistungsförderung nur erfolgreich durchgeführt werden, wenn „die unterrichtliche Lern- und Leistungskultur einschließlich der Feedback-Kultur an die

heiten analysiert. Seine Qualität wird anhand gemeinsamer Standards bestimmt. Diese Einschätzung wird in der Rückmeldung wiederum am individuellen Weg beschrieben. Von den aufgezeigten Schwachstellen einer Aufgabenbearbeitung können (auch vom Schüler selbst) Ansätze für eigenständige Bemühungen abgeleitet werden.

Die Rückmeldung der aufgabenbezogenen Leistungen findet anhand eines Beurteilungsbogens statt (vgl. Beispiel 4, Beispiel 8). Zunächst erfolgt eine quantitative Angabe des dargelegten Niveaus zu jeder gezeigten Kompetenz, gemäß der innerhalb der Leistungsfeststellung ermittelten Qualität. Die quantitative Rückmeldung in Form von Punkten ist den Schülern vertraut. Sie ermöglicht eine schnelle Einordnung der Leistung und die Darstellung der Leistungsentwicklung (vgl. 3.4, Harvard Group 1995). Die quantitative Beurteilung wird dem Schüler anhand seines Lösungsweges verbal[77] erläutert, wofür auch die üblichen Kommentare am Rand der Lösung geeignet sind. Anschließend erfolgt eine individuelle Einordnung der Leistung z. B. anhand früherer Aufgaben (individuelle Bezugsnorm) oder auch der sonst vom Schüler gezeigten Persönlichkeitsmerkmale. Beispielsweise können im Unterricht sehr aktive und argumentationsfreudige Schüler dazu aufgefordert werden, auch in schriftlichen Arbeiten Schlussfolgerungen zu begründen. Die Kombination von individueller und kriterialer Bezugsnormorientierung hat innerhalb einer pädagogisch verbesserten Beurteilungspraxis besondere Bedeutung: „Um für die Adressaten die Aussagen einordenbar zu machen, bedarf es der Mitteilung darüber, welche individuellen und/oder für alle Schüler verbindlichen Anforderungen während des Berichtszeitraumes erreicht werden sollen und welche von dem betreffenden Schüler bis zu welchem Grad erfüllt wurden“ (Arnold/Jürgens 2001, S. 39). Die soziale Bezugsnorm wird für die schulische Leistungsbeurteilung nicht für geeignet gehalten (vgl. Arnold/Jürgens 2001, S. 47). Für die Zuordnung eines Niveaus wurden ausschließlich sachbezogene Kriterien verwendet. Innerhalb der verbalen Erläuterungen wird aber bei einem guten Lernklima auch ein indirekter sozialer Vergleich für möglich und hilfreich bei der Einordnung der eigenen Leistungen gehalten, zum Beispiel der Hinweis auf eine „beispielgebend exakte Darlegung“ oder auf einen „besonders kreativen Ansatz“ oder darauf, dass nun der „Anschluss an das Argumentationsniveau der Klasse erreicht wurde“.

---

Verschiedenartigkeit der Schüler angepasst wird, ohne den gemeinsamen Rahmen der Lehrpläne auf das zusammen Erreichbare aus dem Blick zu verlieren“.

[77] Vorteile verbaler Leistungsbeurteilungen werden z. B. von Arnold und Jürgens 2001 (S. 31ff.) beschrieben.

Derartig unterschiedliche Perspektiven in der Rückmeldung werden auch von Arnold und Jürgens (2001, S. 101) für die Beurteilungsstruktur für Lernbereiche in Textzeugnissen, die im Rahmen eines Schulforschungsprojektes entwickelt wurden (Arnold et al. 2000), vorgeschlagen, u. a.:

- Beurteilung der Leistung als
  Beschreibung der Aspekte des Lernstands, der erreichten Lernfortschritte und der genutzten Lernwege einschließlich der Würdigung origineller Leistungsmerkmale,
  Einschätzung der aufgabenspezifischen Anstrengung,
- Beschreibung der Lerndefizite als
  präzise Benennung korrigierbarer Defizite und ggf. Hinweise auf deren Behebung,
  Andeutung von Lernrückständen, die nicht kurzfristig behebbar sind,
- Bewertung des Lernstands als
  sachnormorientierte Maßzahl (z. B. Anteil der richtigen Lösungen),
  sachnormorientierte Ziffernzensur,
- Einschätzung der Position im Leistungsspektrum der Klasse
  Positionierung im Leistungsdrittel (oberes, mittleres, unteres),
  Positionierung bzgl. Durchschnitt (z. B. über-, unter-, durchschnittlich).

Diese Aspekte sollen auch bei der hier vorgenommenen aufgabenspezifischen Rückmeldung berücksichtigt werden, wenn auch nicht systematisch, sondern situationsgemäß. Eine Zensurenfindung ist in der Erprobung nicht vorgesehen, die Rückmeldung dient hier als Ergänzung der üblichen Notengebung.

Bei der individuellen Beurteilung sind zwei Prinzipien leitend:

a) Der Schüler soll seine eigenen Kompetenzen erfahren, Erfolgserlebnisse erleben und zum Mathematiklernen motiviert werden bzw. seine Motivation für das Fach aufrechterhalten (vgl. Weinert 1999, S. 24/25, Büchter/Leuders 2005, S. 189).
b) Dem Schüler sollen seine persönlichen Stärken und Schwächen innerhalb des Spektrums mathematischer Kompetenzen bewusst werden, so dass er daraus Ansatzpunkte für eigenständige Bemühungen zur Verbesserung seiner Kompetenzen ableiten kann.

Die individuelle Rückmeldung erlaubt es dabei die verbale Formulierung der Beurteilung den Persönlichkeitsmerkmalen des betreffenden Schülers anzupassen, Lob und Kritik geeignet zu dosieren. Eine der wichtigsten professionellen Funktionen des Lehrers ist es, die Bedürfnisse eines einzelnen Schülers zu bestimmen und entsprechend Bemerkungen, Kommentare, Vorschläge, Fragen, auch Hilfen zu variieren (vgl. Christiansen/Walther 1986, S. 268). Dazu gehört auch die individuell zugeschnittene und lernprozessfördernde Rückmeldung auf Anstrengungen von Seiten der Schüler.

Lange (2002, S. 130) führt Grundbotschaften auf, die seine Kommentare beim Umgestalten der Leistungsbeurteilung in eine dialogorientierte Form leiten und dem Anliegen der Rückmeldung differenzierter Beurteilungen mathematischer Kompetenzen entsprechen:

- Ich will deinen Überlegungen folgen und dich verstehen.
- Ich will dir sagen, dass du etwas Wichtiges/Bedeutendes geleistet hast.
- Ich will dir aufzeigen, was dir gelungen ist und was du noch nicht erreicht hast.
- Ich will dir Ratschläge für deine persönliche Weiterarbeit geben.
- Ich will dich mit Kritik konfrontieren, auch wenn es dir unangenehm ist, aber die Kritik soll so ausfallen, dass du konstruktiv damit umgehen kannst oder dir ein positiver Ausweg bleibt.
- Ich will dich mit den Leistungen der anderen in der Gruppe vergleichen, ohne dass du dich ausgegrenzt fühlen musst, so dass du lernen kannst, mit deinen Stärken und Schwächen umzugehen.

Es folgt die exemplarische Darstellung eines aufgabenspezifischen individuellen Beurteilungsbogens (komprimiert). Beispiele ausgefüllter Beurteilungsbögen befinden sich in 4.2.3.

Beispiel 4
Beurteilungsbogen zur Aufgabe 11B2.1 „Absorption von Licht“

Einschätzung der Bearbeitung der Aufgabe „Absorption von Licht“

Name:

| Mathematische Kompetenz | Einschätzung | Bemerkung |
|---|---|---|
| Grundwissen (GW) | | |
| Übersetzen und Interpretieren (DI) | | |
| Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE) | | |
| Ausführen formaler Verfahren (FO) | | |
| Ausführen algebraischer Operationen (FO) | | |
| Schlussfolgerungen ziehen, mathematisch Argumentieren (KA) | | |
| Diskutieren und Werten (KA) | | |
| Weitere Bemerkungen/besondere Leistungen | | |

## 3.4 Dokumentation der Leistungsentwicklung

Anders als bei inhaltsbezogenen Beurteilungsmethoden, wie den üblichen Klassenarbeiten, steht bei kompetenzorientierten Verfahren nicht ein mathematischer Inhalt mit seinen unterschiedlichen Aspekten sondern eine mathematische Kompetenz, ausgeführt an unterschiedlichen mathematischen Inhalten, im Vordergrund. Dazu sind die Leistungen eines Schülers bezüglich einer mathematischen Kompetenz bei der Bearbeitung von Aufgaben unterschiedlicher Inhalte und Stoffgebiete aufzunehmen.

Die Aufnahmen von Kompetenzen über viele und vielfältige Aufgaben hat des Weiteren den Vorteil, dass situationsabhängige Effekte punktueller Leistungsbeurteilungen wie einzelner Aufgaben oder Klassenarbeiten ausgeglichen aber auch analysiert werden können. Die Bedeutung häufiger und unterschiedlicher Bewertungssituationen begründet sich vor allem in der Unsicherheit der Ableitung von Kompetenzeinschätzungen aus situativ gezeigten Leistungen (Performanz) (vgl. Büchter/Leuders 2005, S. 166). Sacher (2001, S. 84) weist darauf hin, dass bei jeder Leistungsmessung die in Frage stehenden Kompetenzen meist nicht vollständig, sondern nur stichprobenartig[78] überprüft werden. Es werden stets nur Ausschnitte bzw. bestimmte Aspekte einer Kompetenz erfasst. Durch vielfältige Aufgaben können diese Aspekte und Ausschnitte ergänzt und zusammengefügt werden. Die Darstellung der Kompetenzdarlegungen zu unterschiedlichen Aufgaben kann Entwicklungstendenzen, stabile persönliche Ausprägungen (Stärken und Schwächen) aber ebenso inhalts- oder situationsabhängige Besonderheiten aufzeigen, die wiederum für den Lernprozess, auch den selbständigen, und die individuelle Förderung von Bedeutung sind.

Im folgenden Beispiel werden die Ergebnisse eines Schülers zu den Analysisaufgaben der in Kapitel 4.2 beschriebenen Fallstudie, differenziert in die fünf Komponenten des Beurteilungssystems, dargestellt, um eine mögliche Dokumentationsform vorzustellen. Die Dokumentation ihrer Leistungen und die Darstellung ihrer Leistungsentwicklung können die Schüler durchaus eigenverantwortlich vornehmen. Dabei können sie ihnen angenehme Darstellungsmöglichkeiten wählen und sich als Nebeneffekt im Umgang mit Tabellenkalkulationsprogrammen üben. Ihre Bearbeitungen und die dazugehörigen Beurteilungen

[78] Zum Stichprobenfehler (vgl. Sacher 2001, S. 84): Prüfungen liegt meistens nur eine Stichprobe der Aufgaben eines Stoffgebietes zu Grunde. Das eigentliche Können der Schüler („Grundkönnen“) wird unvollständig erfasst. Ein Schüler kann nur ein ausschnitthaftes „Prüfungskönnen“ demonstrieren und dabei Glück oder Pech haben, je nachdem, ob er mehr über seine Stärken oder seine Schwächen geprüft wird. Auf Grundlage seines „Prüfungskönnens“ wird jedoch in der Regel ein Urteil über sein „Grundkönnen“ gefällt.

können die Schüler sammeln und in einem Portfolio zusammenstellen. Beigefügt werden kann dem auch die selbst erstellte Darstellung der Leistungsentwicklung sowie eine selbstkritische Reflexion und Einschätzung der erbrachten Leistungen.

Eine komprimierte Dokumentation in Form einer tabellarischen Auflistung der kompetenzspezifischen Leistungen zu unterschiedlichen Aufgaben wird von der Harvard Group (1995) vorgestellt. In der hier gewählten graphischen Darstellung werden Leistungsunterschiede bei unterschiedlichen Aufgaben besonders deutlich.

Beispiel 5
Ergebnisse eines Schülers zu den Analysisaufgaben der Fallstudie 2 (vgl. 4.2)

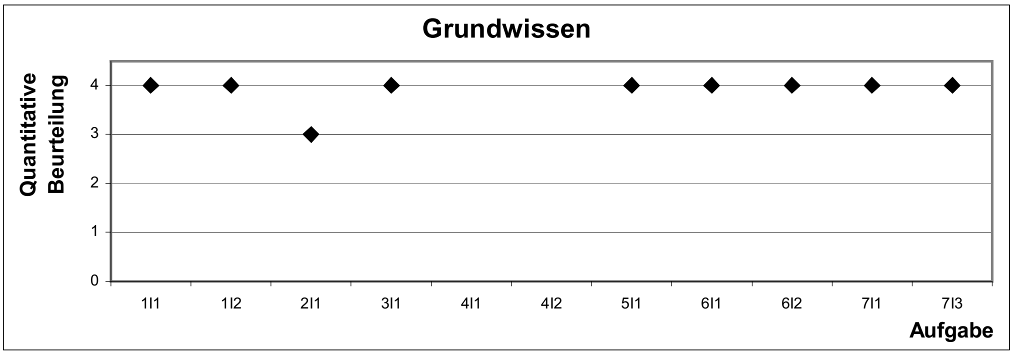



Abb. 3/1: Leistungen von Schüler 1 im Grundwissen

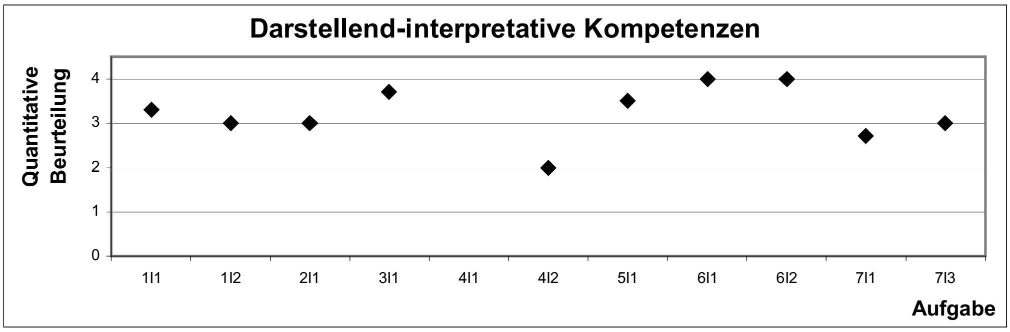



Abb. 3/2: Leistungen von Schüler 1 im darstellend-interpretativen Bereich

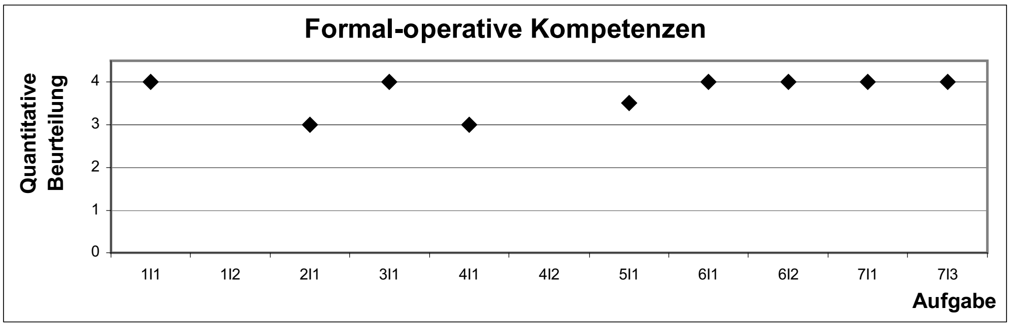



Abb. 3/3: Leistungen von Schüler 1 im formal-operativen Bereich

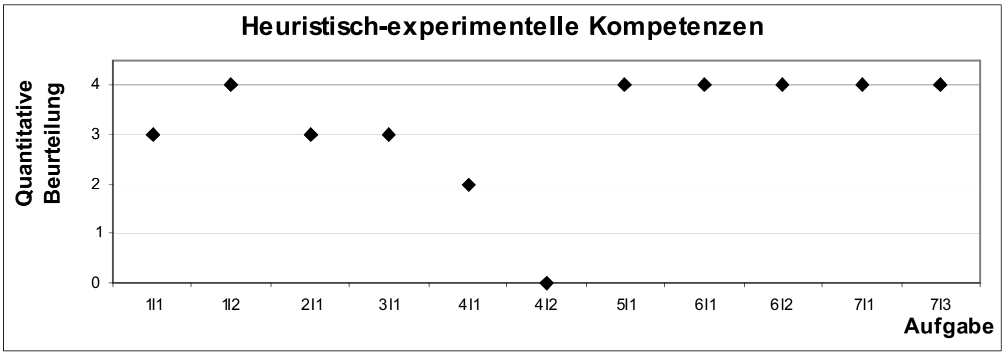



Abb. 3/4: Leistungen von Schüler 1 im heuristisch-experimentellen Bereich

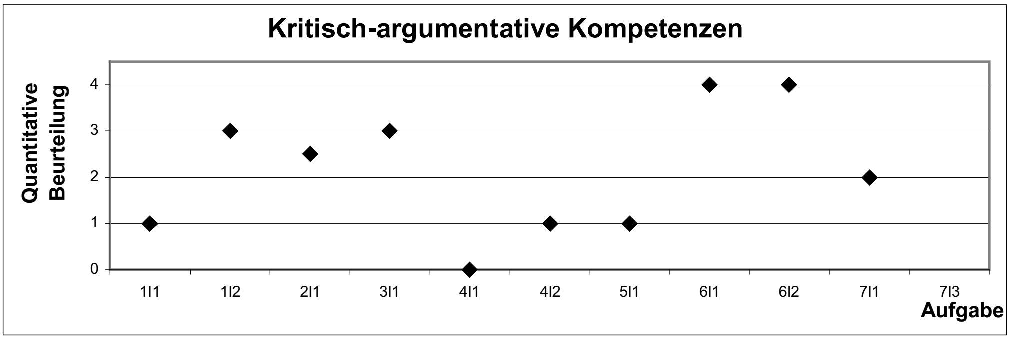



Abb. 3/5: Leistungen von Schüler 1 im kritisch-argumentativen Bereich

Kommentar:

- Der Schüler zeigt durchweg ein sehr hohes Grundwissen: Die Inhalte aus dem Stoffgebiet Analysis werden sehr gut beherrscht.
- Darstellungen und Übersetzungen gelingen in der Tendenz gut, wobei es insbesondere beim graphischen Darstellen aufgabenabhängige Schwankungen gibt.
- Heuristisch-experimentelle Anforderungen werden bis auf Ausnahmen gut bis sehr gut erfüllt, wobei eine steigende Tendenz interpretiert werden kann (bei den eher algorithmischen Aufgaben am Ende der Stoffeinheit, z. B. Extremwertaufgaben). Für den Zwischenwertsatz (vgl. Anhang 1.3) konnte keine Beweisidee gefunden werden.
- Der formal operative Bereich ist eine Stärke des Schülers, insbesondere das Ausführen formaler Verfahren und das Ausführen algebraischer Operationen. Kleinere Abstriche gibt es bei dem Gebrauch der formalen Fachsprache.
- Die Leistungen im kritisch-argumentativen Bereich zeigen deutliche Schwankungen, die vom speziellen Inhalt der Argumentation abhängig sind. Eine Tendenz der Leistungsentwicklung ist (noch) nicht erkennbar.

## 3.5 Reflexion des erstellten Konzeptes anhand der Kriterien einer kompetenzorientierten Leistungsbeurteilung

Im Folgenden wird untersucht, ob das erstellte Konzept zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen die in 1.5.2 zusammengestellten Kriterien an die Weiterentwicklung der Leistungsbeurteilung erfüllt. Ähnlich wie bei der objektiven Aufgabenanalyse (vgl. 2.1) wird an dieser Stelle überprüft, ob das aufgestellte Konzept diese Kriterien erfüllt. An späterer Stelle (6.2) wird kontrolliert, ob auch mit der realisierten Umsetzung (Kapitel 4) die Kriterien erfüllt werden konnten (realisierte Qualität).

Vielfältige Leistungen werden anerkannt

Das Konzept wurde auf die Beurteilung schriftlicher selbständiger Bearbeitungen mathematischer Aufgaben eingeschränkt. Innerhalb dieses Rahmens kann jedoch bei entsprechender Aufgabenauswahl die gesamte Breite mathematischer Aktivitäten einbezogen werden. Das Konzept ist gerade so ausgelegt, dass es sich auf mathematische Kompetenzen beschränkt, diese dafür aber in ihrer ganzen Breite zu berücksichtigen versucht. Die Aufgaben sind methodisch offen, so dass die Schüler ihren Fähigkeiten und Neigungen entsprechende Zugänge zu den Problemstellungen wählen können. Wenn möglich, wird durch eine weitere Öffnung der Aufgabenstellung (Ziel oder Ausgangssituation) die Vielfalt des erwarteten Lösungsspektrum zusätzlich erhöht. Dadurch, dass in der Umsetzung die Aufgaben als Hausaufgaben bearbeitet werden, wird ein individueller Weg, einschließlich Hilfsmittel und Arbeitsorganisation, unterstützt.

Der Lernprozess findet Berücksichtigung

Die gewählte Differenzierung der Aktivitäten und das System zur Auswahl geeigneter Aufgaben garantiert einen hohen Anteil prozessbezogener Kompetenzen. Die Einschätzung bezüglich aller vier Kompetenzbereiche bedingt eine genaue Analyse des Lösungsweges und des Ergebnisses. Die aufgabenspezifischen Beurteilungskriterien erlauben, dass auch diese schwieriger zu beurteilenden Kompetenzen kontrolliert und transparent quantifiziert werden können.

Leistungsbeurteilung ist verbunden mit differenzierten, förderungsorientierten Rückmeldungen

Das Beschreiben individueller Stärken und Schwächen der Schüler ist ein wichtiges Ziel des Konzeptes (vgl. Risse 2006). Dies zum einen, um die Entwicklung eines realistischen fachbezogenen Selbstkonzeptes zu unterstützen und zum anderen, um Ansatzpunkte für das eigenständige Weiterlernen zu geben. Die Konzeption der Beurteilungsbögen ist, insbesondere durch die Kombination von kriteriumsorientierter und individueller Bezugsnorm, auf eine differenzierte und förderungsorientierte Rückmeldung ausgerichtet.

Die häufige, regelmäßige Anwendung der Beurteilung erlaubt eine Einbindung von Diagnose in den Lernprozess. So können Rückmeldungen bereits während des Lernens und Arbeitens genutzt werden. Die Vermittlung der Bewertungskriterien kann das zielorientierte Lernen unterstützen.

Leistungen sind sichtbar und öffentlich

Auch in dieser Beurteilungsform werden die Leistungen der Schüler durch Punkte und verbale Kommentare verschlüsselt. Auf diese Weise ist eine Leistungsentwicklung darstellbar.

Die Leistungen der Schüler selbst, hier beim eigenständigen Bearbeiten anspruchsvoller Aufgaben können sichtbar gemacht werden, wenn die Schüler ausgewählte Arbeiten in einem Portfolio sammeln. Das Beifügen der zugehörigen Beurteilungsbögen und selbsterstellter Dokumentationen ihrer Leistungsentwicklung hilft ihre Leistungen einzuordnen. Auf diese Weise können auch besondere Unterrichtskonzepte, wie die in den Klassen der Netzwerkschulen, der Öffentlichkeit demonstriert werden.

Eine sachliche Kommunikation über Leistungen wird hergestellt

Zunächst weist das Beurteilungskonzept durch die offengelegte Differenzierung eine hohe Transparenz auf. Durch die gemeinsame Erarbeitung oder Diskussion von Beurteilungskriterien kann dies verstärkt werden. Beide Aspekte sind die Grundlage der sachlichen Kommunikation über Leistung, eingeleitet durch den ausführlichen Beurteilungsbogen. Dieser zeigt, dass der Lehrer die Anstrengungen des Schülers bei der Bearbeitung von Problemstellungen würdigt und ihn mit einer differenzierten und förderungsbezogenen Rückmeldung weiter unterstützen will.

Eine Selbstbewertung ist primär nicht vorgesehen. Sie kann aber anhand der Beurteilungskriterien und Beurteilungsbögen ohne Aufwand ergänzt werden. Es ist leicht, den Schülern den zur Aufgabe gehörenden Beurteilungsbogen zur Verfügung zu stellen, was die Transparenz der Anforderungen erhöht und eine Selbsteinschätzung vor Abgabe der Bearbeitung erlaubt.

Leistungsbeurteilung unterstützt individuelles Lernen, aber auch das Erreichen gemeinsamer hoher Standards

Individualisierung wird erreicht durch das Vermeiden sozialer Vergleiche, vor allem aber durch ein Einstellen auf den individuellen Lösungsweg des Schülers. Eine Beispiellösung dient dem Beurteilenden lediglich um zu erkennen, welche Kompetenzen zur Bearbeitung der Aufgabe erforderlich sind und welche Kompetenzbereiche eingeschlossen werden. Ohne eine solche Lösung wäre die objektive Aufgabenanalyse nicht möglich, denn erst beim eigenen Lösen können Potenzial und Anforderungen der Aufgabe eingeschätzt werden. Bei der Beurteilung stellt sich der Auswertende auf den individuellen Lösungsweg ein, nur die Kompetenzen, die dafür nötig sind, werden bewertet, nicht die objektiv möglichen. Dadurch hat im Prinzip jeder Lösungsweg sein eigenes Bewertungsschema.

Für die Beurteilung einer Kompetenz gibt es einen gemeinsamen kriterienbezogenen Maßstab. So sind beispielsweise die Kriterien für eine gute Argumentation für alle Schüler gleich. Das gewählte Differenzierungssystem bezieht die Kompetenzbereiche der Bildungsstandards ein. Bei einer ausgewogenen Berücksichtigung der vier Aktivitätsbereiche wird somit einiges für die Umsetzung der Bildungsstandards getan. Wichtig bleibt aber zu kontrollieren, ob die Schüler auch die intendierten Aktivitäten ausführen (vgl. Kapitel 5), wodurch sich die Bedeutung der Analyse der Schülerarbeiten erklärt.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass trotz der in 3.1 beschriebenen Abgrenzung des Konzeptes der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen eine Form der Leistungsbeurteilung vorliegt, die aktuellen Anforderungen genügt.

# 4 Exemplarische Erprobung des Konzeptes der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

Das in Kapitel 3 vorgestellte Konzept zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen wurde in Fallstudien punktuell schulpraktisch erprobt. Um ein schulpraktisch umsetzbares Konzept zu entwickeln, wurde die Konzeptentwicklung parallel zur Erprobung fortgeführt. Dies hatte zur Folge, dass der organisatorische Rahmen und die Konkretisierung des theoretischen Konzeptes zwischen den einzelnen Fallstudien verändert wurden. Ziel der Erprobung war, die prinzipielle Umsetzbarkeit und die Vor- und Nachteile einer differenzierten und kompetenzorientierten Form der Leistungsbeurteilung auszuloten, sowie ein methodisches Vorgehen zu entwickeln, welches versucht didaktische Ansprüche mit den Gegebenheiten des Schulalltags in Einklang zu bringen. Dabei waren die folgenden Fragen leitend:

1. Erfüllt das Konzept den Anspruch, in differenzierter Form die mathematischen Kompetenzen der Schüler und ihre individuellen Stärken und Schwächen zu erfassen?
2. Ist das Konzept geeignet, individuelle Stärken und Schwächen bewusst zu machen und das selbständige Lernen zu unterstützen?
3. Kann das Konzept zur Beurteilung und Verbesserung der Unterrichtsqualität beitragen, indem es dem Lehrenden wichtige Informationen zur Ausgewogenheit der mathematischen Förderung und Forderung und zur Kompetenzentwicklung der Klasse liefert?
4. Welche weiteren Vorteile und welche Nachteile sind mit dem Konzept verbunden und welche Schwierigkeiten können bei der Umsetzung auftreten?

Insgesamt wurden vier in sich abgeschlossene Fallstudien mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunktsetzungen bzgl. der Konzeptentwicklung (vgl. Tabelle 4/1) durchgeführt. Alle fanden in der Sekundarstufe II (elfte und zwölfte Klasse) an Berliner Netzwerkschulen statt. Das Berliner Netzwerk mathematisch-naturwissenschaftlich profilierter Schulen[79] umfasst derzeit vier Berliner Gymnasien, in denen mathematisch interessierte Jugendliche, in enger Zusammenarbeit mit der Humboldt-Universität zu Berlin, gezielt gefördert werden.

[79] Für nähere Informationen zum Berliner Netzwerk mathematisch-naturwissenschaftlich profilierter Schulen: http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/netzwerk.html (Stand 06.07.2007).

Tab. 4/1: Fallstudien zur Erprobung und Weiterentwicklung des Konzeptes der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

| Zeitraum | Schule, Klasse, Anzahl der Schüler | besondere Zielstellungen |
|---|---|---|
| 9/2002 bis 7/2003 | Andreas-Oberschule (Gymnasium), 11. Klasse, 5 Schüler | Einschätzung der prinzipiellen Umsetzbarkeit einer differenzierten Leistungsbeurteilung, Einschätzung der Nützlichkeit und Akzeptanz der differenzierten Leistungsbeurteilung Aufnahme von schulischen Anforderungen an die methodische Konkretisierung |
| 8/2003 bis 2/2004 | Andreas-Oberschule (Gymnasium), 11. Klasse, 10 Schüler | Erprobung eines methodisch und organisatorisch veränderten Konzeptes, Entwicklung und Erprobung von aufgabenspezifischen Beurteilungskriterien |
| 8/2003 bis 3/2004 | Andreas-Oberschule (Gymnasium), 12. Klasse, 5 Schüler | Erprobung des Beurteilungskonzeptes durch die Fachlehrerin, Einschätzung der intersubjektiven Abweichung der Zuordnung von Kompetenzniveaus bei der Verwendung aufgaben- und kompetenzspezifischer Beurteilungskriterien, Erweiterung des Aufgabenspektrums |
| 3/2004 bis 6/2004 | Herder-Oberschule (Gymnasium), 11. Klasse, 21 Schüler | Erprobung des Beurteilungskonzeptes in einer größeren Lerngruppe und einem anderen schulischen Umfeld, Analyse der von den Schülern ausgeführten Aktivitäten und Vergleich mit den intendierten Aktivitäten zum Zwecke der Aufgabenentwicklung (Kapitel 5) |

## 4.1 Kontinuierliches differenziertes Erfassen mathematischer Kompetenzen

Mit der ersten schulpraktischen Erprobung der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen, die bereits zu einem frühen Zeitpunkt der Konzeptentwicklung stattfand, sollte die Eignung der Differenzierung in die vier Aktivitätsbereiche von Lechner (vgl. 1.3.1, Lechner 2002, S. 255ff.) für eine differenzierte und individuelle Beurteilung mathematischer Kompetenzen geprüft werden. Gleichzeitig sollten, in Zusammenarbeit mit Lehrern und Schülern, Anforderungen an eine schulpraktisch umsetzbare Methode der Kompetenzerfassung und -rückmeldung aufgenommen werden, um das Konzept weiter zu entwickeln und zu konkretisieren. Eine lange und intensive Erprobung wurde gewählt, um das Konzept der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen in unterschiedlichen Lernsituationen und unterschiedlichen Inhaltsgebieten zu testen.

### 4.1.1 Rahmenbedingungen

Die erste Erprobung fand im Schuljahr 2002/2003 in einer elften Klasse der Andreas-Oberschule (Gymnasium) im Bezirk Berlin Friedrichshain-Kreuzberg statt. An der Andreas-Oberschule wird in der Sekundarstufe II eine mathematisch profilierte Klasse geführt, die nach dem eigenständigen Rahmenplan[80] der Berliner Netzwerkschulen von Hochschullehrern des Institutes für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin unterrichtet wird. Anliegen des profilierten Unterrichts ist es, die Schüler intensiv im mathematischen Bereich zu fördern und zielgerichtet auf ein Studium im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich vorzubereiten. Der Unterricht unterscheidet sich im mathematischen Anspruch, oft auch im methodischen Vorgehen vom üblichen Mathematikunterricht Berliner Gymnasien, wobei es auch zwischen den Klassen und Netzwerkschulen Unterschiede gibt.

Die Erprobung innerhalb der Netzwerkschulen ergab sich zunächst aus der engen Zusammenarbeit zwischen der Arbeitsgruppe „Mathematik und ihre Didaktik“ der Humboldt-Universität zu Berlin und den dort unterrichtenden Lehrern[81]. Zum anderen ist vielen der mathematisch interessierten Schüler daran gelegen, selbständig an ihren (mathematischen) Kompetenzen zu arbeiten. Dafür kann eine Leistungsbeurteilung, welche differenziert über die individuellen Stärken und Schwächen der Schüler informiert, unterstützend wirken. Wechseln die Schüler wie an der Andreas-Oberschule in der Sekundarstufe II in profilierte Klassen, werden sie mit neuartigen Anforderungen konfrontiert. Wie die Befragung der Schüler zeigt (vgl. 4.1.4 und 4.2.6), wurden die Schüler in ihrem bisherigen Mathematikunterricht insbesondere in den Kompetenzbereichen kritisch-argumentativ und heuristisch-experimentell wenig gefördert und gefordert. Die differenzierte Beurteilung und Rückmeldung mathematischer Kompetenzen kann den Schülern zunächst die verschiedenen mathematischen Kompetenzen bewusst machen und ihnen dann helfen, ihre Stärken und Schwächen innerhalb dieses Spektrums zu erkennen. Die Schüler können die Rückmeldungen nutzen, um selbstbestimmt und zielgerichtet an ihren mathematischen Kompetenzen zu arbeiten.

---

[80] Der modifizierte Rahmenplan der Netzwerkschulen ist zu finden unter http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/Netzwerk/Rahmenplan.html (Stand: 06.07.2007).

[81] Die unterrichtende Lehrerin der ersten Untersuchungsgruppe, ist wissenschaftliche Mitarbeiterin der Arbeitsgruppe „Mathematik und ihre Didaktik“ am Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin.

Ein Vorteil für die Erprobung des Konzeptes war, dass innerhalb des Unterrichts eine vielseitige Förderung der Schüler stattfand. So konnten Aktivitäten aller vier Bereiche beurteilt werden, ohne den Unterricht zuvor erweitern zu müssen.

Die erste Erprobung begann mit sieben Schülern, die von unterschiedlichen Berliner Gymnasien und Gesamtschulen an die Andreas-Oberschule kamen, um ab der elften Klasse im mathematisch profilierten Kurs zu lernen. Zwei Schüler wechselten im Laufe des Schuljahres wieder in normale elfte Klassen. Die fünf Schüler, welche die elfte Klasse im profilierten Kurs absolvierten, sind mathematisch interessiert, zeigen jedoch keine auffälligen mathematischen Begabungen. Eine Aufnahmeprüfung erfolgte für diesen Kurs nicht. Die Schüler haben in der elften Klasse wöchentlich sechs Stunden Mathematik. Der Unterricht findet in Doppelstunden von jeweils 90 min statt.

Die Fallstudie fand folglich in einer besonderen Lernumgebung statt. Sie bezieht sich auf eine kleine Lerngruppe, die eine besondere mathematische Förderung genießt. Die Ergebnisse können nicht auf andere Lerngruppen übertragen werden. Ergebnisse dieser schulpraktischen Studie können Hinweise bezüglich der Möglichkeiten einer differenzierenden Leistungsbeurteilung sein, die Erprobungen in weiteren Lernumgebungen anregen können.

Der Einfluss der Untersuchung auf das Mathematiklernen der Schüler wurde so gering wie möglich gehalten. Der Unterricht selbst wurde nicht beeinflusst. Einige Unterrichtsbeobachtungen dienten dem Kennenlernen der Schüler und des Unterrichtskonzeptes. Vereinzelt wurden bei Hospitationen die Aktivitäten der Schüler im Unterricht analysiert, wobei eine ausgewogene Förderung beobachtet wurde. Auch die Leistungsbeurteilung der Schüler wurde nicht beeinflusst. Die Note der Schüler setzte sich weiterhin aus vier Klausuren und mündlichen Leistungen zusammen. Auch die Hausaufgaben flossen hier ein, wurden jedoch von der Lehrerin separat begutachtet. Zur differenzierten Beurteilung der bei den Aufgaben dargelegten Kompetenzen wurden, mit Einverständnis der Schüler und der Lehrerin, Kopien der Hausaufgabenbearbeitungen herangezogen. Die individuelle Rückmeldung der Ergebnisse fand zusätzlich zur üblichen Leistungsbeurteilung statt. Der sensible Bereich der Leistungsbeurteilung wurde somit nicht durch ein in Entwicklung stehendes Konzept „gestört“ und dennoch konnten die Schüler die Rückmeldungen nutzen.

### 4.1.2 Erfassen und Rückmelden der mathematischen Kompetenzen

Zur Beurteilung der mathematischen Kompetenzen der Schüler wurden alle im elften Schuljahr angefertigten schriftlichen Hausarbeiten der Schüler herangezogen (insgesamt 74 Aufgaben) sowie 12 Aufgaben aus Klausuren. Hausaufgaben wurden zweimal wöchentlich[82] gestellt und enthielten ein, zwei, selten drei, anspruchsvolle, z. T. komplexe Aufgaben. Sie dienten der Übung und Vertiefung, teilweise auch der Vorbereitung und Einleitung von Unterrichtsinhalten. In der ersten Untersuchung wurden überwiegend Aufgaben der Lehrerin genutzt. Vor der Beurteilung wurde analysiert, welche Aktivitäten mit der Aufgabe potenziell angeregt werden können.[83] Es zeigte sich, dass wichtige Kompetenzen der vier Bereiche von Lechner in ausreichendem Maße und ausreichender Vielfalt einbezogen wurden. In Absprache mit der Lehrerin flossen einige im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Aufgaben ein, insbesondere zu den Themen „Folgen reeller Zahlen“ sowie „Lineare Algebra“. Diese wurden in Form und Schwierigkeit den Schülern vertrauten Formaten angepasst. Einen Überblick über die Inhalte der insgesamt vier Stoffgebiete in den Bereichen Analysis und Lineare Algebra gibt Tabelle 4/2.

Tab. 4/2: Inhalte der Themengebiete der elften Klassen an Berliner Netzwerkschulen

| | |
|---|---|
| Folgen reeller Zahlen | Reelle Zahlenfolgen als spezielle Funktionen; Darstellung und Veranschaulichung von Zahlenfolgen; Beschränktheit und Monotonie von Folgen; Grenzwert, Konvergenz einer Folge; Häufungswerte; Satz von Bolzano-Weierstrass; Grenzwertsätze |
| Einführung in die Differenzialrechnung (Ganzrationale Funktionen, Stetigkeit, Ableitung) | Nullstellenermittlung ganzrationaler Funktionen; Stetigkeit von Funktionen; Nullstellensatz, Zwischenwertsatz, Satz vom Minimum/Maximum; Ableitung einer Funktion an einer Stelle; Zusammenhang Stetigkeit - Differenzierbarkeit; Begriff der Ableitungsfunktion; Zusammenhang zwischen Monotonie und Vorzeichen der ersten Ableitung; Ableitungsregeln |
| Anwendung der Differenzialrechnung | Relative Extrema einer Funktion; Hoch- und Tiefpunkte; Krümmungsverhalten und Wendepunkte eines Funktionsgraphen, absolute Extrema einer Funktion, Kurvendiskussionen; Extremwertaufgaben und andere Anwendungen; Newtonverfahren |
| Lineare Algebra | Lineare Gleichungssysteme; Lösungsbestimmung über das Gaußverfahren; Zusammenhang zwischen Dimension der Lösungsmenge und Anzahl der frei wählbaren Variablen; Struktur eines Vektorraumes; Linearkombination, Erzeugendensystem, Lineare Hülle, Basen als minimale Erzeugendensysteme, Lineare Unabhängigkeit, Unterräume; Dimension |

Zur Dokumentation der Kompetenzentwicklung wurde jeder Darlegung ein Kompetenzniveau und entsprechend eine Punktzahl zugeordnet. Die Bewertungsskala reichte von –1

[82] Daher kann von einer (nahezu) kontinuierlichen Aufnahme der Leistungen gesprochen werden.
[83] Eine ausführliche objektive Analyse der Aufgaben fand in der ersten Erprobung noch nicht statt.

(Kompetenz wurde nicht dargelegt) bis +2 (Kompetenz wurde sehr gut dargelegt). Zu den wichtigsten Kompetenzen jeder Aufgabe wurden die Anforderungen skizziert, die erfüllt werden mussten, um das höchste Kompetenzniveau zu erreichen (Erwartungsmaßstab). Weitere Kriterien wurden bei der ersten Untersuchung nicht aufgestellt und eingesetzt. Die Punktbewertungen wurden in einzelne Kompetenzen differenziert, zusammen mit einer Begründung der Einschätzung in Bewertungstabellen dokumentiert.

Während der ersten Studie erfolgte zweimal[84] eine Rückmeldung an die Schüler: nach Abschluss des Stoffgebietes Analysis und nach Abschluss des Stoffgebietes Lineare Algebra. Der für jeden Schüler angefertigte individuelle Kompetenzspiegel[85] informierte differenziert und ausführlich über die im Stoffgebiet gezeigten Leistungen:

- Der Mittelwert[86] aller im vorangegangenen Stoffabschnitt bei der Beurteilung erhaltenen Punktzahlen zu jeder Kompetenz gab einen Überblick über das erreichte Kompetenzniveau im normorientierten Vergleich.
- Die absolute Abweichung zur mittleren Punktzahl des letzten Stoffgebietes zeigte die Tendenz der Leistungsentwicklung (Einschätzung im individuellen Vergleich).
- Die formalen Bewertungen wurden stichpunktartig erläutert und kommentiert. Dabei wurde die individuelle Entwicklung hervorgehoben, z. T. gemeinsam mit Hinweisen zum Weiterlernen. In besonderen Fällen wurde die Leistung in Bezug zur gesamten Lerngruppe gesetzt, z. B. wenn es einem Schüler unter Anstrengungen gelang den Anschluss an die Lerngruppe zu erreichen. Die verbalen Kommentare sollten dem Schüler eine realistische Selbsteinschätzung erlauben und motivieren gezielt an seinen Leistungen zu arbeiten, weshalb sie individuell und in der Regel positiv formuliert wurden.
- Im Text „Hinweise aus den Daten“ wurden Auffälligkeiten und Besonderheiten in der Kompetenzentwicklung verbal beschrieben, individuelle Stärken und Schwächen nochmals herausgehoben und gezielte Hinweise zum selbständigen Lernen formuliert.

---

[84] In dieser ersten Fallstudie wurde eine Rückmeldung nach längerer Datensammlung der schnellen Rückmeldung vorgezogen, da erst eine gewisse Sicherheit über die Eignung des Konzeptes vorliegen sollte, bevor die Schüler einbezogen wurden.

[85] In den Fallstudien wurde bei der Rückmeldung zwischen Kompetenzspiegel und Rückmeldungsbogen unterschieden. Der Kompetenzspiegel bezieht sich auf Leistungen über einen größeren Zeitraum, der Rückmeldungsbogen auf die bei einer Aufgabe gezeigten Kompetenzen.

[86] Analog der Notenvergabe ist auch hier die Bestimmung des Mittelwertes über einen Zeitraum und somit über unterschiedliche Inhalte hinweg methodisch nicht korrekt, da im Regelfall keine lineare Skala vorliegt (vgl. Sacher 2001, S. 80ff, Leuders 2001, S. 298.). Den Schülern ist diese, in der Schule übliche, Rückmeldungsform jedoch vertraut und sie können die im Mittel von ihnen erreichten Leistungen gut einordnen. Über inhalts- oder aufgabenabhängige Schwankungen wird so nichts ausgesagt, die dargelegten Leistungen werden durch eine Ziffer verschlüsselt, was ein deutlicher Informationsverlust ist.

Beispiel 6
Individueller Kompetenzspiegel

**Individueller Kompetenzspiegel** **S4**

| Kompetenz | Mittelwert Lineare Algebra | Differenz zur Analysis | Bemerkungen |
|---|---|---|---|
| Grundwissen | 1,7 | 0,5 | Verbesserung in der Linearen Algebra, sichere Kenntnis der Unterrichtsinhalte |
| Übersetzen | 1,8 | 0,0 | eine Deiner Stärken |
| Interpretieren | 1,7 | 0,7 | große Verbesserung durch gute Leistungen vor allem beim graphischen Interpretieren |
| Formal Darstellen | 1,5 | 0,2 | weiter zu verbessern |
| Graphisch Darstellen | 1,4 | 0,6 | deutliche Verbesserung, aber noch weitere Steigerung möglich |
| Darstellend-interpretativ | 1,5 | 0,4 | |
| Formale Verfahren ausführen | 1,8 | 1,0 | super Verbesserung |
| Formale Operationen ausführen | 1,7 | 0,0 | |
| Formal-operativ | 1,8 | 0,5 | |
| Geeignete Lösungsstrategien finden | 1,7 | 0,1 | |
| Geeignete Beweisstrategien finden | 0,9 | 0,2 | weiter zu verbessern |
| Analysieren | 2,0 | 1,2 | super Verbesserung, beispielgebende Leistungen |
| Zusammenhänge herstellen | 1,75 | | |
| Heuristisch-experimentell | 1,6 | 0,3 | |
| Schlussfolgern | 1,4 | 0,5 | Verbesserung in der Linearen Algebra |
| Mathematisch Argumentieren | 0,6 | 0,3 | Verbesserung, aber noch Aufholebedarf |
| Beweisen | 0,6 | | |
| Kritisch-argumentativ | 1,0 | 0,6 | |

Hinweise aus den Daten:

Du konntest Dich in der Linearen Algebra weiter stark verbessern. Insbesondere beim Interpretieren und Analysieren sind Deine Leistungen beispielgebend. Der heuristisch-experimentelle Bereich ist auch hier Deine Stärke; insbesondere Deine cleveren und kreativen Lösungsansätze. Du hast sichtbar an Deinen (z. T. ehemaligen) Schwächen, wie dem fachgerechten Argumentieren, dem Ausführen formaler Verfahren und dem graphischen Darstellen gearbeitet und gute Fortschritte gemacht. Dort solltest Du unbedingt weiter dranbleiben. Vor allem beim Argumentieren kannst Du Dich noch steigern.

### 4.1.3 Schülerleistungen in unterschiedlichen Kompetenzbereichen

In diesem Abschnitt wird der Frage nachgegangen, ob anhand der gewählten Differenzierung die individuellen mathematischen Kompetenzen der Schüler und individuelle Stärken und Schwächen innerhalb des Spektrums mathematischer Kompetenzen, eventuell auch Besonderheiten in der individuellen Leistungsentwicklung aufgezeigt werden können.
Um aufzudecken, ob bei einem Schüler stabile Unterschiede bei seinen Leistungen in verschiedenen Kompetenzbereichen vorliegen, können die Leistungen eines Schülers in den vier Kompetenzbereichen für eine Stoffeinheit betrachtet werden.

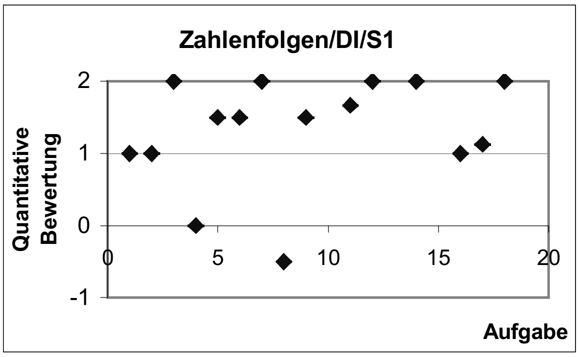



Abb. 4/1: Leistungen von Schüler 1 im darstellend-interpretativen Bereich

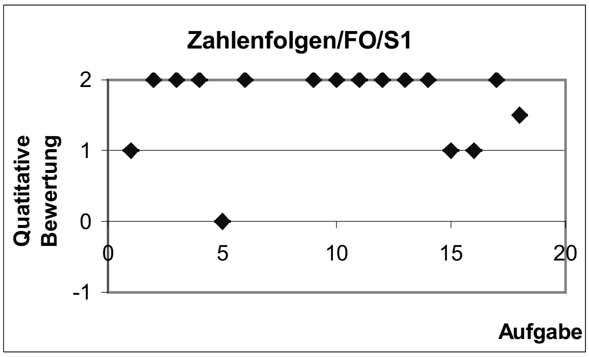



Abb. 4/2: Leistungen von Schüler 1 im formal-operativen Bereich

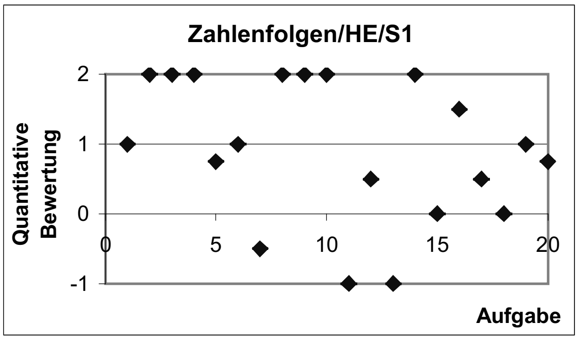



Abb. 4/3: Leistungen von Schüler 1 im heuristisch-experimentellen Bereich

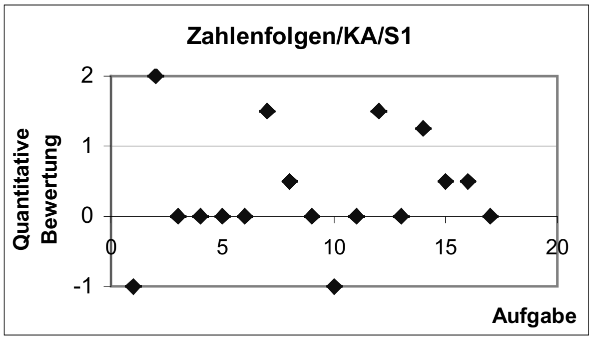



Abb. 4/4: Leistungen von Schüler 1 im kritisch-argumentativen Bereich

Die Abbildungen 4/1 bis 4/4 zeigen exemplarisch die Leistungen eines Schülers in der Stoffeinheit Reelle Zahlenfolgen differenziert in die vier Kompetenzbereiche. Dabei werden zwei Aspekte deutlich:

- Die Leistungsverteilungen zu den einzelnen Kompetenzbereichen weichen voneinander ab: Die Leistungen im Bereich formal-operativ (FO) sind, bis auf Ausnahmen, sehr gut. Die Leistungen im Bereich darstellend-interpretativ (DI) sind, bis auf Ausnahmen, gut bis sehr gut. Dagegen zeigen sich im Bereich heuristisch-experimentell (HE) große aufgabenabhängige Schwankungen zwischen sehr guten Leistungen und wenigen nicht ausreichenden Leistungen. Im Bereich kritisch-argumentativ (KA) sind die Schwankungen wieder geringer, hier liegt der Leistungsschwerpunkt jedoch bei einem unteren Niveau. Es zeigen sich somit Stärken des Schülers in den Bereichen formal-operativ und darstellend-interpretativ und eine Schwäche bezüglich des Argumentierens.

- Innerhalb der Kompetenzbereiche zeigen sich deutliche aufgabenabhängige Unterschiede. Die Kompetenzdarlegungen sind von der Art der Aufgabe und/oder vom speziellen angesprochenen Inhalt abhängig. Daraus ist zu schließen, dass sich wichtige Hinweise für die Förderung aus der tiefgehenden Analyse einzelner Aufgabenbearbeitungen erschließen, was für eine konkrete, aufgabenbezogene Rückmeldung spricht (vgl. 4.2).

Im Folgenden werden zwei Schülerarbeiten zu einer Aufgabe aus dem Stoffgebiet Reelle Zahlenfolgen vorgestellt und analysiert, die zeigen, wie bereits einzelne Aufgaben bestimmte Stärken und Schwächen der Schüler erkenntlich machen.

Beispiel 7

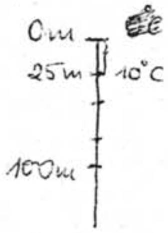
Schülerarbeiten zur Aufgabe „Temperatur im Erdinneren“

Aufgabenstellung:

Im Erdinneren wächst die Temperatur pro 100 m Tiefe um 3° C. In 25 m Tiefe beträgt die Temperatur 10° C.

a) Modelliere diesen Vorgang mit Hilfe einer Zahlenfolge. Finde eine rekursive und eine explizite Zuordnungsvorschrift.
b) Ist die gefundene Folge monoton und konvergent?
c) Welche Temperatur herrscht in 575 m Tiefe?
d) In welcher Tiefe beträgt die Temperatur 70° C?

6.3. $a_n$: die Temperatur in n-Meter Tiefe




die Temperatur wächst pro 100m Tiefe um 3°C, in 25m wächst die Temperatur um $\frac{3}{4} = 0{,}75$ °C

pro 1m wächst die Temperatur um $\frac{0{,}75}{25} = 0{,}03$ °C

An der Erdoberfläche ist die Temperatur $= 10°C - 0{,}75°C$
$= 9{,}25$ °C

$a_0 = 9{,}25$

$a_1 = 9{,}25 + 0{,}03 \quad = a_0 + 0{,}03$

$a_2 = 9{,}25 + 0{,}03 \cdot 2 \quad = a_1 + 0{,}03$

$a_3 = 9{,}25 + 0{,}03 \cdot 3 \quad = a_2 + 0{,}03$

....

$a_n = 9{,}25 + 0{,}03 \cdot n \quad = a_{n-1} + 0{,}03$

$\boxed{a_n = a_0 + 0{,}03 \cdot n \quad a_0 = 9{,}25}$ explizite Darstellung

$\boxed{a_n = a_{n-1} + 0{,}03}$ rekursive Darstellung

b) $a_n = a_0 + 0{,}03 \cdot n$ ist eine arithmetische Folge

$d = 0{,}03 > 0 \Rightarrow (a_n)\uparrow$

$a_n = 9{,}25 + 0{,}03 \cdot n$

$a_n$ ist bestimmt divergent.

c) $a_{575} = 9{,}25 + 0{,}03 \cdot 575$
$= 26{,}5$ °C

d) $a_x = 9{,}25 + 0{,}03 \cdot x$

$9{,}25 + 0{,}03x = 70$

$0{,}03x = 60{,}75$

$x = 2025$ (m)

Abb. 4/5: Bearbeitung der Aufgabe „Temperatur im Erdinneren“ von Schüler 1

Analyse der Bearbeitung von Schüler 1 (Abb. 4/5):

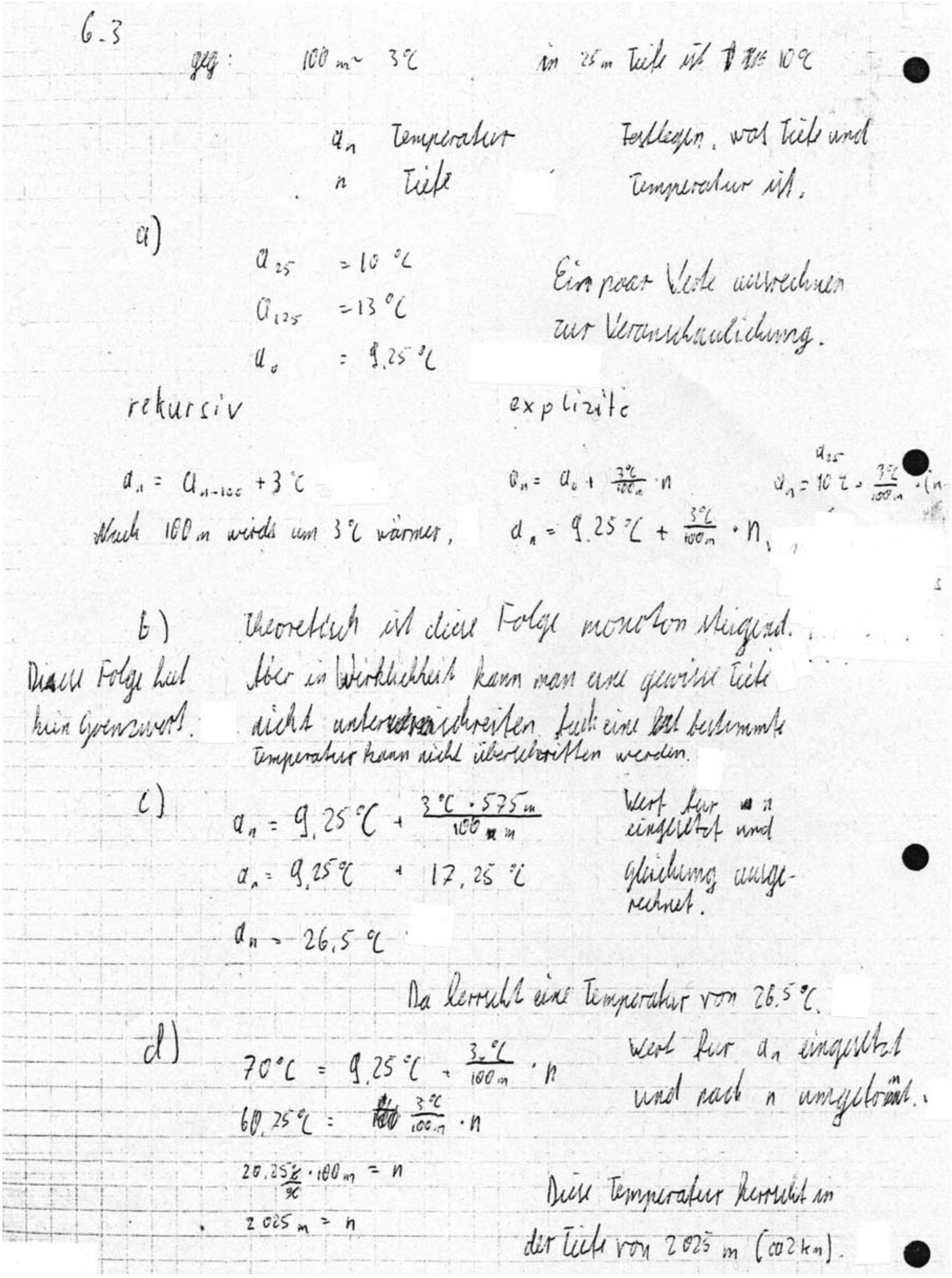
Der Schüler definiert zuerst ein Glied $a_n$ der Zahlenfolge und veranschaulicht sich die gegebenen Daten mit einer Skizze. Aus dem gegebenen Zusammenhang zwischen Tiefe im Erdinneren und Temperatur folgert er auf den Anstieg der Temperatur von der Erdoberfläche bis zu einer Tiefe von 25 Metern, auf den Temperaturanstieg pro Meter und auf die Temperatur an der Erdoberfläche. Er verwendet das lineare Modell bis zur Erdoberfläche: In gleichen Tiefenabschnitten wächst die Temperatur um den gleichen Betrag.

Im nächsten Schritt bestimmt er die Folgenglieder $a_0$ bis $a_3$. Die zielgerichtete, gut strukturierte Darstellung und Gegenüberstellung der Folgenglieder erlaubt eine Verallgemeinerung auf die explizite und die rekursive Darstellung der Zahlenfolge. Die Verallgemeinerung erfolgt rein formal, ohne Bezug zum physikalischen Problem, d. h. ohne abzuwägen, welche Darstellung für das physikalische Problem angemessen ist. Beispielsweise könnte diskutiert werden, ob der Wechsel auf den Bezugspunkt Erdoberfläche sinnvoll ist.

Auch in der folgenden Betrachtung der Monotonie wird rein formal analysiert und argumentiert. Sein Grundwissen erlaubt es dem Schüler, auf eine arithmetische Folge zu schließen. Aus der richtigen Zuordnung der Parameter kann auf einen positiven Anstieg und daraus auf eine monoton steigende Folge geschlossen werden. Die Divergenz wird nur benannt, nicht begründet. In diesem Aufgabenteil wird deutlich, dass Zusammenhänge hergestellt und formale Darstellungen richtig interpretiert werden können. Heraus sticht die effektive formale Darstellung und symbolische Argumentation.

In den Aufgabenteilen c) und d) werden die notwendigen Einsetzungen, Umstellungen und Berechnungen nachvollziehbar formal dargestellt und fehlerfrei ausgeführt.

Als Stärke dieser Bearbeitung ist die formale Prägnanz zu sehen. Die Übersetzung ins mathematische Modell ist korrekt, ebenso die innermathematische Lösung und Argumentation. Dabei findet jedoch eine Abkopplung vom Kontext statt. Es wird nur noch das formale mathematische Problem betrachtet, dessen Lösung nicht mehr zum physikalischen Ausgangsproblem in Bezug gesetzt wird. So wird beispielsweise das erstellte Modell auch nicht hinsichtlich seiner Eignung für eine reale Beschreibung diskutiert. Eine Überprüfung der Sinnhaftigkeit der ermittelten formalen Ergebnisse und des aufgestellten Modells wird in der Aufgabenstellung nicht explizit verlangt, steckt aber implizit in der Aufforderung „Modelliere“ (vgl. 1.3.2).


6.3

geg: 100 m ~ 3°C in 25 m Tiefe ist 10°C

$a_n$ Temperatur
n Tiefe
Festlegen, was Tiefe und Temperatur ist.

a)

$a_{25} = 10\,°C$

$a_{125} = 13\,°C$

$a_0 = 9{,}25\,°C$

Ein paar Werte ausrechnen zur Veranschaulichung.

rekursiv

$a_n = a_{n-100} + 3\,°C$

Nach 100 m wird's um 3°C wärmer.

explizite

$a_n = a_0 + \frac{3°C}{100\,m} \cdot n$

$a_n = 9{,}25\,°C + \frac{3°C}{100\,m} \cdot n$

$a_n = 10\,°C + \frac{3°C}{100\,m} \cdot (n$

b) Theoretisch ist diese Folge monoton steigend. Aber in Wirklichkeit kann man eine gewisse Tiefe nicht unterschreiten auch eine bestimmte Temperatur kann nicht überschritten werden.

Diese Folge hat kein Grenzwert.

c)

$a_n = 9{,}25\,°C + \frac{3°C \cdot 575\,m}{100\,m}$

$a_n = 9{,}25\,°C + 17{,}25\,°C$

$a_n = 26{,}5\,°C$

Wert für n eingesetzt und Gleichung ausgerechnet.

Da herrscht eine Temperatur von 26,5°C.

d)

$70°C = 9{,}25\,°C + \frac{3°C}{100\,m} \cdot n$

$60{,}75\,°C = \frac{3°C}{100\,m} \cdot n$

$20{,}25 \frac{°C}{°C} \cdot 100\,m = n$

$2025\,m = n$

Wert für $a_n$ eingesetzt und nach n umgeformt.

Diese Temperatur herrscht in der Tiefe von 2025 m (ca 2 km).

Abb. 4/6: Bearbeitung der Aufgabe „Temperatur im Erdinneren“ von Schüler 4

Analyse der Bearbeitung von Schüler 4 (Abb. 4/6):

Der Schüler notiert sich zunächst das Gegebene und definiert die notwendigen Variablen. Anschließend berechnet er die Folgenglieder $a_{25}$, $a_{125}$ und $a_0$, um sich den Verlauf der Folge zu verdeutlichen. Wie er dabei vorgeht, wird nicht beschrieben oder begründet. Er verwendet ebenfalls das lineare Modell, ohne auf die damit vollzogene Näherung einzugehen.

Beim Aufstellen der expliziten und rekursiven Zuordnungsvorschrift bemerkt der Schüler, dass der Bezugs- und Startpunkt Erdoberfläche ungeeignet ist und geht zum Starpunkt $a_{25}$ über. Leider wird dieser sehr sinnvolle Schritt nicht kommentiert oder begründet.

Monotonie und Grenzverhalten werden richtig benannt, eine Beschreibung und Begründung, z. B. mit einem Verfahren, erfolgt jedoch nicht. Dafür vergleicht der Schüler seine Ergebnisse mit der Realität und stellt fest, dass die Eigenschaften der Folge (unbeschränktes Wachstum) mit den real möglichen Vorgängen im Widerspruch stehen. Eine explizite Wertung des Modells, über den Vergleich hinaus, wird nicht festgehalten.

Die Berechnungen in c), d) werden fehlerfrei ausgeführt, wobei das Vorgehen beschrieben wird[87]. Ein Antwortsatz verbindet formale Ergebnisse und physikalischen Kontext.

Die Stärken dieser Arbeit liegen auf der umfassenden Durchdringung der Zusammenhänge zwischen physikalischem Problem und mathematischer Beschreibung bzw. Bearbeitung. Hier wird eine hohe heuristische Flexibilität deutlich. Leider können die hergestellten Zusammenhänge noch nicht optimal verdeutlicht werden. Da keine Argumentation festgehalten wird, bleibt die Darstellung, insbesondere in b) auf einer beschreibenden Stufe, z. B. findet keine Wertung des Modells statt, obwohl physikalischer Vorgang und mathematisches Modell gegenübergestellt werden.

Vergleich beider Arbeiten und Schlussfolgerung:

Obwohl beide Arbeiten von der Qualität her ähnlich sind (Beide Schüler haben die Aufgabe mathematisch korrekt bearbeitet und gute Kenntnisse zu arithmetischen Zahlenfolgen bewiesen.), zeigen sich bezüglich der einzelnen mathematischen Kompetenzen Unterschiede. Bei Schüler 1 liegen die Stärken in einer formal exakten Ausführung und Darstellung. Dagegen wird der Bezug zur Realität nicht hergestellt. Generell werden Zusammenhänge nur soweit hergestellt, wie sie für die formale mathematische Lösung notwendig sind, was z. B. daran zu erkennen ist, dass der Bezug zur Eroberfläche von dem Schüler formal hergestellt wird, ohne auf die besonderen Temperaturverläufe an der Eroberfläche zu achten. Schüler 4 sieht dagegen das Problem eher in seiner komplexen Struktur, nicht

[87] Als Ergebnis auf die Kritik seiner ergebnisorientierten Darstellungsweise bemüht sich der Schüler sehr auf eine Kommentierung seines Vorgehens, wobei er noch nicht immer das Wesentliche erkennt.

als abzuarbeitenden Formalismus. Er reflektiert seine Schritte in Zusammenhang zum physikalischen Kontext. Dafür ist für ihn nur eine Feststellung der Eigenschaften der Folge und deren Vergleich mit der Realität, nicht deren mathematische Begründung wichtig.

Die exemplarische Analyse zweier Schülerarbeiten zu einer Aufgabenstellung macht deutlich, das bereits an einer Aufgabe Stärken und Schwächen eines Schülers bezüglich des Spektrums mathematischer Kompetenzen deutlich werden können, sowie Unterschiede zwischen Schülern. Es bleibt dabei jedoch offen, ob es sich um eine stabile Eigenschaft handelt oder die Kompetenzdarlegung überwiegend durch die spezielle Aufgabe oder den speziellen angesprochenen mathematischen Inhalt bedingt wurde.

### 4.1.4 Exemplarische Darstellung einer Leistungsentwicklung

Werden die Leistungen der Schüler, wie in dieser Fallstudie, über ein Schuljahr verfolgt, können Hinweise auf die Leistungsentwicklung gewonnen werden. Dies ist insbesondere für die Kompetenzen wichtig, die gezielt gefördert werden, um Defizite aufzuholen.

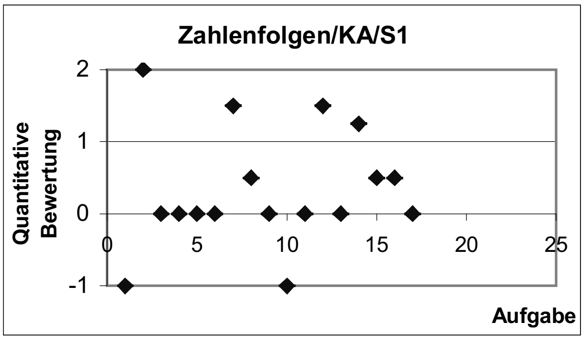



Abb. 4/7: Leistungen von Schüler 1 im Stoffgebiet Reelle Zahlenfolgen

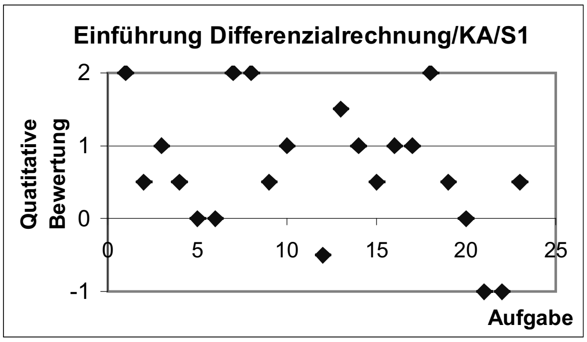



Abb. 4/8: Leistungen von Schüler 1 im Stoffgebiet Einführung in die Differenzialrechnung

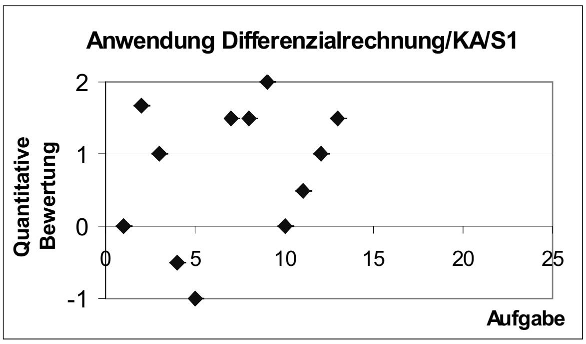



Abb. 4/9: Leistungen von Schüler 1 im Stoffgebiet Anwendung der Differenzialrechnung

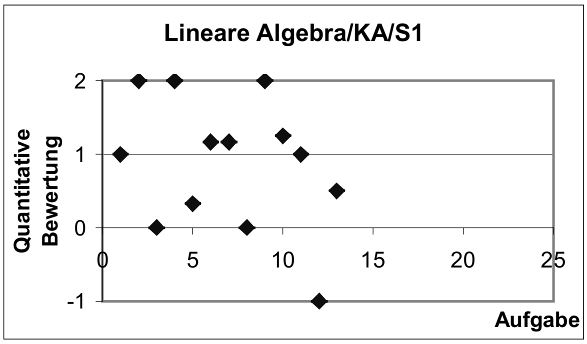



Abb. 4/10: Leistungen von Schüler 1 im Stoffgebiet Lineare Algebra

Die Abb. 4/7 bis 4/10 stellen die Leistungen eines Schülers im Bereich kritisch-argumentativ über das gesamte Schuljahr dar. Auch hier werden zwei Aspekte deutlich:

- In allen Stoffgebieten streuen die Werte in Abhängigkeit von der speziellen Aufgabe sehr stark, zwischen nicht ausreichenden und sehr guten Leistungen.
- Der Schwerpunkt der Verteilung verlagert sich vom Stoffgebiet Zahlenfolgen zum Stoffgebiet Einführung in die Differenzialrechnung zu guten Leistungen.

Um die Tendenz der Leistungssteigerung stärker zu verdeutlichen, kann der Mittelwert über eine Stoffeinheit herangezogen werden (Tabelle 4/3). Dabei werden aufgabenspezifische Besonderheiten zu Gunsten der Veranschaulichung der Entwicklungstendenz ausgeblendet. Das Ausmaß der Streuung innerhalb eines Stoffgebietes kann anhand der Standardabweichung abgeschätzt werden.

Tab. 4/3: Durchschnittliche Leistungsniveaus von Schüler 1 im Bereich kritisch-argumentativ für die vier Stoffgebiete der elften Klasse.

| Stoffeinheit | Reelle Zahlenfolgen | Einführung in die Differenzialrechnung | Anwendung der Differenzialrechnung | Lineare Algebra |
|---|---|---|---|---|
| Mittelwert | 0,38 | 0,81 | 0,86 | 0,86 |
| Standardabweichung[88] | 0,96 | 0,94 | 0,97 | 0,77 |

In Abbildung 4/11 werden exemplarisch[89] für Schüler 1 die mittleren Kompetenzniveaus für die einzelnen Stoffgebiete und Kompetenzbereiche vergleichend graphisch dargestellt. Dabei zeigen sich Abweichungen zwischen den mittleren Kompetenzniveaus einzelner Kompetenzbereiche, die in den vier Stoffgebieten unterschiedlich ausgeprägt sind. Inhaltliche Veränderungen können sich auf die Leistungen in den verschiedenen Kompetenzbereichen unterschiedlich auswirken. Bei Schüler 1 nahmen z. B. vom ersten Stoffgebiet (Reelle Zahlenfolgen, ANA1) zum zweiten Stoffgebiet (Einführung in die Differenzialrechnung, ANA2) die Leistungen im Bereich formal-operativ leicht ab, im Bereich kritisch-argumentativ dagegen zu. Auch die Grundkenntnisse sind abhängig vom Stoffgebiet: Ökonomische

[88] Auf Grund der geringen Datenmenge wurde zur Berechnung der Standardabweichung die Formel $s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}$ verwendet, wobei $s$ die geschätzte Standardabweichung, hier der quantitativen Bewertungen, $n$ der Stichprobenumfang, hier die Anzahl der Bewertungen, $x_i$ die Merkmalsausprägung beim $i$-ten Element der Stichprobe, hier der Punktwert der $i$-ten quantitativen Bewertung und $\bar{x}$ der empirische Mittelwert der Stichprobe, hier der quantitativen Bewertungen, ist.

[89] Die Darstellungen der kompetenzbezogenen Leistungen aller fünf Schüler befinden sich in Anhang 1.1.

Funktionen (Anwendung der Differenzialrechnung, ANA3) stellten eine besondere Schwierigkeit dar. Im heuristischen Bereich liegen die mittleren Kompetenzniveaus durchweg auf einem guten Niveau. Die Leistungen im kritisch-argumentativen Bereich liegen dagegen in allen Stoffeinheiten unter den Leistungen in den anderen Kompetenzbereichen und sind besonders gering im Stoffgebiet Reelle Zahlenfolgen.

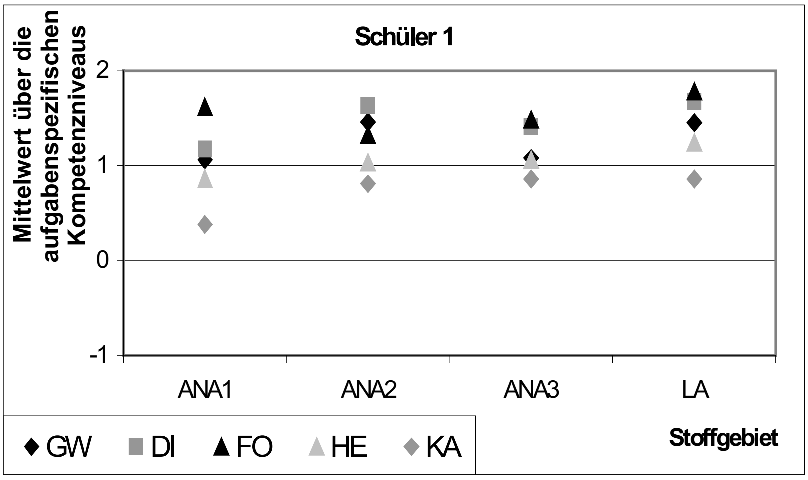



Abb. 4/11Gegenüberstellung der durchschnittlichen Leistungsniveaus in den unterschiedlichen Aktivitätsbereichen und Stoffgebieten exemplarisch für einen Schüler

Die Unterschiede in den mittleren Kompetenzniveaus eines Schülers sind verglichen mit den deutlichen aufgabenabhängeigen Schwankungen überwiegend gering. Darstellungen, wie die in Abbildung 4/11 können nur eine grobe Tendenz der Leistungsentwicklung aufzeigen. Die Aufzeichnungen der Kompetenzverteilungen, wie in Abbildung 4/1 bis 4/4 und 4/7 bis 4/10 sind aussagekräftiger. Sie zeigen zum einen detaillierte aufgabenabhängige Besonderheiten und können zum anderen eine Übersicht über stoffgebiets- und kompetenzbereichsspezifische Unterschiede der Kompetenzverteilungen geben. Auch im Projekt der Harvard Group (1995) zur differenzierten Beurteilung mathematische Kompetenzen wird auf die Mittelwertbildung verzichtet, was auch methodisch begründet ist, da die Kompetenzniveaus wie auch die Noten (vgl. Sacher 2001, S. 80ff., Leuders 2001, S. 298) nicht linear angeordnet sind.

### 4.1.5 Unterschiede in Kompetenzprofilen

Für die individuelle förderungsorientierte Rückmeldung ist der soziale Vergleich ungeeignet (vgl. Arnold/Jürgens 2001, S. 47, 3.3, 1.5.1). Die Verdeutlichung interindividueller Unterschiede kann jedoch eine effektive und differenzierende Unterrichtsgestaltung unterstützen. Der Vergleich zwischen Kompetenzprofilen kann anhand der groben Darstellung der Mittelwerte über eine Stoffeinheit, wie in Abb. 4/11, erfolgen, denn es geht darum, auffällige Unterschiede zu erkennen. Aufgabenspezifische Unterschiede können bei Bedarf herangezogenen werden (vgl. 4.1.3).

Analyse und Vergleich der Kompetenzprofile der Schüler der ersten Untersuchungsgruppe (vgl. Anhang 1.2) führten zu folgenden Ergebnissen:

- Der Vergleich der mittleren Leistungen zum Grundwissens in den vier Stoffgebieten zeigte, dass die Stellung eines Schülers in Relation zu seinen Mitschülern vom Stoffgebiet abhängen kann. So liegen z. B. die Grundkenntnisse von Schüler 5 im Stoffgebiet „Einführung in die Differenzialrechnung" unter denen seiner Mitschüler, bei der Anwendung der Differenzialrechnung dagegen darüber (vgl. Anhang 1.2).
- Gleiches zeigte sich beim Vergleich der Leistungen der fünf Schüler in den vier Aktivitätsbereichen: Auch hier verändert sich die Stellung eines Schülers innerhalb der Lerngruppe mit dem Stoffgebiet. Seltener nahm ein Schüler bezüglich eines Kompetenzbereiches durchweg einen vorderen oder einen hinteren Platz (z. B. Schüler 1 im Bereich kritisch-argumentativ) ein (vgl. Anhang 1.2).
- Insgesamt waren die Unterschiede zwischen den durchschnittlichen kompetenzbezogenen Leistungen der Schüler, vor allem auch im Vergleich mit den aufgabenabhängigen Schwankungen der Leistungen eines Schülers, gering und es zeigten sich ebenso Gemeinsamkeiten, wie z. B. eine deutliche Steigerung im Bereich kritisch-argumentativ bei allen fünf Schülern. Alle Schüler hatten im Bereich kritisch-argumentativ das geringste Ausgangsniveau und konnten ihre Leistungen in diesem Bereich durch die Förderung im profilierten Kurs steigern.

### 4.1.6 Akzeptanz der differenzierten Leistungsbeurteilung durch die Schüler

Soll eine Form der Leistungsbeurteilung umgesetzt werden, die in differenzierter Art und Weise Stärken und Schwächen der Schüler beschreibt, um ihnen Ansatzpunkte für das eigenverantwortliche Lernen aufzuzeigen, ist es von besonderem Interesse zu erfahren, ob die Informationen für die Schüler tatsächlich bedeutsam und hilfreich sind. Dies gilt insbesondere, weil eine differenzierte Beurteilung mathematischer Kompetenzen mit einem erhöhten Beurteilungsaufwand verbunden ist. In diesem Abschnitt wird ein Fragebogen zur Akzeptanz der differenzierten Leistungsbeurteilung ausgewertet.

Nach Abschluss des Stoffgebietes Analysis bekamen die fünf Schüler der ersten Fallstudie erstmals eine differenzierte Rückmeldung anhand eines individuellen Kompetenzspiegels. Die Schüler nahmen diese Rückmeldung sehr positiv auf („unsere Zeugnisse"), lasen interessiert ihre Einschätzung und stellten Fragen, z. B. zur Bedeutung der Abweichungen und zur maximal erreichbaren Punktzahl. Zwischen den Schülern fand ein reger Austausch statt. Sie wollten wissen, wo sie im Vergleich zu ihren Mitschülern stehen. Der Vergleich innerhalb der Klasse wurde bewusst nicht offengelegt, scheint aber die Schüler sehr zu interessieren. Ein Schüler stellte sogar die Frage, wer denn nun am besten sei. Darauf wurde geantwortet, dass die Analyse sehr gut hervorbrachte, dass jeder Schüler seine individuellen Stärken hat, was auf Grund des guten Verhältnisses zwischen den Schülern auch mit Beispielen untermauert werden konnte. Auf die Frage der Lehrerin, ob sich die Schüler in der Beurteilung wiedererkennen, wurde Bestätigung ausgedrückt. Eine Ursache dafür, dass die Einschätzung bei den Schülern unerwartet gut ankam, ist sicher die persönliche Darstellung. Die Schüler fühlen sich individuell als Persönlichkeit ernst und wichtig genommen. Der Fragebogen wurde bereitwillig ausgefüllt. In einem kurzen Anschreiben an die Schüler wurden die bisher vorgenommenen Analysen ihrer Arbeiten skizziert und die Kompetenzbereiche (wiederholt) beschrieben. Im Folgenden werden die Fragen und Antworten wiedergegeben, wobei bezüglich der Akzeptanz der differenzierten Leistungsbeurteilung vor allem die ersten vier Fragen wichtig sind[90].

| 1. Sind die Ergebnisse („Individueller Kompetenzspiegel") für Dich interessant? Warum? |
|---|
| S1: Ja, weil dadurch ich wissen kann, was meine Stärke ist, wo ich mich verbessert und wo ich mich verschlechtert habe und wo ich mich noch verbessern muss.<br>S2: Ich finde die Ergebnisse sehr interessant, da mir einige meiner Schwächen aufgezeigt wurden und die Leistungsentwicklung zum ersten Mal klar wurde.<br>S3: Ja, sie sind sehr interessant, da ich noch nie eine so breitgefächerte Bewertung erhalten habe, und dies mal eine andere Variante zu den „normalen" Zensuren ist.<br>S4: Schon, so erhält man einen objektiven Überblick über seine Fähigkeiten. So sind Schwächen leichter zu sehen und dadurch ist man in der Lage, ihnen entgegen zu wirken.<br>S5: Ja. Es ist interessant, mal ein solches Zeugnis zu bekommen. Ich finde, man kann da viel besser einschätzen, wo man sich noch verbessern kann. |

[90] Die Äußerungen der Schüler wurden im Originaltext übernommen, ohne Korrektur der Sprache und Rechtschreibung.

| |
|---|
| 2. Siehst Du in einer solchen erweiterten Beurteilung eine sinnvolle Ergänzung zur üblichen Leistungsbeurteilung? |
| S1: Ja, weil bei der üblichen Leistungsbeurteilung man nicht exakt und genau beurteilt wird.<br>S2: Ja, denn die individuelle Leistungsbeurteilung und die einhergehenden Ratschläge zur Verbesserung fehlen oft im Unterricht.<br>S3: Ja, da man seine Stärken und Schwächen besser erkennen und dadurch seine Leistungen steigern kann.<br>S4: Natürlich, Hier sieht man bereiche, wo man stark ist und wo man schwach ist. Eine übliche Beurteilung zeigt nur den Mittelwert.<br>S5: Ja. Siehe Punkt 1. |
| 3. Wenn ja, welche Zusatzinformationen sind für Dich wichtig? Wie können Dir diese beim (selbständigen) Lernen helfen? |
| S1: dass ich z.B. beim interpretieren und Analysieren oder Schlussfolgern noch viel üben muss.<br>S2: Beim selbständigen Lernen könnte man mit dieser Übersicht der Leistungsgebiete nachvollziehen, ob alle Felder bei einer Hausaufgabe oder beim allgemeinem Lernen berücksichtigt wurden.<br>S3: Es hilft beim Lernen, da man besser weiß, woran man arbeiten muss, da die Stärken und Schwächen gut differenziert werden. Es sind alle Informationen wichtig, damit man trotzdem eine Übersicht hat.<br>S4: Da nun die einzelnen Schwächen bekannt sind, kann man sich an den Lehrer wenden und um Rat fragen. Auch selbständiges Lernen sollte mit dieser Übersicht erleichtert werden.<br>S5: Alle sind wichtig, denn so kann ich sehen, wo meine Schwächen liegen und durch die zusätzlichen Bemerkungen kann ich mir besser vorstellen, wie ich mich verbessern kann. |
| 4. Wenn nein, warum hältst Du diese Informationen nicht für wichtig? Welche Einschätzungen bezüglich Deiner fachlichen Leistungen wären Dir wichtiger oder bist Du mit der üblichen Leistungsbeurteilung zufrieden? |
| S4: Ich bin für eine erweiterte Beurteilung. |
| 5. Sind die Ergebnisse im Bereich Analysis für Dich überraschend? Welche Ergebnisse hättest Du anders erwartet? |
| S1: Ich habe Analysis-Mathematik noch nie gehabt, das ist ziemlich neu für mich. Ich habe auch langsam gemerkt, dass mein Wissen in diesem bereich wenig ist.<br>S2: Vor dieser Einschätzung war mir nicht bewusst, dass ich zum Beispiel Stärken auf dem Gebiet des Übersetzens und dem Finden geeigneter Lösungsstrategien habe. Ich hätte genau genommen nicht mit einem so positivem Ergebnis gerechnet.<br>S3: Nein, sie sind eigentlich gut getroffen. Ich hätte einen höheren Wert beim „Schlussfolgern, Prüfen“ und „Interpretieren“ erwartet, wobei ich bei der „Genauigkeit analysieren, bewerten“ einen nicht so hohen Wert erwartet hätte.<br>S4: Ich hab eigentlich gar keine Ergebnisse erwartet. Hätte ich so ein Zeugnis schon 02/03 bekommen, hätte ich da drauf Erwartungen stellen können auf bezug des 03/04 Zeugnisses.<br>S5: Nein sind sie nicht. So wie sie mich eingeschätzt haben, kann ich mich auch wiedererkennen. Manche Sachen wie im bereich „Heuristisch-experimentell“ hätte ich tiefer erwartet. |

| |
|---|
| 6. Welchen Tätigkeitsbereich hältst Du für Dich am wichtigsten? Warum? |
| S1: Ich bin der Meinung, dass Interpretieren und Analysieren und mathematisch Argumentieren für mich am wichtigsten sind, da ich bei diesem bereich noch ziemlich schwach bin.<br>S2: Da mir meine Schwächen aufgezeigt wurden, halte ich zum Beispiel das Interpretieren oder die formale Notation für mich am wichtigsten und verbesserungswürdig.<br>S3: Den „Heuristisch-experimentellen Tätigkeitsbereich“ halte ich für am wichtigsten, weil es meiner Meinung nach am wichtigsten ist, Probleme richtig zu erkennen und zu lösen.<br>S4: Da würde es "formal-operativ“ sein, weil ich schon immer durch „Finden geeigneter Lösungsstrategien“ und „Schlussfolgern“ auftrumpfen konnte.<br>S5: Darstellend-interpretativ, weil ich der Meinung bin, dass man aus Graphen viel lesen kann und weil es wichtig ist Probleme in die Mathematik zu übersetzen, um sie dann formal zu lösen. |
| 7. Hältst Du die beschriebenen Kompetenzen auch persönlich, d. h. über das Fach Mathematik hinaus für wichtig? |
| S1: Ja, ich finde es gut und wichtig.<br>S2: Natürlich sind Fähigkeiten wie Argumentieren und Interpretieren auch in Fächern wie deutsch oder Physik wichtig. Allerdings kann man dieses Interpretieren oder beweisen nicht mit der Mathematik vergleichen, da ich in Deutsch zum Beispiel besser bin.<br>S3: Ja, zum Beispiel braucht man die Problemlösung nicht nur in der Mathematik.<br>S4: Eine schwere frage. Diese Aufteilung ist schon geeignet. Persönlich finde ich die schon wichtig, besonders, wenn man im Spezialkurs ist.<br>S5: Ja, aber in Mathe wäre es mir am wichtigsten, weil mir Mathe Spaß macht und man dadurch besser lernen kann. |
| 8. Ordne die vier Tätigkeitsbereiche nach der Häufigkeit, mit der sie innerhalb Deines Mathematikunterrichtes bis Klasse 10 auftraten. |
| 1. am häufigsten: FO (4x), ausführen von Operationen (2x), Formales Darstellen<br>2. DI (3x), ausführen formaler Verfahren<br>3. HE (2x), KA, mathematisch argumentieren<br>4. am seltensten: KA (2x), HE, finden geeigneter Beweisstrategien, analysieren, interpretieren, schlussfolgern |

Die Schüler sehen somit in der differenzierten Beurteilung ihrer mathematischen Kompetenzen eine sinnvolle Ergänzung zur üblichen Leistungsbeurteilung. Die im Kompetenzspiegel wiedergegebenen Informationen zum Stand ihrer mathematischen Kompetenzen sind für sie interessant, weil sie ihre Stärken und Schwächen aufzeigen und Ansatzpunkte für Verbesserungen geben.

### 4.1.7 Ergebnisse zur Unterrichtsqualität

Werden die Aktivitäten der Schüler als ein Aspekt der Unterrichtsqualität und –entwicklung analysiert, sind vor allem zwei Fragen von Bedeutung:

1. War die Förderung ausgewogen in dem Sinne, dass die unterschiedlichen Aktivitätsbereiche ausgeglichen berücksichtigt wurden?
2. Ergeben sich aus den Ergebnissen Hinweise für die zukünftige Unterrichtsgestaltung?

Tab. 4/4: Häufigkeit der Erfassung bestimmter Kompetenzen in den vier Stoffabschnitten

| Kompetenz | Reelle Zahlenfolgen | Einführung Differenzialrechnung | Anwendung Differenzialrechnung | Lineare Algebra | gesamt |
|---|---|---|---|---|---|
| Grundwissen | 18 | 15 | 12 | 16 | 61 |
| Übersetzen | 6 | 6 | 12 | 7 | 31 |
| Interpretieren | 4 | 5 | 3 | 5 | 17 |
| Formal Darstellen | 10 | 16 | 10 | 11 | 47 |
| Graphisch Darstellen | 1 | 13 | 5 | 4 | 23 |
| Darstellend-interpretativ | 21 | 40 | 30 | 27 | 118 |
| Formale Verfahren ausführen | 8 | 19 | 15 | 16 | 58 |
| Formale Operationen ausführen | 10 | 17 | 20 | 15 | 62 |
| Formal-operativ | 18 | 36 | 35 | 31 | 120 |
| Geeignete Lösungsstrategien finden | 11 | 20 | 14 | 8 | 53 |
| Geeignete Beweisverfahren finden | 6 | 8 | 6 | 8 | 28 |
| Analysieren | 5 | 12 | 6 | 6 | 29 |
| Heuristisch-experimentell | 22 | 40 | 26 | 22 | 110 |
| Schlussfolgerungen ziehen | 12 | 14 | 5 | 16 | 47 |
| Mathematisch Argumentieren | 12 | 12 | 7 | 10 | 41 |
| Beweisen | 6 | 7 | 3 | 4 | 20 |
| Kritisch-argumentativ | 30 | 33 | 15 | 30 | 108 |

Um die erste Frage für diese Fallstudie zu beantworten, wird in Tabelle 4/4 die Berücksichtigung der Aktivitätsbereiche in den Aufgaben der Hausarbeiten in den vier Stoffgebieten erfasst. Die Zahlen geben an, wie oft eine bestimmte Kompetenz in den Hausaufgaben zur jeweiligen Stoffeinheit einbezogen wurde. Die Aufstellung zeigt, dass die vier Aktivitätsbereiche im Rahmen der von der Lerngruppe angefertigten schriftlichen Hausaufgaben in ausgewogenem Maße berücksichtigt wurden. Dabei ist zu beachten, dass es sich hier nicht um intendierte Aktivitäten handelt, sondern um von den Schülern ausgeführte und beurteilte Aktivitäten. Unterschiedliche Anzahlen der Bewertungsanlässe in den einzelnen Stoffabschnitten ergeben sich aus der abweichenden Dauer der Themen. Relative Unterschiede zwischen Stoffabschnitten ergeben sich aus inhaltlichen Besonderheiten der Themen, wie z. B. das verhältnismäßig seltene graphische Darstellen in der Stoffeinheit „Reelle Zahlenfolgen", was in der Einführung in die Differenzialrechnung ausgeglichen wurde.

Um die zweite Frage zu beantworten, folgen Grafiken, welche die Kompetenzentwicklung der gesamten Lerngruppe bezüglich der einzelnen Kompetenzbereiche aufzeigen. Die Datenpunkte entsprechen den Mittelwerten der mittleren Kompetenzniveaus der fünf Schüler. Eingetragen sind ebenfalls die maximalen Abweichungen zwischen den mittleren Leistungen der Schüler.

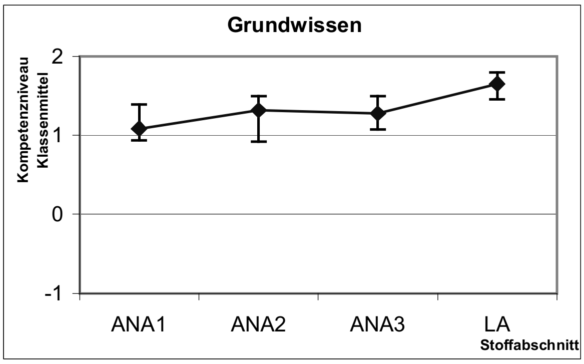



Abb. 4/12: Durchschnittliches Grundwissens der Lerngruppe

Die durchschnittlichen Grundkenntnisse der Klasse sind gut, in der Linearen Algebra (LA) sogar sehr gut. Im Stoffgebiet Anwendung der Differenzialrechnung gab es z. T. Schwierigkeiten mit dem Newtonverfahren und ökonomischen Funktionen.

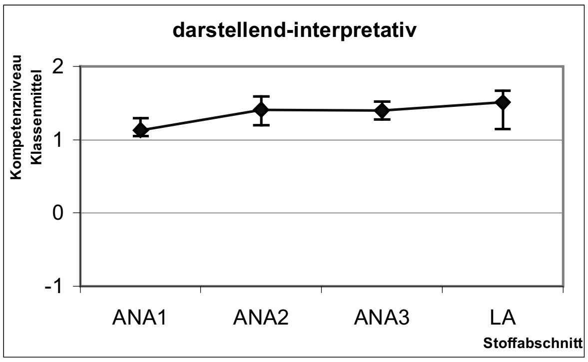



Abb. 4/13: Durchschnittliche Leistungen der Lerngruppe im Bereich darstellend-interpretativ.

Die Schüler zeigten in allen Stoffgebieten durchschnittlich gute Leistungen mit leicht steigender Tendenz. Die individuellen Unterschiede sind vor allem in der Analysis gering.

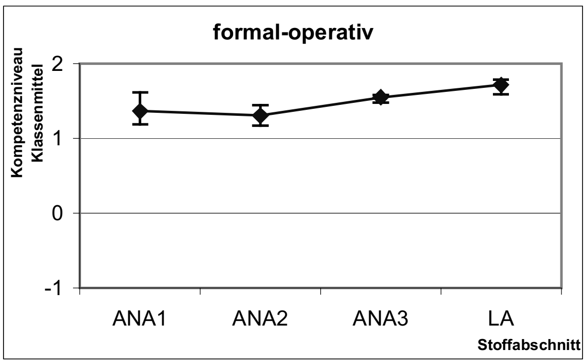



Abb. 4/14: Durchschnittliche Leistungen der Lerngruppe im Bereich formal-operativ

Die durchschnittlichen Leistungen haben von Beginn an ein hohes Niveau. Nach einer Gewöhnung an die Anforderungen der Differenzialrechnung ist die Tendenz steigend. Die individuellen Unterschiede sind im zweiten Halbjahr gering.

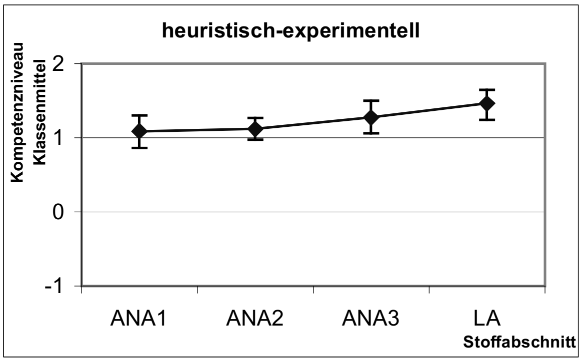



Abb. 4/15: Durchschnittliche Leistungen der Lerngruppe im Bereich heuristisch-experimentell

Die durchschnittlichen Leistungen sind in allen Stoffabschnitten gut, mit leicht steigender Tendenz. Das relativ einheitliche Bild spricht für kreatives mathematisches Denken und ein gutes Methodenrepertoire bei allen fünf Schülern.

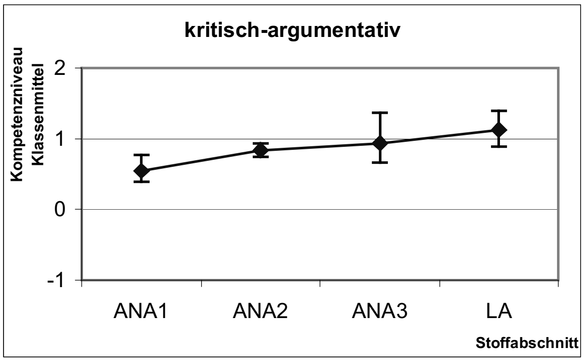



Abb. 4/16: Durchschnittliche Leistungen der Lerngruppe im Bereich kritisch-argumentativ

Das Ausgangsniveau ist vergleichsweise gering. Durch die spezielle Förderung konnte ein gutes Niveau erreicht werden. Die Abweichungen zwischen den mittleren Leistungen der Schülern sind in der Einführung der Differenzialrechnung gering, in der Anwendung der Differenzialrechnung deutlicher.

Aus diesen Ergebnissen können Anhaltspunkte für die zukünftige Unterrichtsgestaltung abgeleitet werden. Wird z. B. angestrebt, das Niveau im kritisch-argumentativem Bereich dem der anderen Kompetenzbereiche anzugleichen, müsste die Förderung in diesem Bereich konsequent weitergeführt werden.

Bei diesen Ausführungen bleibt zu beachten, dass sie sich auf die spezielle Lerngruppe, die spezielle Förderung und den eingegrenzten Zeitraum beziehen. Außerdem kann eine Steigerung der Leistungen auf Grund von Kompetenzzuwachs nicht von einer stoffabhängigen Leistungsveränderung abgegrenzt werden.[91] Schließlich stellen alle hier beschriebenen Steigerungen grobe Tendenzen[92] in der Leistungsentwicklung dar, die der Reflexion des Unterrichtserfolges im schulischen Alltag dienen können. Ebenso beachtet werden sollten aber die deutlichen Unterschiede der Schülerleistungen in Abhängigkeit von der speziellen Aufgabe.

[91] Das Ansteigen der Leistungen im Stoffgebiet Lineare Algebra kann z. B. durch den Kompetenzzuwachs der Schüler, aber auch durch veränderte stoffliche Anforderungen begründet werden. Die Lineare Algebra könnte für die Schülern anschaulicher und damit leichter zugänglich sein.

[92] Absicht der Fallstudie war es von vornherein nicht, statistisch signifikante Leistungsunterschiede und Leistungssteigerungen nachzuweisen. Für die Entwicklung des Konzeptes der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen sind nicht statistisch abgesicherte Ergebnisse zu den Schülerleistungen, sondern die generellen Möglichkeiten der Umsetzung des Konzeptes interessant.

### 4.1.8 Methodische Erfahrungen sowie Vor- und Nachteile der kontinuierlichen differenzierten Dokumentation der Kompetenzentwicklung von Schülern

Um das methodische Vorgehen bei der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen im Sinne eines fachdidaktisch begründeten und schulpraktisch umsetzbaren Verfahrens zu verbessern, wurden zu jeder Beurteilung „Erkenntnisse zur Konzeptentwicklung“ dokumentiert. Die wichtigsten Erfahrungen werden im Folgenden zusammengefasst.

- Bei einer unzureichenden Darlegung des Lösungsweges sind viele Kompetenzen (z. B. geeignete Lösungsstrategien finden, in die mathematische Sprache übersetzen) nicht oder nur sehr unsicher einschätzbar. Fehler im Ansatz oder in der Übersetzung können nicht identifiziert werden und eine effektive, förderungsorientierte Rückmeldung wird erschwert. Generell ist es wichtig, die Schüler weg von einer ergebniszentrierten Darstellung hin zu einer ausreichend klaren Darlegung ihrer Gedankengänge zu bringen, für die erfolgreiche Umsetzung des Konzeptes der differenzierten Leistungsbeurteilung ist das zwingend notwendig. Bis zur Verinnerlichung können direkte Anweisungen in den Aufgabenstellungen, wie „Begründen Sie Ihr Vorgehen.“, „Beschreiben Sie die Entwicklung des mathematischen Modells.“ hilfreich sein. In diesem Zusammenhang wurde deutlich, wie wichtig eine zielgerichtete und exakte Formulierung der Aufgabenstellung ist. Eine ungünstige Formulierung kann eine ergebniszentrierte Darstellung begünstigen. Diesem Punkt wird in Kapitel 5 stärker nachgegangen.
- Die Zuordnung von Punktwerten erweist sich bei nicht allein durch Zählungen einschätzbaren Kompetenzen als unsicher und damit in der Beurteilung langwierig. Eine klare Formulierung von Erwartungsmaßstäben erleichtert die Auswertung. Die Zuordnung von Kompetenzniveaus (Punktwerten) wird sicherer und objektiver (vgl. Perlich 2006). Die Auswertungszeit verringert sich durch die entscheidungsstützenden Maßstäbe. Die in dieser ersten Fallstudie verwendeten Erwartungsmaßstäbe beschreiben nur die Anforderungen für die höchste Kompetenzstufe. Die Zuordnungen zu den weiteren Kompetenzniveaus fanden durch eine Kombination aus normorientiertem und sozialem Vergleich (Vergleich der Kompetenzdarlegungen und Orientierung am Erwartungsmaßstab) statt, der methodisch nicht haltbar (vgl. 1.5 und 3.2) und für größere Schülerzahlen nicht möglich ist. Deshalb werden für folgende Umsetzungen klare Indikatoren für alle Kompetenzniveaus definiert.
- Bei offenen Aufgaben sind die ausgeführten Aktivitäten und damit die einschätzbaren Kompetenzen stark vom individuellen Lösungsweg abhängig. Es muss davon Abstand

genommen werden, bei allen Schülern die gleichen Kompetenzen bewerten zu wollen. Um dem individuellen Vorgehen gerecht zu werden, sind deshalb die vorbereiteten Beurteilungskriterien flexibel zu handhaben und gegebenenfalls durch solche für nicht erwartete Kompetenzen zu ergänzen.

- Die Formulierung einer verbalen Einschätzung ist schwierig, weil sie nicht klar und eindeutig ist. Beschreibungen wie „unzureichend“, „gut“, „angemessen“ sind für Vergleich und Dokumentation von Leistungen ungeeignet. Da eine Zuteilung von Punkten ohne Erläuterung für eine transparente und förderungsorientierte Rückmeldung unzureichend ist (vgl. 1.5), erscheint eine Kombination von quantitativer und verbaler Rückmeldung sinnvoll.
- Der zeitliche Aufwand der Beurteilung entsteht zu einem großen Teil durch das einfühlende Nachvollziehen der individuellen Lösungswege. Dieser Zeitbedarf ist bei den in der Sekundarstufe II üblichen komplexen Aufgaben auch bei anderen Beurteilungsmethoden notwendig, insbesondere bei den häufig vorgenommenen ausführlichen Kommentierungen des Vorgehens an der Schülerarbeit. Dazu kommt bei der differenzierten Beurteilung die Aufschlüsselung in einzelne mathematische Kompetenzen und jeweils der Vergleich mit den erstellten Beurteilungskriterien. Anders als bei ergebnisorientierten Beurteilungsformen kann ein Abschnitt der Lösung unter verschiedenen Aspekten bewertet werden. Auch wenn das Ausfüllen der Beurteilungsbögen bei vorbereiteten Maßstäben vergleichsweise wenig Zeit in Anspruch nimmt, bleibt ein deutlich erhöhter Zeitaufwand für die Rückmeldung.

Innerhalb der Erprobung wurden Möglichkeiten und Vorteile ebenso deutlich wie Grenzen und Nachteile der kontinuierlichen differenzierten Dokumentation mathematischer Kompetenzen der Schüler. Die folgende Reflexion zeigt den Weg für die nächste Fallstudie.

- Wichtigste Erkenntnis der ersten Fallstudie ist, dass anhand der gewählten Differenzierung unterschiedliche mathematische Kompetenzen erfasst werden können, wobei sich individuelle Stärken und Schwächen und unterschiedliche Kompetenzverteilungen zeigen. Eine differenzierte individuelle Rückmeldung der bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben dargelegten Kompetenzen macht es möglich, dass eigenverantwortliche Lernen zu unterstützen.
- Anhand des Differenzierungsmusters kann der Unterricht hinsichtlich einer ausgewogenen Förderung beurteilt werden. Die differenzierte Darstellung der Entwicklung der gesamten Klasse kann Ansatzpunkte für eine gezielte zukünftige Förderung geben.

- Die Differenzierung hat den Preis eines hohen zeitlichen Aufwands der Analyse und Dokumentation der Kompetenzen der Schüler. Bei größeren Schülerzahlen ist die hier vollzogene nahezu kontinuierliche Leistungserfassung nicht möglich. Eine in regelmäßigen Abständen stattfindende Beurteilung zu Aufgaben, die zentrale Inhalte der Oberstufenmathematik ansprechen, kann eine praxistaugliche Alternative sein.
- Die hier vollzogene Rückmeldung nach einem längerem Zeitintervall lässt keine Chance, eigenen Schwächen schnell entgegenzuwirken bzw. ihrer Verfestigung vorzubeugen. Eine schnelle aufgabenspezifische Beurteilung kann die Schüler bereits beim Lernen unterstützen und liefert außerdem konkretere, besser fassbare Informationen. Die aufgabenabhängigen Schwankungen der Leistungen innerhalb eines Kompetenzbereiches sprechen ebenfalls dafür, Rückmeldungen an konkreten Aufgaben festzumachen.

## 4.2 Differenzierte Beurteilung mathematischer Kompetenzen anhand exemplarischer Aufgaben

Die in 4.1.6 beschriebenen Erfahrungen aus der ersten Fallstudie führten zu einer Modifikation des organisatorischen Rahmens in der zweiten Fallstudie im darauffolgenden Schuljahr 2003/2004. Die Grundlage des Konzeptes, die in vier Aktivitätsbereiche differenzierte Beurteilung wurde beibehalten und weiter konkretisiert, insbesondere durch kompetenzspezifische Beurteilungskriterien.

### 4.2.1 Rahmenbedingungen

Auch die zweite schulpraktische Untersuchung wurde in einer elften mathematisch profilierten Klasse an der Andreas-Oberschule (Gymnasium) in Berlin Friedrichshain-Kreuzberg durchgeführt. Die Lerngruppe umfasste zehn mathematisch interessierte Schüler, die bis zur zehnten Klasse verschiedene Berliner Gymnasien und Gesamtschulen besuchten. Die Schüler wurden, wie die Schüler der ersten Fallstudie, nach dem Rahmenplan der Netzwerkschulen von einem Hochschullehrer des Instituts für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin unterrichtet.

Von den Schülern der ersten Fallstudie unterschieden sich die Schüler der zweiten Fallstudie, bis auf wenige Ausnahmen, durch ein geringeres Engagement im Unterricht und bei den Hausaufgaben. Die Hausaufgaben wurden von einigen Schülern unregelmäßig bearbeitet, was sich ungünstig auf die Umsetzung dieses Konzeptes auswirkte, da zu einigen Kompetenzen nur wenige Beurteilungsmöglichkeiten vorlagen.

Die differenzierte Beurteilung der mathematischen Kompetenzen der Schüler wurde auf zwölf Aufgaben des Stoffgebietes Analysis (vgl. 4.2.2) begrenzt, die in sieben Hausaufgabenblöcken gestellt wurden. Eingeschlossen wurden die Themen „Reelle Zahlenfolgen", „Einführung der Differenzialrechnung" und „Anwendung der Differenzialrechnung" (vgl. 4.1.2). Die Aufgaben wurden z. T. aus der ersten Fallstudie übernommen, modifiziert oder neu entwickelt. Die Eignung der Aufgaben wurde anhand der in Kapitel 2 erstellten (entscheidenden) Kriterien an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen geprüft (vgl. Anhang 1.3).

Auch in der zweiten Fallstudie wurde der Mathematikunterricht selbst durch die Erprobung der differenzierten Leistungsbeurteilung nicht beeinflusst. Die Aufgaben wurden ebenfalls als Hausaufgaben gelöst. Die Leistungsbeurteilung der Schüler fand in der üblichen Form der konventionellen Notengebung statt. Die aufgabenbezogenen Beurteilungsbögen, welche die Schüler zu jeder Aufgabe bekamen, dienten als zusätzliche differenzierte kompetenzbezogene Rückmeldung. Sie enthielten die beurteilten Kompetenzen, das erreichte Niveau, in Form einer Punktzahl von 0 bis 4[93] und eine verbale Erläuterung zu Mängeln, aber auch zu positiven Auffälligkeiten (vgl. 4.2.3, Beispiel 8).

[93] Der Wechsel der Skala erfolgte aus Gründen der besseren Darstellbarkeit.

### 4.2.2 Erfassen mathematischer Kompetenzen durch exemplarische Aufgaben

Die folgende Übersicht enthält alle Aufgaben, zu denen eine differenzierte Beurteilung erfolgte sowie die potenziell von ihnen angesprochenen Kompetenzen (Kompetenzspektrum[94]).

Tab. 4/5: Aufgaben der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen im Stoffgebiet Analysis der elften Klasse

| **Aufgabe** | **Kompetenzspektrum** |
|---|---|
| **Aufgabe 11B1.1: Schneeflockenkurve (auch Kochkurve)**<br>Der Umfang eines gleichseitigen Dreiecks (Figur 1) sei 3. Jede der drei Seiten wird gedrittelt und über dem mittleren Drittel wird nach außen ein gleichseitiges Dreieck errichtet, d. h. zur vorhandenen Figur nach außen hinzugefügt. Das mittlere Drittel wird entfernt. Es entsteht Figur 2. Das Verfahren wird fortgesetzt, indem in Figur 2 jede Seite gedrittelt, über dem mittleren Drittel ein gleichseitiges Dreieck nach außen errichtet wird und das mittlere Drittel entfernt wird. Es entsteht Figur 3 usw.<br>Konstruieren Sie die erste, zweite und dritte Figur.<br>Es seien $U_n$ der Umfang und $A_n$ der Flächeninhalt der $n$-ten Figur. Berechnen Sie $U_1$, $U_2$, $U_3$, $A_1$, $A_2$, $A_3$. Was passiert mit $U_n$ bzw. $A_n$, wenn $n$ sehr groß wird? Legen Sie Ihre Analyse ausführlich dar und begründen Sie Ihre Vermutung. | Grundwissen: Dreieckskonstruktionen, Umfang, Fläche von gleichseitigen Dreiecken, ggf. Satz des Pythagoras (GW)<br>Graphisch Darstellen (DI)<br>Übersetzen (DI)<br>Formal Darstellen (DI)<br>Algebraische Operationen, Umformungen, Berechnungen ausführen (FO)<br>Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)<br>Analysieren (HE)<br>Mathematisch Argumentieren (KA) |
| **Aufgabe 11B1.2: Dreiecksungleichung**<br>Beweisen Sie die folgende Dreiecksungleichung:<br>Für alle reellen x und y gilt: $\lvert x+y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ . | Grundwissen: Definition und Eigenschaften der Betragsfunktion (GW)<br>Finden geeigneter Beweisstrategien (HE)<br>Schlussfolgerungen ziehen (KA)<br>Beweisen (KA)<br>Formal Darstellen (DI) |

[94] Unter „Kompetenzspektrum“ werden die mit einer Aufgabe intendierten Kompetenzen zusammengefasst, d. h. wichtige der potenziell mit der Aufgabe anregbaren Kompetenzen, zu denen eine Einschätzung erfolgen soll. Hat ein Schüler darüber hinaus Kompetenzen gezeigt, bekam er auch dazu eine Rückmeldung. Dies kam jedoch seltener vor, als dass intendierte Kompetenzen nicht beurteilt werden konnten.

| | |
|---|---|
| **Aufgabe 11B2.1: „Modellierung der Absorption von Licht“**<br>Dringt Licht in Wasser ein, so verliert es mit zunehmender Wassertiefe durch Absorption an Intensität. In einem Gewässer wurde gemessen, dass die Lichtintensität pro Meter um ca. 75 % des bis dahin verbliebenen Wertes abnimmt.<br>a) Beschreiben Sie diesen physikalischen Vorgang mathematisch mit Hilfe einer Zahlenfolge. Formulieren Sie eine rekursive und eine explizite Zuordnungsvorschrift.<br>b) Ist die gefundene Zahlenfolge eine geometrische oder eine arithmetische Zahlenfolge? Betrachten Sie Monotonie und Grenzverhalten dieser Folge, Werten Sie Ihre Ergebnisse in Bezug zur physikalischen Realität. Ist das Modell geeignet?<br>c) Wie viel Prozent der ursprünglichen Intensität sind in 1 m, 2 m, 3 m Wassertiefe noch vorhanden?<br>d) In welcher Tiefe beträgt die Lichtintensität erstmals weniger als 1/1000 des ursprünglichen Wertes? | Grundwissen: Zahlenfolgen, Monotonie, Grenzwert, Logarithmus (GW)<br>Übersetzen (DI)<br>Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)<br>Ausführen formale Verfahren (FO)<br>Ausführen algebraischer Operationen, Umformungen, Berechnungen (FO)<br>Schlussfolgerungen ziehen (KA)<br>Diskutieren, Werten (KA)<br>Mathematisch Argumentieren (KA)<br>Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (DI) |
| **Aufgabe 11B3.1: „Parabelschar“**<br>a) Eine quadratische Funktion $f$ mit $f(x)=x^2+bx+c$ hat die Nullstellen 4 und $-1$. Geben Sie die Funktionsgleichung an und bestimmen Sie die Lage der Scheitelpunkte.<br>b) Warum ist die Aufgabe a) für quadratische Funktionen $f$ mit $f(x)=ax^2+bx+c$ nicht eindeutig lösbar? Beschreiben Sie die Menge aller Funktionen, die dann Lösung des Problems sind. Wie hängen diese Lösungen mit der Lösung aus a) zusammen? Wie sehen ihre Graphen aus? Was ist der geometrische Ort aller ihrer Scheitelpunkte?<br>c) Stellen sie die Parabelschar aus b) durch geeignete Beispiele graphisch dar. | Grundwissen: quadratische Funktionen (GW)<br>Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)<br>Ausführen algebraischer Operationen (FO)<br>Übersetzen (DI)<br>Mathematisch Argumentieren (KA)<br>Analysieren, Vergleichen (HE)<br>Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (DI)<br>Graphisch Darstellen (DI) |
| **Aufgabe 11B4.1: „Anwendung des Nullstellensatzes“**<br>Beweisen Sie, dass die Gleichung<br>$\frac{x^2+1}{x-3}+\frac{x^4+1}{x-5}=0$<br>eine Lösung $x_0$ mit $3 < x_0 < 5$ besitzt. | Grundwissen: stetige Funktionen, Nullstellensatz, gebrochenrationale Funktionen (GW)<br>Finden geeigneter Beweisstrategien (HE)<br>Ausführen von Umformungen, Operationen, Berechnungen (FO)<br>Mathematisch Argumentieren (KA)<br>Beweisen (KA)<br>Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (DI) |

| | |
|---|---|
| **Aufgabe 11B4.2: „Zwischenwertsatz“**<br>Folgender Satz wird Zwischenwertsatz genannt:<br>*f* sei eine Funktion, $[a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Ist *f* stetig in $[a,b]$ und $f(a) \neq f(b)$, so nimmt *f* im Intervall $[a,b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.<br>a) Begründen Sie, dass der Nullstellensatz ein Sonderfall des Zwischenwertsatzes ist.<br>b) Beweisen Sie den Zwischenwertsatz (z. B. durch Rückführung auf den Nullstellensatz).<br>c) Veranschaulichen Sie den Zusammenhang zwischen diesen beiden Sätzen durch eine Skizze. | Grundkenntnisse zu stetigen Funktionen Nullstellensatz (GW)<br>Mathematisch Argumentieren (KA)<br>Finden geeigneter Beweisstrategien (HE)<br>Beweisen (KA)<br>Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (FO)<br>Graphisch Darstellen (DI) |
| **Aufgabe 11B5.1: „Differenzierbarkeit und Beschreibung mittels Tangente“**<br>Gegeben sind die Funktionen *f* mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 1$ und *g* mit $g(x) = \sin(2x)$.<br>a) Zeichnen Sie den Graphen von *f* im Intervall [0,2] und den Graphen von *g* im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.<br>b) Zeigen Sie, dass *f* an der Stelle 1 und *g* an der Stelle 0 differenzierbar ist (Hinweis: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).<br>c) Geben Sie die erste Ableitung von *f* an der Stelle 1 und die erste Ableitung von *g* an der Stelle 0 an.<br>d) Leiten Sie die Funktionsgleichung derjenigen linearen Funktionen her, die das Verhalten von *f* bzw. *g* in der Nähe der Stelle 1 bzw. 0 gut beschreiben. Zeichnen Sie die Graphen dieser Funktionen in das Bild aus a). | Grundwissen: Differenzierbarkeit, Ableitung an einer Stelle, Tangentengleichung (GW)<br>Ausführen formaler Verfahren (DI)<br>Finden geeigneter Nachweisverfahren (HE)<br>Mathematisch Argumentieren (KA)<br>Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)<br>Graphisch Darstellen (DI)<br>Ausführen formaler Operationen und Umformungen (FO).<br>Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (DI) |
| **Aufgabe 11B6.1: „Extrema einer Funktion mit Parameter“**<br>Für welche reellen Zahlen *a* hat die Funktion *f* mit $f(x) = -x^4 + 2ax^3 - ax^2$ an der Stelle $x_0 = -1$ ein lokales Extremum? Handelt es sich um ein Minimum oder ein Maximum?<br>Begründen Sie alle gezogenen Schlüsse hinreichend. | Grundwissen: Extrema, Ableitungsregeln (GW)<br>Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)<br>Ausführen formaler Verfahren (FO)<br>Ausführen formaler Operationen und Umformungen (FO)<br>Mathematisch Argumentieren (KA)<br>Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (DI) |

| | |
|---|---|
| **Aufgabe 11B6.1: „Beweise zum Thema Kurvendiskussion“**<br>Zeigen Sie, dass es keine ganzrationale Funktion dritten Grades gibt, für die 0 und 3 lokale Extremstellen sind und 1 eine Wendestelle ist.<br>Eine ganzrationale Funktion dritten Grades habe die Wendestelle 0 und die lokale Extremstelle $e$. Welche zweite lokale Extremstelle hat die Funktion? Beweisen Sie Ihre Behauptung. | Grundwissen: Extrema, Wendestellen, Ableitungsregeln (GW)<br>Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)<br>Ausführen formaler Verfahren (FO)<br>Ausführen formaler Operationen und Umformungen (FO)<br>Mathematisch Argumentieren (KA)<br>Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (DI) |
| **Aufgabe 11B7.1: „Flächenmaximum rechtwinkliger Dreiecke“**<br>Beweisen Sie, dass von allen rechtwinkligen Dreiecken mit gleicher Summe der Kathetenlängen das gleichschenklige den größten Flächeninhalt hat.<br>Legen Sie ihren Lösungsweg ausführlich dar und begründen Sie alle gezogenen Schlüsse vollständig. | Grundwissen: Extrema, Ableitungsregeln (GW)<br>Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)<br>Übersetzen (DI)<br>Ausführen formaler Verfahren (FO)<br>Ausführen formaler Operationen (FO)<br>Mathematisch Argumentieren (KA)<br>Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (DI) |
| **Aufgabe 11B7.2: „Flächenmaximum unter der Wurzelfunktion“**<br>Es sei $0 < x < 10$. Die Punkte $A(x\|0)$, $B(10\|0)$, $C(10\|\sqrt{x})$und $D(x\|\sqrt{x})$ bilden ein Rechteck.<br>Veranschaulichen Sie diese Situation graphisch.<br>Für welches $x$ ist der Flächeninhalt dieses Rechteckes maximal? Wie groß ist der maximale Flächeninhalt?<br>Kommentieren Sie Ihr Vorgehen. | Grundwissen: Bestimmung von Extrema, Ableitungsregeln (GW)<br>Graphisch Darstellen<br>Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)<br>Übersetzen (DI)<br>Ausführen formaler Verfahren (FO)<br>Ausführen formaler Operationen (FO)<br>Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (DI) |
| **Aufgabe 11B7.3: „Optimaler Eintrittspreis“**<br>Ein Marktforschungsinstitut hat festgestellt, dass der oberste zu realisierende Eintrittspreis für ein Robbie Williams Konzert 80 Euro beträgt. Die Veranstalter des nächsten Konzertes erwarten bei einem solchen Eintrittspreis 60000 Besucher.<br>Eine Preissenkung um je 4 Euro würde dagegen zu einer Zunahme von jeweils 5000 Besuchern führen.<br>Welchen Eintrittspreis sollten die Veranstalter festsetzen, wenn Sie den Erlös maximieren wollen? | Grundwissen: Bestimmung von Extrema, Ableitungsregeln (GW)<br>Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)<br>Übersetzen (DI)<br>Ausführen formaler Verfahren und Operationen (FO)<br>Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (DI) |

Die Aufgaben wurden so gestaltet, dass alle vier Kompetenzbereiche berücksichtigt wurden, auch wenn nicht in jeder Aufgabe alle vier Kompetenzbereiche in ausgewogenem Verhältnis einbezogen werden konnten. Außerdem wurde geprüft, ob die Aufgaben die in Kapitel 2 entwickelten Kriterien an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen erfüllen (vgl. Anhang 1.3 und Anhang 2). Dies war im Wesentlichen bei allen Aufgaben der Fall. Teilweise war es notwendig, Bedingungen zu formulieren, um die Kriterien Validität und Gerechtigkeit zu erfüllen, z. B. bei den Aufgaben „Anwendung des Nullstellensatzes“, „Zwischenwertsatz“ (vgl. Anhang 1.3). Zu allen Aufgaben wurden „Anleitungen zur Kompetenzbeurteilung“ entworfen, die einen Erwartungshorizont, eine Erläuterung der einbezogenen mathematischen Kompetenzen und konkrete Kriterien (Indikatoren) für die aufgabenbezogenen Kompetenzbeurteilungen enthielten (vgl. 4.2.3, Beispiel 8 sowie Anhang 1.3). Die Materialien unterstützen die Entscheidungsfindung während der Beurteilung und dienen der Verbesserung der Objektivität, Reliabilität und Effektivität der Beurteilung. Die Aufstellung der potenziell anregbaren und damit erst beurteilbaren Kompetenzen macht zugleich die Validität der Beurteilung kontrollierbar, da so beurteilt werden kann, ob die Aufgabe Ansprüchen einer ausgewogenen Förderung entspricht (z. B. verschiedene Aktivitätsbereiche bzw. Kompetenzen der Bildungsstandards anspricht). Schließlich wird anhand der Beurteilungskriterien auch eine verbesserte Transparenz der Beurteilung ermöglicht, da sie konkrete Anhaltspunkte für die individuelle Rückmeldung geben und die Grundlage von Diskussionen über gemeinsame Leistungsmaßstäbe werden können. Ebenso sollten die Kriterien der differenzierten Kompetenzbeurteilung von anderen Beurteilenden nachvollzogen werden können, um eine solche Beurteilung selbst auszuführen, aber auch Außenstehenden, wie Eltern, Schulleitung, können auf diese Weise Standards des eigenen Unterrichts vermittelt werden.

Die zunächst aufwendige Erarbeitung derartiger Materialien für jeden Beurteilungsanlass relativiert sich dadurch, dass sie über die Klasse und über das Schuljahr hinweg einsetzbar sind. Von den Fachlehrern eines Jahrgangs könnten derartige Materialien, insbesondere die kompetenzbezogenen Beurteilungskriterien gemeinsam entwickelt werden, woraus sich ein klassenübergreifender Diskurs der Förderung mathematischer Kompetenzen entwickeln könnte, mit oder ohne Vergleichen innerhalb der Jahrgangsstufe. In diesem Sinne können die, innerhalb dieser Arbeit erstellten, Materialien eine Möglichkeit darstellen, in den Netzwerkklassen an Angelpunkten des Curriculums die Leistungen der Schüler zu erfassen, um den Austausch über die gezielte Förderung anzuregen und durch Daten zu konkretisieren.

### 4.2.3 Exemplarische Beurteilung von Schülerarbeiten zur Aufgabe Parabelschar

In diesem Abschnitt werden exemplarisch an der Aufgabe Parabelschar des Stoffabschnittes Ganzrationale Funktionen in der Einführung der Differenzialrechnung (vgl. Übersicht 4/5) die Beurteilungen zweier Schülerarbeiten vorgestellt. Dies gliedert sich in die Darstellung der aufgaben- und kompetenzspezifischen Beurteilungskriterien, die Analyse der Schülerarbeiten und die Rückmeldung anhand der Beurteilungsbögen.

Beispiel 8
Aufgabenspezifische Beurteilung und Rückmeldung mathematischer Kompetenzen
für zwei Schülerarbeiten zur Aufgabe 11B3.1 Parabelschar

Aufgabenspezifische Beurteilungskriterien

1. Grundwissen (GW)

Folgende Wissensinhalte sind zur Lösung der Aufgabe (voraussichtlich) notwendig:
- Quadratische Funktionen: Normalform, Scheitelpunktsform, faktorisierte Darstellung,
- Nullstellen, Scheitelpunkt quadratischer Funktionen,
- Eigenschaften der Graphen quadratischer Funktionen, insbesondere Symmetrie,
- Kenntnis der Begriffe Parabelschar, geometrischer Ort.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Das aufgelistete, zur Lösung der Aufgabe notwendige Grundwissen wird korrekt dargelegt und angewendet. Der Lösungsweg enthält keine Fehler oder Lücken/Abbrüche, die offensichtlich fehlendem Grundwissen zuzuschreiben sind. |
| 3 Punkte | Das Faktenwissen und prozedurale Wissen zu den wichtigen Verfahren der Stoffeinheit (Standardwissen) wird fehlerfrei dargelegt. Beim konzeptuellen Wissen zu übergeordneten Zusammenhängen treten (wenige, kleinere) Fehler auf, z. B. bei der Benennung des geometrischen Ortes der Scheitelpunkte. Ungenauigkeiten in der fachsprachlichen Beschreibung, die auf das Grundwissen zurückzuführen sind, treten auf, z. B. wenn die Begriffe Stauchung/Streckung nicht verwendet werden. |
| 2 Punkte | Ein fundamentales Wissenselement aus der aktuellen Stoffeinheit Ganzrationale Funktionen ist nicht anwendbar, z. B. Scheitelpunktsform oder Symmetrieeigenschaften der Normalparabel. |
| 1 Punkt | Deutliche Lücken im Standardwissen sind sichtbar. |
| 0 Punkte | Das für die Stoffeinheit typische Grundwissen wird nicht gezeigt. |

2. Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)

In Aufgabenteil a) ist ein Weg zu finden, aus den gegebenen Nullstellen die Funktionsgleichung zu ermitteln. Zur Angabe des Scheitelpunkts ist die Scheitelpunktsform zu bestimmen oder die Symmetrie auszunutzen. Die Schwierigkeit bzgl. heuristischer Aktivitäten ist hier abhängig von der Vorbereitung im Unterricht. Wurden die genannten Umformungen (kurz) zuvor im Unterricht thematisiert, entfällt das Suchen eines geeigneten Lösungsweges und formale Verfahren sind auszuführen.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Die gewählten Konzepte, Methoden, Darstellungen und mathematischen Operationen sind als Lösungsweg geeignet: Funktionsgleichung und Scheitelpunkt können bestimmt werden. Die Strategie ist zielorientiert und effektiv. Ein eigenständiger, kreativer Denkprozess ist erkennbar. |
| 3 Punkte | Eine Lösung wird erbracht, der Weg ist jedoch umständlich, z. B. ungeeignete formale Darstellungen der Funktion oder nicht zielorientierte Umformungen. Die Umwandlung enthält Flüchtigkeitsfehler, kleine Ungenauigkeiten oder einen unangemessenen Schritt, wie eine unangemessen verallgemeinerte verbale Argumentation. |
| 2 Punkte | Die Herangehensweise ist sinnvoll. Der Lösungsweg ist jedoch unvollständig, z. B. ein fehlender oder nicht sinnvoller Lösungsschritt. Wird nur der Scheitelpunkt oder nur die Funktionsgleichung bestimmt, können ebenfalls bis zu zwei Punkte vergeben werden. |
| 1 Punkt | Es können nur Bruchstücke zur Lösung beigetragen werden oder auf Grund fehlender Methoden und heuristischer Ideen werden Behelfsmethoden eingesetzt wie Raten oder Abschätzen des Scheitelpunktes ohne graphische Unterstützung und ohne Begründung. |
| 0 Punkte | Es gelingt kein Zugang zur Aufgabe. |

3. Ausführen von algebraischen Operationen, Umformungen (FO)

Kalkülhafte Grundfertigkeiten wie die folgenden werden bei dieser Aufgabe notwendig: Ausmultiplizieren und Zusammenfassen von Termen, Rechnen mit Brüchen, Anwenden der binomischen Formeln, quadratische Ergänzung, Faktorisieren von Gleichungen. Diese formalen Fertigkeiten werden im Wesentlichen in Klasse 8 erworben.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Es treten keine (Rechen-)Fehler auf, alle Umformungen, Teilergebnisse sind korrekt. |
| 3 Punkte | Es liegen wenige Rechenfehler vor, die aber die Problemlösung im Wesentlichen nicht beeinträchtigen. |
| 2 Punkte | Es zeigen sich erkennbare Unsicherheiten bezüglich formaler Fertigkeiten. |
| 1 Punkt | Es treten gehäuft Fehler, auch bei einfachen algebraischen Operationen der Sekundarstufe I und der Primarstufe, auf. |
| 0 Punkte | Die Aufgabe bzw. die betreffenden Teilaufgaben können auf Grund fehlender formaler Fertigkeiten nicht gelöst werden. |

4. Formal Darstellen (FO)

Die Kompetenz des formalen Darstellens äußert sich hier in geeigneten, korrekten und exakten funktionalen Darstellungen und der Nutzung von Variablen. Auch die geeignete Angabe des Scheitelpunktes gehört z. B. dazu. Dies gilt nicht nur für den formalen Teil a) sondern auch für den selbständigen Einsatz bei der Analyse, Begründung etc. im Teil b). Geeignete formale Darstellungen können hier die Lösungsfindung wesentlich unterstützen.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Die gewählten Notationen sind aussagekräftig, eindeutig, nachvollziehbar. Symbolische Darstellungen sind formal korrekt, exakt, nachvollziehbar und der Lösungsfindung dienlich. Die symbolische Darlegung des Lösungsweges ist angemessen ausführlich und verständlich. Formale Darstellungen werden selbständig gefunden. |
| 3 Punkte | Die formalen Darstellungen sind korrekt, z. T. aber nicht geeignet, da sie die Lösungsfindung nicht unterstützen oder schwer nachvollziehbar sind. Es treten einzelne Flüchtigkeitsfehler oder Unexaktheiten auf. Es gibt Unsicherheiten beim selbständigen Einsatz von Notationen und formalen Darstellungen. Eine geeignete formale Darstellung kann nicht durchgehend gefunden werden. |
| 2 Punkte | Formale Darstellungen werden (ungeeignet) sparsam und unsicher verwendet. Es treten Fehler und Ungenauigkeiten auf oder die Darstellung ist, z. B. auf Grund inkonsistenter Variablennutzung, schwer nachvollziehbar. Die Wahl der Darstellung ist ungeeignet für die Übersicht, Lösungsfindung u. ä. Es ist kein selbständiger, kreativer Einsatz formaler Schreibweisen (b), möglich. |
| 1 Punkt | Formale Darstellungen werden eingesetzt, sind jedoch schlecht lesbar/verständlich und zeigen deutliche formale oder mathematische Fehler, auch bei standardisierten Darlegungen des Lösungsweges. |
| 0 Punkte | Der Lösungsweg kann nicht formal dargelegt werden (obwohl es notwendig wäre). |

5. Mathematisch Argumentieren (KA)

Im Teil b) ist zu begründen, warum die Funktion anhand der gegebenen Bedingungen nicht eindeutig bestimmt werden kann. Dies kann z. B. anhand der Kenntnisse zu (unterbestimmten) linearen Gleichungssystemen oder durch die Beschreibung der möglichen Parabeln und ihrem Zusammenhang zu den Parametern der Funktionsgleichung geschehen. In Abhängigkeit vom gewählten Lösungsweg können in b) weitere Begründungen notwendig werden, z. B. ist auch die Schlussfolgerung auf die Lage der Scheitelpunkts geeignet zu begründen. Hier kann verbal argumentiert werden, z. B. mit bekannten Symmetrieeigenschaften. Formale Verfahren und exakte Beweise (z. B. der Symmetrie) werden nicht gefordert. Wird auch in a) durch begriffliche Argumentation auf die Lage der Scheitelpunkte geschlossen, ist dies in die Beurteilung einzubeziehen.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Die Argumentation ist mathematisch korrekt, logisch schlüssig und fundiert, d. h. sie beruht auf bekannten Sachverhalten/Sätzen (allgemeines Fachwissen, keine neuen Behauptungen). Die Argumentationsbasis ist sinnvoll gewählt, sachlich, logisch und formal korrekt bzw. widerspruchsfrei. Die Argumentationskette ist vollständig, enthält aber auch keine nicht relevanten Schritte bzw. Wiederholungen. Sie ist gut nachvollziehbar, zusammenhängend und schlüssig. Die Argumentation ist sprachlich und fachsprachlich korrekt formuliert. |
| 3 Punkte | Die Argumentationskette enthält kleine Sprünge, ist nicht immer ganz schlüssig. Die Argumentation ist zu einem geringen Teil ungenau (z. B. „Der Scheitelpunkt befindet sich genau zwischen den beiden Nullstellen.“), nicht ausreichend fundiert. |
| 2 Punkte | Die Argumentation ist in groben Zügen schlüssig und die Argumentationsbasis geeignet. Es treten jedoch kleinere logische oder mathematische Fehler auf, die Argumentation ist teilweise schwer nachvollziehbar, enthält Sprünge/Lücken, Folgerungen werden nicht ausreichend abgesichert. |
| 1 Punkt | Es gibt mehrfach unbegründete Aussagen, die Argumente sind z. T. nicht angemessen, es treten mathematische und logische Fehler auf oder die Argumentation ist oberflächlich, voreilig, bruchstückhaft. |
| 0 Punkte | Es findet keine angemessene Argumentation/Begründung statt. |

6. Analysieren, Vergleichen (HE)

In Teil b) ist eine formale oder auch graphische Darstellung der Funktion zu analysieren, wobei zunächst erkannt werden muss, dass ein freier Parameter übrig bleibt und zu einer Funktionenschar führt. Diese Schar ist auf ihre Merkmale hin zu untersuchen und mit der Funktion in a) zu vergleichen. Als Ergebnis der Analyse sind Zusammenhänge zur Funktion in a) und die Lage der Scheitelpunkte zu beschreiben.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Es werden geeignete Merkmale zur Analyse der Funktionenschar und zum Vergleich mit der konkreten Funktion (a) ausgewählt (Nullstellen, Scheitelpunkte, Symmetrie, Stauchung/Streckung/Verschiebung). Die Analyse ist exakt, vollständig, mathematisch korrekt. Die Merkmale werden als Analyseergebnis angemessen beschrieben. |
| 3 Punkte | Die Analyse ist nicht ganz exakt oder nicht vollständig oder bezieht sich nicht auf alle wesentlichen Merkmale. |
| 2 Punkte | Die Analyse ist unvollständig, z. B. wird nur die Lage der Scheitelpunkte beschrieben, nicht die möglichen Parabelformen (Stauchung/Streckung). Es findet keine Gegenüberstellung mit der konkreten Funktion statt. Der geometrische Ort der Scheitelpunkte kann nicht geeignet beschrieben werden. |
| 1 Punkt | Die Analyse ist oberflächlich oder sehr unvollständig. |
| 0 Punkte | Es ist keine Analyse erkennbar. |

7. Graphisch Darstellen (DI)

In Teilaufgabe c) ist eine geeignete Zahl von Repräsentanten der Parabelschar zu zeichnen. Diese sind so auszuwählen, dass die Schar (globale Struktur) insgesamt veranschaulicht wird, d. h. es sind unterschiedliche mögliche, charakterisierende Fälle für den Parameter $a$ zu wählen, z. B. 1.) $-\infty < a < -1$ (Streckung, gespiegelt), 2.) $-1 < a < 0$ (Stauchung, gespiegelt), 3.) $0 < a < 1$ (Stauchung), 4.) $1 < a < \infty$ (Streckung), außerdem ist es sinnvoll, die verschobene Normalparabel ($a$=1) sowie deren Spiegelung ($a$=-1) zu zeichnen.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Die graphische Darstellung ist mathematisch und in der Übersetzung der Eigenschaften korrekt. Sie ist übersichtlich (geeignete Größe und Intervall), exakt, sauber. Die Auswahl der Funktionen gewährleistet die Veranschaulichung charakteristischer Fälle der Schar (globale Struktur, siehe oben). |
| 3 Punkte | Die graphische Darstellung ist mathematisch korrekt. Größe oder Intervall o. ä. wurde jedoch ungünstig gewählt, so dass die Grafik unübersichtlich ist oder wichtige Eigenschaften schlecht veranschaulicht. Die gewählten Funktionen verdeutlichen nicht vollständig das Spektrum der Parabelschar. |
| 2 Punkte | Die gewählten Funktionen sind nicht geeignet, die Schar zu charakterisieren. Die graphische Darstellung ist unvollständig oder ungenau. Es liegen Widersprüche zur formalen Darstellung vor (Fehler in der Übersetzung). |
| 1 Punkt | Die graphische Darstellung ist sehr unsauber oder sehr ungenau. Mehrere Funktionen sind falsch eingetragen (mathematische Fehler) oder die Funktionenschar wird nicht veranschaulicht, z. B. wenn nur eine Funktion dargestellt wurde. |
| 0 Punkte | Es wurde keine graphische Darstellung angefertigt. |

Analyse der Bearbeitung von Schüler 3

a) Der Scheitel liegt auf dem Punkt $(-1{,}5|y)$, da die eine Nullstelle -1 und die andere 4 ist, daher hab ich die Mitte dazwischen gesucht und die ist 1,5. Dann ist die Funktionsgleichung erst mal $f(x)=(x-1{,}5)^2$. Wenn man jetzt für $x=4$ einsetzt (die zweite Nullstelle) kommt 6,25 raus, daher ergibt sich die Funktionsgleichung
$f(x)=(x-1{,}5)^2-6{,}25$ da jetzt bei $x=4$ sich für $y=0$ ergibt. Wenn $x=-1$ (zweite Nullstelle) ergibt sich auch $y=0$.
$\Rightarrow f(x)=x^2-3x-4$
Um jetzt den Scheitelpunkt zu berechnen, setze ich für $x=1{,}5$ ein. Daraus ergibt sich $y=-6{,}25$.
$\Rightarrow$ Scheitelpunkt=$(1{,}5|-6{,}25)$

b) Wenn in der quadratischen Funktion ($f(x)=ax^2+bx+c$) das $a$ verändert wird, so verändert sich die Parabel dahingehend, dass sie steiler fällt bzw. steiler steigt. Wenn $a$ positiv ist, so ist die Parabel nach oben hin offen. Ist $a$ negativ, ist die Parabel nach unten geöffnet. Nun kann das $a$ ja beliebig verändert werden und es ergeben sich unendlich viele Möglichkeiten für diese Funktion. Wobei die Nullstellen unverändert bleiben und die Koordinate des Scheitelpunktes auch unverändert bleibt. Lediglich verändert sich die $y$-Koordinate des Scheitelpunktes. Somit ist der geometrische Ort aller Scheitelpunkte auf der senkrechten Gerade auf der $x$-Achse bei $x=1{,}5$.

Abb. 4/17: Bearbeitung von Schüler 3 (Die Abschrift wurde aus Gründen der Lesbarkeit vorgenommen. Sie enthält den Originaltext der Schülerarbeit.)

Der Schüler ermittelt zunächst auf rationale und anschauliche Weise die Funktionsgleichung. Er hat die Parabel der Funktion vor Augen und nutzt zur Bestimmung der Scheitelpunktskoordinate die Achsensymmetrie, indem er das arithmetische Mittel der Nullstellen bestimmt. Leider begründet er sein Vorgehen nicht durch die Symmetrieeigenschaft. Er stellt nun sukzessive die Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung zusammen, indem er zunächst die $x$-Koordinate des Scheitelpunktes einsetzt (Hier gibt es einen Flüchtigkeitsfehler bei der formalen Darstellung: die noch freie Variable wurde vergessen.) und dann durch Einsetzen einer Nullstelle den freien Parameter bestimmt. Die Scheitelpunktsform wird in die Normalform umgewandelt. Damit wird zur Kontrolle ein zweites Mal die $y$-Koordinate des Scheitelpunktes bestimmt, die bereits aus der Scheitelpunktsform abgelesen werden konnte.

Bei der Analyse der Funktionenschar bringt der Schüler den Parameter $a$ sofort mit der Stauchung/Streckung in Verbindung, leider ohne die Fachbegriffe zu verwenden. Er beschreibt die Wirkung des Parameters $a$ auf die Kurve, allerdings ohne zu begründen, warum $a$ die Form der Parabel, jedoch nicht ihre Nullstellen und ihren Scheitelpunkt, also ihre Lage, verändert. Die Zusammenhänge zwischen Funktionsgleichung und Funktionsgraph werden nicht ausreichend hergestellt, wozu evtl. auch ein Wechsel in die Scheitelpunktsform dienlich wäre. Aus der Darlegung wird nicht deutlich, woraus der Schüler schließt, dass die Nullstellen nicht vom Parameter $a$ abhängen und somit auch nicht die $x$-Koordinate des Scheitelpunkts. Er schließt jedoch richtig auf die Lage der Scheitelpunkte und kann den geometrischen Ort der Scheitelpunkte gut fachsprachlich benennen. Leider wird in der Darlegung nicht deutlich, ob diese so schöne Schlussfolgerung auf graphischen oder formalen Überlegungen beruht, was für eine Einschätzung der Stärken des Schülers wichtig wäre.

In der graphischen Darstellung, die auf Grund der schlechten Qualität nicht wiedergegeben werden kann, zeichnet der Schüler eine Reihe von Funktionen ein, welche die Breite der Schar und die beschriebenen Eigenschaften (gemeinsame Nullstellen, unterschiedliche Stauchung/Streckung) gut veranschaulichen. Auch der geometrische Ort der Scheitelpunkte wird illustriert. Leider ist die Darstellung skizzenhaft ungenau.

Beurteilungsbogen für Schüler 3

| **Mathematische Kompetenz** | **Einschätzung** | **Bemerkung** |
|---|---|---|
| Grundwissen (GW) | 4 Punkte | sehr gute Grundkenntnisse zu quadratischen Funktionen |
| Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE) | 4 Punkte | rationales und zielorientiertes Vorgehen, schöne Vernetzung formaler und bildlicher Mittel |
| Formal Darstellen (DI) | 3 Punkte | Flüchtigkeitsfehler |
| Ausführen algebraischer Operationen, Berechnungen (FO) | 4 Punkte | |
| Mathematisch Argumentieren (KA) | 1 Punkt | Die Argumentation ist unvollständig und teilweise nicht ausreichend fundiert: Warum ist $a$ beliebig, aber $b$ und $c$ nicht? Warum verändert sich $y_s$, aber $x_s$ nicht? etc. |
| Analysieren und Vergleichen (HE) | 2 Punkte | Die Wirkung des Parameters wird gut beschrieben. Es findet jedoch keine direkte Gegenüberstellung, z. B. der Funktionsgleichungen in Scheitelpunktsform oder der Graphen statt, was die Gemeinsamkeiten und Unterschiede klar aufzeigen würde. Die Analyse selbst ist somit nicht nachvollziehbar (z. B. durch Bezug zu graphischen Veranschaulichungen). |
| Graphisch Darstellen (DI) | 3 Punkte | Die gewählten Beispiele verdeutlichen die Breite der Funktionenschar sowie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede verschiedener Repräsentanten gut. Die graphische Darstellung ist leider recht ungenau. |
| Weitere Bemerkungen | | Die Bestimmung des Scheitelpunktes (a) wurde anschaulich und gut nachvollziehbar dargelegt. Leider haben Sie in b) nicht beschrieben, wie Sie zu Ihren Aussagen kommen. |

Analyse der Bearbeitung von Schüler 1

a) geg.: $f(x)= x^2+bx+c \rightarrow$ Normalform $b=f$; $c=q$

Nullstellen $x_1$=(4|0) und $x_2$=(-1|0)

- Funktionsgleichung:

  Satz des Vieta:

  $x_1+x_2$=-b → 4-1 =-(3)

  $x_1 \cdot x_2$ c → 4·(-1)=-4

  Einsetzen in die Gleichung:

  $f(x)= x^2-3x-4$

  Probe mit der $p$-$q$-Formel: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

  $x_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4}$

  $x_1$=4 und $x_2$=-1

- Scheitelpunkt:

  $f(x)= x^2-3x-4$

  $= x^2-3x+2{,}25-2{,}25-4$

  $= (x^2-1{,}5)^2-6{,}25$

  Scheitelpunkt $S$ (1,5|-6,25)

  → allgemeine Formel $S\left(-\frac{p}{2} \middle| -\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right)$

b) Diese Funktion ist nicht eindeutig lösbar, da $a \in IR$ beliebig ist und dadurch können viele Funktionen gleiche Nullstellen, aber unterschiedliche Graphen haben.

Vergleich:

$f_1(x)= x^2+bx+c$

$f_2(x)= ax^2+b'x+c'= a\cdot x^2+a\cdot bx+a\cdot c= a(x^2+bx+c)= a\cdot f_1(x)$

Menge aller Lösungen:

$M= \{ a\cdot f_1(x)$ mit $a \in IR, f_1(x)= x^2-3x-4\}$

Die Nullstellen und der Scheitelpunkt sind bei allen Graphen gleich (mit Variable $a$)

$x_1$=(4|0); $x_2$=(-1|0); $S$ (1,5|-6,25·$a$),

weil $f_1(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

$f_2(x) = a \cdot f_1(x) = a \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - a \cdot 6{,}25$

Abb. 4/18: Bearbeitung von Schüler 1/Teil 1 (Die Abschrift wurde aus Gründen der besseren Lesbarkeit vorgenommen. Sie enthält den Originaltext der Schülerarbeit.)

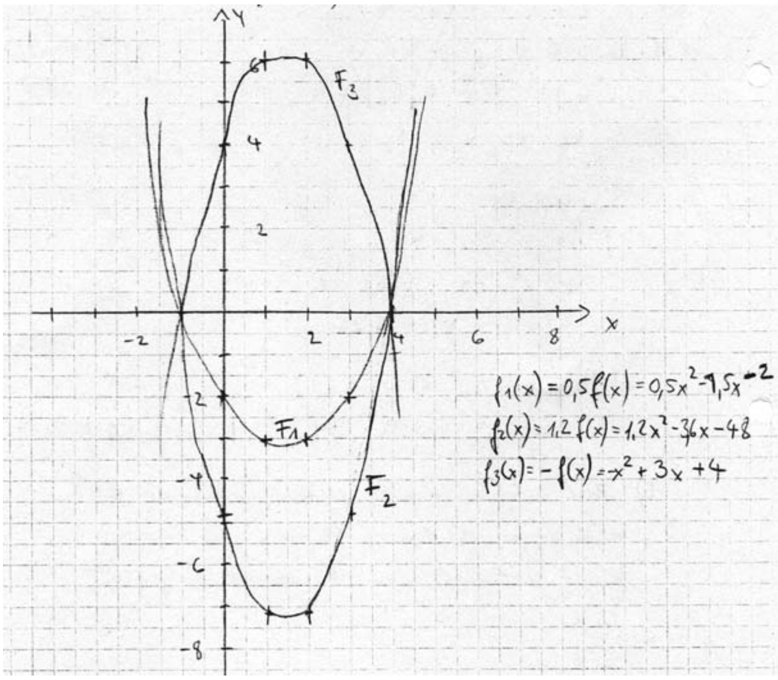



Abb. 4/19: Bearbeitung von Schüler 1/Teil2: Grafik zu Teilaufgabe b)

Die Bearbeitung der ersten Teilaufgabe besticht durch ein sehr gutes prozedurales Wissen, welches die notwendigen Verfahren bereitstellt, um die Funktionsgleichung und die Scheitelpunktskoordinaten schnell und sicher zu ermitteln. Mit dem Satz von Vieta werden zuerst sehr effektiv die Parameter der Normalform bestimmt. Nach der Kontrolle der Funktionsgleichung anhand der *p*-*q*-Formel wird durch quadratische Ergänzung die Scheitelpunktsform gebildet. Der Scheitelpunkt wird formal angegeben, zusätzlich auch eine allgemeine Formel für den Scheitelpunkt.

In b) fasst der Schüler zunächst verbal zusammen, dass der freie Parameter $a$ dazu führt, dass viele Funktionen entstehen, die „gleiche Nullstellen, aber unterschiedliche Graphen haben“. Er begründet an dieser Stelle noch nicht, warum der Parameter nicht auf die Nullstellen, sondern nur auf die Parabelform Einfluss hat. Dann geht er wieder auf die formale Ebene über: Hier stellt er schnell den Zusammenhang zwischen den gegebenen Funktionen heraus, zu schnell, denn es wird nicht deutlich, warum $a$ als Streckungsfaktor ausgeklammert werden kann. Mit der symbolischen Darstellung der Lösungsmenge zeigt der Schüler seine Fähigkeiten des exakten formalen Darstellens. Es folgt nun die Behauptung, dass die Nullstellen und die Scheitelpunkte (gemeint sind deren $x$-Koordinaten) bei allen Funktionen der Schar gleich sind. Nullstellen und Scheitelpunkt werden korrekt formal angegeben.

Die Begründung[95] erfolgt erneut formal, indem die Gleichung der Funktionenschar in die Scheitelpunktsform gebracht wird. Der geometrische Ort der Scheitelpunkte wird nicht beschrieben. Es bleibt bei der formalen Angabe der „Scheitelpunktschar“.

Die graphische Veranschaulichung erfolgt durch die Fälle Streckung, Stauchung, Spiegelung, d. h. die Breite der Funktionenschar wird verdeutlicht. Die Graphen werden auch bezeichnet, die graphische Darstellung ist jedoch skizzenhaft ungenau.

Beurteilungsbogen für Schüler 1

| **Mathematische Kompetenz** | **Einschätzung** | **Bemerkung** |
|---|---|---|
| Grundwissen | 4 Punkte | sehr gute Grundkenntnisse zu quadratischen Funktionen, insbesondere Verfahrenswissen |
| Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE) | 4 Punkte | sehr schnelle und sichere Anwendung effektiv ausgewählter Verfahren |
| Formal Darstellen (DI) | 4 Punkte | durchgehend exakte und korrekte formale Darstellungen (auch komplexer Zusammenhänge), gut geeignete Notationen und Darstellungen. |
| Ausführen algebraischer Operationen, Berechnungen (FO) | 4 Punkte | |
| Mathematisch Argumentieren (KA) | 2 Punkte | Sie begründen nicht, warum *a* beliebig und nicht durch die Nullstellen festgelegt ist. Ihre sehr guten rechnerischen Nachweise werden noch nicht ausreichend in eine mathematische Argumentation eingebunden. |
| Analysieren und Vergleichen (HE) | 2 Punkte | Sie stellen die Funktionen in Scheitelpunktsform gegenüber. Daraus ist das Wesentliche ablesbar. Sie beschreiben leider nicht ausreichend die Unterschiede zwischen den Graphen. Der geometrische Ort der Scheitelpunkte wird nicht beschrieben. |
| Graphisch Darstellen (DI) | 3 Punkte | Die gewählten Beispiele verdeutlichen gut, die Breite der Funktionenschar. Schön ist auch, dass Sie die Funktionen bezeichnen. Insgesamt ist die graphische Darstellung recht ungenau. |
| Weitere Bemerkungen | | Es ist toll, wie sicher und flexibel Sie mit formalen Darstellungen arbeiten. So gelingt es Ihnen schnell Zusammenhänge auf formaler Ebene aufzudecken. Nun sollten Sie versuchen, die Berechnungen stärker in eine Argumentation einzubinden (formal oder verbal). |

Die beiden Schülerarbeiten machen deutlich, dass zur Lösung der Aufgabe unterschiedliche Lösungsstrategien möglich sind: hier die graphisch-anschauliche und die algorith-

[95] Von einer „Begründung“ im eigentlichen Sinne (vgl. 2.2.2) kann hier noch nicht gesprochen werden. Der Lösungsweg besteht aus einzelnen Aussagen und Lösungsschritten, die noch zu wenig aufeinander bezogenen und aus denen noch zu wenige explizite Schlussfolgerungen gezogen werden. Dem Schüler ist der Anspruch, dass seine Aussagen zu begründen und seine Lösungsschritte zu kommentieren sind, noch nicht bewusst.

misch-formale Bearbeitung. Für beide Arbeiten sind Differenzierungskonzept und Beurteilungskriterien geeignet, da sie nicht an Lösungsschritte, sondern an dargelegte Kompetenzen angelehnt sind, die in unterschiedlicher Weise gezeigt werden können. So kann eine Argumentation durchaus verbal oder symbolisch geführt werden.

### 4.2.4 Schülerleistungen in unterschiedlichen Kompetenzbereichen

Bereits bei der Analyse einer Aufgabenbearbeitung zeigen sich individuelle Stärken und Schwächen. So zeigte beispielsweise Schüler 1, dass er effizient geeignete formale Darstellungen und Verfahren auswählen, diese sicher ausführen und damit auf formaler Ebene Zusammenhänge aufdecken kann. Dagegen gelingt es ihm noch nicht ausreichend, die Rechnungen in eine Argumentationskette einzubinden sowie die formalen Ergebnisse zu interpretieren. Es stellt sich nun die Frage, ob diese zunächst aufgabenspezifischen Resultate stabilen Stärken und Schwächen entsprechen, also auch bei anderen Aufgaben auftreten. Dazu werden die Leistungen der Schüler in den verschiedenen Aktivitätsbereichen bei allen Beurteilungsaufgaben der Analysis verfolgt.

Die Ergebnisse eines Schülers wurden in Abschnitt 3.4 vorgestellt, um eine mögliche Dokumentationsform der Schülerleistungen aufzuzeigen. Dabei wurden Stärken des Schülers bezüglich der Grundkenntnisse und im formal-operativen Bereich deutlich sowie aufgabenabhängige Schwankungen im heuristisch-experimentellen und darstellend-interpretativen Bereich, mit dem Schwerpunkt bei guten Leistungen, und aufgabenabhängige Schwankungen im Bereich kritisch-argumentativ mit dem Schwerpunkt bei (nur) mittleren Leistungen. Im Folgenden werden die Leistungen eines weiteren Schülers der zweiten Fallstudie dargestellt (Abb. 4/20 bis Abb. 4/24).

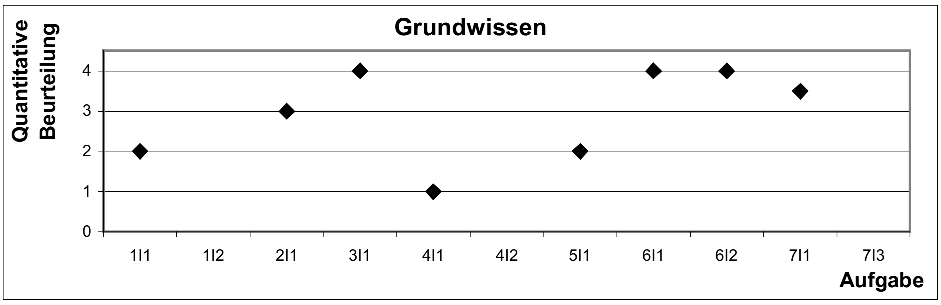



Abb.4/20: Ergebnisse zum Grundwissen von Schüler 3

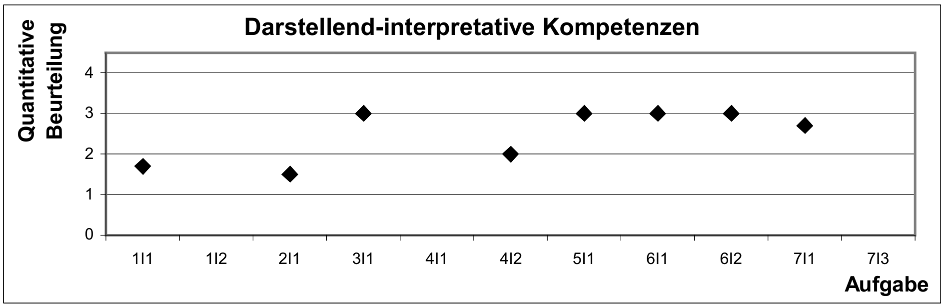



Abb. 4/21: Ergebnisse von Schüler 3 im darstellend-interpretativen Bereich

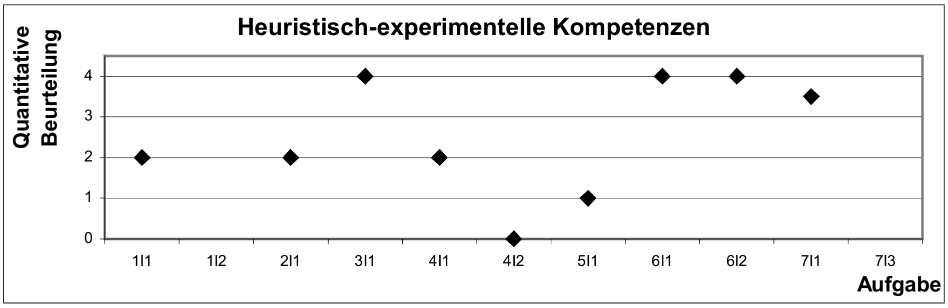



Abb. 4/22: Ergebnisse von Schüler 3 im heuristisch-experimentellen Bereich

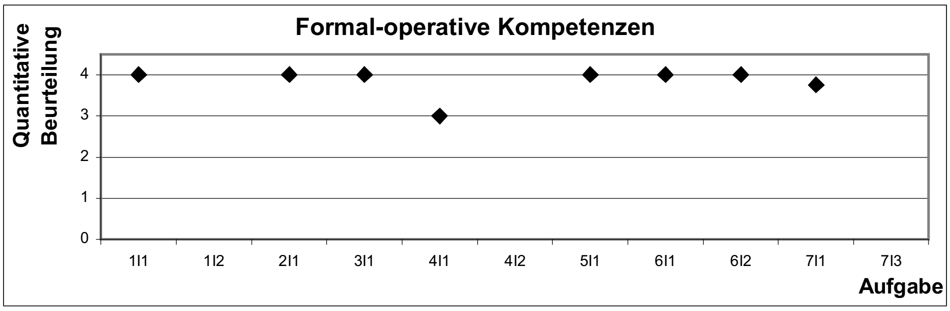



Abb. 4/23: Ergebnisse von Schüler 3 im formal-operativen Bereich

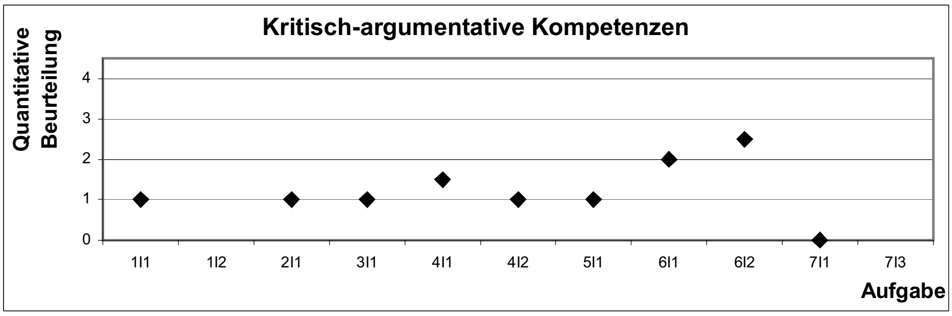



Abb. 4/24: Ergebnisse von Schüler 3 im kritisch-argumentativen Bereich

Bei der Betrachtung der dokumentierten Leistungen zeigen sich auch hier Bereiche, die stabil als Stärken oder Schwächen gesehen werden können und solche, in denen die Leistungen stark von der Aufgabe bzw. dem speziellen mathematischen Inhalt abhängen: Die Stärke des Schülers liegt im formal-operativen Bereich, also beim Ausführen algebraischer

Umformungen und beim Ausführen formaler Verfahren, wo er bei nahezu allen Aufgaben sehr gute Leistungen zeigte. Die Leistungen im heuristisch-experimentellen und im darstellend-interpretativen Bereich sowie im Darlegen von Grundkenntnissen schwanken (unterschiedlich stark) in Abhängigkeit von der konkreten Aufgabe bzw. dem speziellen Inhalt, wobei die Schwerpunkte der Verteilungen bei einem guten Niveau liegen. Der kritisch-argumentative Bereich äußert sich als Schwäche des Schülers, hier liegen die Leistungen überwiegend auf einem niedrigen Niveau.

Die Aufgabenabhängigkeit der Leistungen spricht für eine differenzierte aufgabenbezogene Beurteilung und Rückmeldung der mathematischen Kompetenzen, wie sie in dieser Fallstudie vorgenommen wurde. Die Aufgabenabhängigkeit bzw. Situationsbezogenheit kann Ursachen im konkreten Aufgabentyp, im speziellen Inhalt, den die Aufgabe anspricht oder in personengebunden Einflussfaktoren, wie aufgebrachte Zeit, momentane Konzentrationsfähigkeit etc. haben. Dem Aspekt der Aufgabenabhängigkeit wird in Kapitel 5 stärker nachgegangen.

### 4.2.5 Gemeinsamkeiten und Unterschiede in Kompetenzprofilen

Beim Vergleich der Kompetenzprofile von Schülern (vgl. Abb. 3/1 bis 3/5 und 4/20 bis 4/24) zeigen sich Gemeinsamkeiten und Unterschiede, die bedeutsam für eine effektive Planung und Gestaltung der mathematischen Förderung sein können. Gemeinsamkeiten können Hinweise auf sinnvolle prinzipielle Schwerpunkte der Förderung geben; Unterschiede dagegen können Hinweise für die individuelle Förderung geben. Um einzuschätzen, ob die Stärken und Schwächen der Schüler große Unterschiede zeigen oder sich eher ein einheitliches Bild ergibt, können verschiedene Bezugsmaßstäbe gewählt werden. Bei einer Orientierung an den aufgestellten Kriterien werden hier unter der Stärke eines Schüler die Kompetenzen verstanden, in denen er überwiegend sehr gute Leistungen zeigt, unter einer Schwäche die Kompetenzen, in denen seine Leistungen überwiegend auf einem niedrigen Niveau liegen.

In Abb. 4/25 wurden als Stärke die Kompetenzen gezählt, in welcher der Schüler überwiegend 4, sonst nur 3 Punkte erreichte. Ein mittleres Niveau wurde zugeschrieben, wenn die Leistungen überwiegend auf dem Niveau 2 und 3 lagen. Als Schwäche wurden die Kompetenzbereiche deklariert, in denen die Leistungen überwiegend auf dem niedrigsten Kompetenzniveau (1 Punkt) lagen. Die Kategorie „deutliche aufgabenabhängige Schwankungen" wurde verwendet, wenn die Leistungen über mindestens vier Kompetenzstufen streuten,

d. h. der Schüler in diesem Bereich sowohl sehr gute als auch niedrige oder gute bis gar keine Kompetenzen zeigte, je nachdem, welche Aufgabe vorlag.

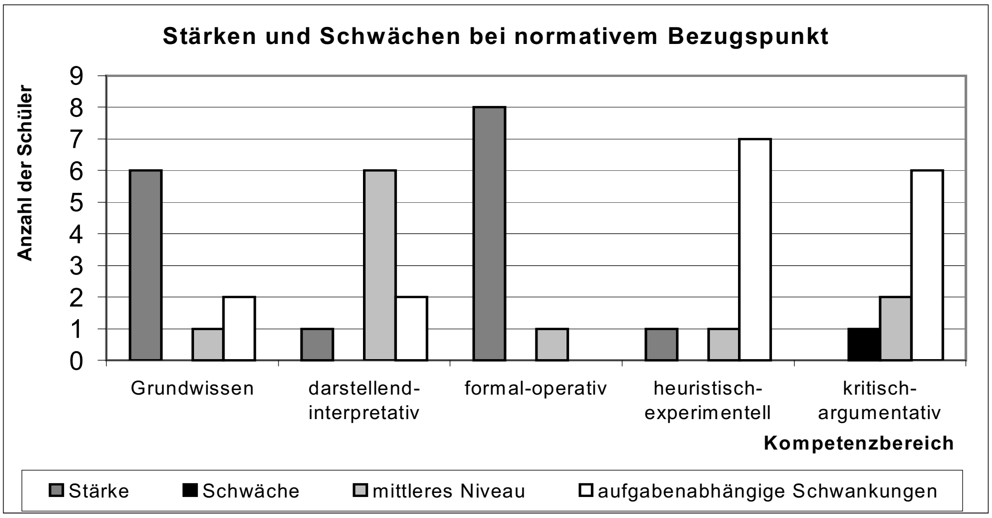



Abb. 4/25: Vergleich der Kompetenzprofile innerhalb der Klasse bei Normorientierung

Gemessen an einem kriterienorientierten Bezugspunkt zeigte sich für die spezielle Untersuchungsgruppe und den gewählten Zeitraum für alle Kompetenzbereiche ein unerwartet einheitliches Bild: Sechs von neun[96] Schülern legten überwiegend sehr gute Grundkenntnisse dar. Die Mehrheit der Schüler (sechs von neun) zeigte durchschnittlich ein mittleres Kompetenzniveau im darstellend-interpretativen Bereich. Acht Schüler zeigten im formal-operativen Bereich überwiegend sehr gute Leistungen. Im heuristisch-experimentellen Bereich schwankten die Leistungen von sieben Schülern über vier Kompetenzniveaus, die anderen zeigten überwiegend sehr gute oder mittlere Leistungen. Im kritisch-argumentativen Bereich schwankten ebenfalls die Leistungen von sechs Schülern sehr deutlich. Ein Schüler hatte dort überwiegend niedrige Leistungen.

Diese Ergebnisse verdeutlichen zunächst sehr gute Grundkenntnisse und formal-operative Kompetenzen der Lerngruppe. Die Leistungen im darstellend-interpretativen Bereich liegen überwiegend auf einem mittleren bis guten Niveau. Wird der Mittelwert über alle Schüler und alle Aufgaben berechnet, ergibt sich mit 2,8 ein zufriedenstellendes Ergebnis. Im heuristisch-experimentellen und kritisch-argumentativen Bereich überwiegen die aufgabenabhängigen Schwankungen. Hier zeigt sich die Bedeutung aufgabenbezogener Rückmeldungen. Ein mittlerer Wert für die gesamte Lerngruppe und alle Aufgaben kann wiederum eine Tendenz zeigen. Mit einem durchschnittlichen Wert von 3,5 sind die heuris-

---

[96] Ein Schüler konnte auf Grund zu weniger Aufgabenbearbeitungen nicht einbezogen werden.

tisch-experimentellen Kompetenzen der Schüler überwiegend im guten und sehr guten Bereich. Die Schwankungen werden verursacht von einigen Aufgaben, zu denen den Schüler der Zugang schwerer fiel. Häufig hatten die Schüler z. B. Schwierigkeiten geeignete Beweisstrategien zu finden. Solche aufgabenbezogenen Schwierigkeiten können mit der gesamten Lerngruppe thematisiert werden. Im kritisch-argumentativen Bereich liegt der Mittelwert der erreichten Kompetenzniveaus über alle Aufgaben und alle Schüler bei 2,0. Auf Grund des großen Abstandes zu den mittleren Werten der anderen Kompetenzbereiche ergibt sich auch für diese Lerngruppe ein verstärkter Förderbedarf für kritisch-argumentative Kompetenzen. Diese Förderung kann für die gesamte Lerngruppe geplant werden, da alle Schüler im kritisch-argumentativen Bereich die persönlich schlechtesten Ergebnisse erzielten.

Werden einzelne Aufgaben betrachtet fällt mit einem Klassenmittel von 0,4 im heuristisch-experimentellen Bereich Aufgabe 11B4.2 heraus. Die Schüler sollten hier den Zwischenwertsatz angelehnt an den Nullstellensatz beweisen (vgl. Anhang 1.3). Keinem Schüler gelang es eine geeignete Beweisstrategie zu finden. Einen Gegensatz bildete zum Beispiel Aufgabe 11B7.3 mit einem Klassenmittel von 4,0 im heuristisch-experimentellen Bereich. Für diese außermathematische Extremwertaufgabe („Optimaler Einstrittspreis“, vgl. Anhang 2.4) fanden alle Schüler einen geeigneten Ansatz. Für die anderen Kompetenzbereiche gab es keine derart großen Gegensätze.

### 4.2.6 Rückmeldungen der Schüler zur aufgabenbezogenen differenzierten Leistungsbeurteilung

Anhand eines Fragebogens wurden im November 2003 die Meinungen der Schüler zur aufgabenbezogenen differenzierten Rückmeldungen erfasst. Die Befragung fand zu einem Zeitpunkt innerhalb der Erprobung statt, um auf die Probleme und Wünsche der Schüler noch reagieren zu können. Neun von zehn Schülern nahmen an der Befragung teil. Im Folgenden werden die Fragen und alle Schülerantworten[97] festgehalten.

| 1. Die Anforderungen in den Hausaufgaben sind | | | | |
|---|---|---|---|---|
| zu hoch | eher zu hoch | gerade richtig | eher zu niedrig | zu niedrig |
| 1 | 4 | 4 | | |

[97] Auch hier wurde keine Korrektur der Rechtschreibung in den Schülerantworten vorgenommen.

| 2. Die Rückmeldung ist für mich nachvollziehbar und verständlich | | | | |
|---|---|---|---|---|
| nie | selten | teils teils | oft | immer |
| | | 2 | 6 | 1 |

**Erläutern Sie bitte kurz, was Ihnen unverständlich ist.**

„In manchen Bewertungen sind mir die Zahlen (Bewertung) nicht verständlich bzw. ist mir nicht klar, was genau gefordert war.“

„Zum Teil ist mir unklar, auf welche Stelle der Hausaufgabe sich eine Bewertung bezieht.“

„Nur manchmal die Schrift!“

„ich weiß nicht ...“

„ich kann die Schrift nicht lesen Stichpunkte zu kurz → unverständlich“

| 3. Die Ergebnisse sind für mich interessant. | | | | |
|---|---|---|---|---|
| nie | selten | teils teils | oft | immer |
| | 1 | 3 | 4 | 1 |

**Begründen Sie bitte kurz, warum die Ergebnisse für Sie interessant sind oder nicht.**

„Meist sind die Aufgaben sehr praxisorientiert in Feldern, die mich interessieren, daher sind die Ergebnisse interessant.“

„es ist interessant, dass es doch eine Lösung gibt“

„Die Ergebnisse sind interessant, weil ich mich vorher zu Hause mit der Aufgabe beschäftigt habe und sich dann meine Fragen und Unklarheiten klären.“

„Ich kann mich dort orientieren, wie ich was verbessern könnte, falls (!) ich mich daran erinnere, auf das Blatt zu gucken.“

„Es ist interessant zu sehen, ob meine Lösung richtig war und, wenn sie falsch sein sollte, wo der Fehler lag.“

„Ich könnte die Ergebnisse nutzen um meine Schwächen zu stärken, aber noch nutze ich die Möglichkeit nicht.“

„weil ich die Ergebnisse vorher nicht wusste und sie jetzt auch wissen will“

„Durch die Ergebnisse lässt sich das lernen erweitern und verbessern.“

„Geben Hinweise zum Verbessern für folgende Aufgaben.“

| 4. Ich verwende die Rückmeldungen beim selbständigen Lernen. | | | | |
|---|---|---|---|---|
| nie | selten | manchmal | oft | immer |
| 2 | 2 | 4 | 1 | |

| 5. Scheint Ihnen diese Form der Leistungsbeurteilung als Ergänzung zur Schulnote geeignet? | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ja | eher ja | zum Teil | eher nein | nein |
| 4 | 3 | 2 | | |

| Begründen Sie bitte wieder kurz. |
|---|
| „Es deckt effektiv die Schwachstellen auf an denen noch gearbeitet werden muss (auch von Seiten des Lehrers ☺)"<br>„Defizite werden ausführlich beschrieben, sodass man sie ausgleichen könnte"<br>„Ich denke, dass es nur bedingt hilfreich ist, da man sich bei Fragen nur an Herr [...] wenden kann."<br>„Es ist wie eine Hausaufgabe, nur mit anderen Noten."<br>„Es ist sehr gut zu wissen, wo genau die eigenen Schwächen liegen, damit sie gezielter verbessert werden können."<br>„Bei dieser Art der Bewertung erkenne ich meine Schwächen, wie z. B. meine Schwäche in der Begründung."<br>„Somit weiß ich, was ich falsch gemacht habe." „besser nachvollziehbar, erläutert"<br>„Siehe 3. "<br>„Da eine genauere Benotung der einzelnen Bereiche erfolgt." |
| Welche Änderungen/Verbesserungen würden Sie sich wünschen? |
| „vielleicht eine genaue Erläuterung zu den Bewertungen"<br>„bessere Noten"<br>„Manchmal treten Probleme bei der Schrifterkennung auf."<br>„vielleicht deutlichere Schrift"<br>„keine" |
| 5. Ordnen Sie die Kompetenzen, die in den Hausaufgaben analysiert werden nach der Häufigkeit, mit der sie innerhalb Ihres Mathematikunterrichtes bis Klasse 10 auftraten. |
| 1. am häufigsten: FO (8x)<br>2. DI (7x), HE (1x)<br>3. KA (4x), HE (3x), DI (2x)<br>4. am seltensten: HE (3x), KA (4x), „alle" (1x) |

Für die Konzeptentwicklung sind vor allem folgende Rückmeldungen der Schüler wichtig:

- Den Schülern ist teilweise nicht bewusst, was von ihnen gefordert war. Um dies zu ändern, sollten zum einen die Aufgabenstellungen unmissverständlich und explizit formuliert und zum anderen die Beurteilungskriterien offen gelegt werden. Eine Möglichkeit wäre, die allgemeinen kompetenzbezogenen Kriterien gemeinsam zu diskutieren oder sogar zu erarbeiten, was in dieser Studie noch nicht stattfand. Der Verinnerlichung der Kriterien können auch gemeinsame Reflexionen dienen, in denen die Kriterien an geeigneten Darlegungen demonstriert werden.
- Die Erläuterungen waren teilweise zu kurz, nicht verständlich genug oder es wurde nicht ausreichend deutlich, auf welche Stelle der Bearbeitung sie sich bezogen. Demzufolge könnten die Beurteilungen noch ausführlicher und konkreter gestaltet und ver-

stärkt mit Kommentaren an den Lösungen verbunden werden. Das würde aber einem noch größeren zeitlichen Aufwand der Beurteilung entsprechen.[98]

- Die Rückmeldungen sind für die Mehrheit der Schüler interessant. Einige Schüler erkennen, dass die differenzierten Beurteilungen helfen können, sich zu verbessern. Dennoch verwenden sie die Rückmeldungen für das selbständige Lernen eher selten.
- Die Schüler finden die differenzierte Beurteilung mathematischer Kompetenzen als Ergänzung zur Schulnote geeignet, weil sie ihnen hilft, ihre Schwächen zu erkennen.

Zusammengefasst nehmen die Schüler der zweiten Fallstudie die differenzierten Rückmeldungen zu ihren Kompetenzdarlegungen an, ihre Kommentare sind jedoch weniger positiv als die der Schüler der ersten Fallstudie. Das kann folgende Ursachen haben:

- Die Rückmeldungen beziehen sich konkret auf eine Aufgabe. Die Erläuterungen begründen überwiegend die Zuordnung zu niedrigeren Kompetenzniveaus. Positives wird dadurch zu wenig herausgehoben.
- Die Rückmeldungen sind kriterienorientiert. Ein individueller Vergleich zu früheren Leistungen kann bei einer aufgabenbezogenen Beurteilung nicht stattfinden, da sich die Aufgaben zu sehr unterschieden. Verbesserungen werden somit nicht deutlich.
- Einige der Schüler sind weniger leistungsorientiert als die Schüler der ersten Fallstudie und fühlen sich möglicherweise eher beurteilt als unterstützt.

### 4.2.7 Vor- und Nachteile der aufgabenbezogenen differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

Auch für die differenzierende Leistungsbeurteilung anhand exemplarischer Aufgaben wurden während der Erprobung Vorteile und Nachteile deutlich:

- Es können differenzierte individuelle und konkret aufgabenbezogene Rückmeldungen zu den bei der Aufgabenbearbeitung dargelegten Kompetenzen gegeben werden, die geeignet sind, das eigenverantwortliche Lernen zu unterstützen. Die aufgabenbezogene Rückmeldung erlaubt eine schnelle Rückmeldung an die Schüler, so dass Hilfestellungen sofort berücksichtigt werden können.
- Entwicklungen der Kompetenzen, insbesondere Kompetenzzuwächse, können dagegen mit der Beurteilung durch exemplarische Aufgaben weniger gut dargestellt und bewusst gemacht werden. Die Aufgaben zeigen im Inhalt, im Aufgabentyp und in den kompe-

[98] Im üblichen Unterrichtsalltag kann diesem Kritikpunkt dahingehen entgegen gewirkt werden, dass der Beurteilende für Rückfragen zur Verfügung steht, was in der Erprobung selten der Fall war.

tenzbezogenen Anforderungen deutliche Unterschiede. Die Kompetenzdarlegungen der Schüler sind wesentlich von der speziellen Aufgabe abhängig. Nur z. T. zeigen sich stabile Kompetenzniveaus. Entwicklungen können besser mit Aufgaben dargestellt werden, die sich inhaltlich und in ihrem Anspruch ähnlicher sind. Bei der kontinuierlichen Beurteilung können durch häufige Beurteilungsanlässe Entwicklungstendenzen zwischen größeren Unterrichtsabschnitten erkenntlich gemacht werden. Dabei werden aufgabenabhängige Schwankungen jedoch nur „ausgemittelt“.

- Neben individuellen Rückmeldungen an die Schüler bietet die Beurteilung mathematischer Kompetenzen anhand exemplarischer Aufgaben dem unterrichtenden Lehrer differenzierte Informationen über die Kenntnisse und Fähigkeiten seiner Schüler zu wichtigen Inhalten. Davon können Strategien der Unterrichtsgestaltung und Förderung der gesamten Klasse sowie Ansatzpunkte für die individuelle Förderung abgeleitet werden.
- Der zeitliche Aufwand ist gegenüber der kontinuierlichen Analyse deutlich geringer, gegenüber der herkömmlichen Beurteilung aber immer noch hoch.

### 4.2.8 Übertragung der differenzierten aufgabenbezogenen Beurteilung mathematischer Kompetenzen in die Klassenstufe 12

Die differenzierte Beurteilung mathematischer Kompetenzen anhand exemplarischer Aufgaben wurde neben den bisher vorgestellten Analysisaufgaben der Klasse 11 auch an Aufgaben der Linearen Algebra in Klasse 11 und an Analysisaufgaben der Klasse 12 erprobt. Während die Untersuchung zu den Aufgaben der Linearen Algebra auf Grund einer anderen Schwerpunktsetzung gesondert in Kapitel 5 erfolgt, werden an dieser Stelle die Erfahrungen der Übertragung des Konzeptes in die zwölfte Klasse zusammengefasst. Da die Ergebnisse bzgl. der Konzeptentwickelung im Wesentlichen mit denen in den elften Klassen übereinstimmen, erfolgt die Darstellung in stark verkürzter Form.

Die Schüler der elften Klasse der ersten Fallstudie im Schuljahr 2002/2003 (Abschnitt 4.1) wurden auch im zwölften Schuljahr differenziert beurteilt. Auf Grund der methodischen Erfahrungen wurde mit dem Schuljahreswechsel auf die differenzierte Beurteilung anhand exemplarischer Aufgaben übergegangen. Von August 2003 bis März 2004 wurden zehn Aufgaben aus dem Gebiet der Differenzial- und Integralrechnung (vgl. Anhang 1.4) gestellt, die eine differenzierte Kompetenzbeurteilung zuließen. Die Beurteilung und Rückmeldung fand analog zu dem in diesem Abschnitt ausführlich für die elfte Klasse beschriebenen Verfahren anhand kompetenz- und aufgabenspezifischer Beurteilungskriterien und differenzierter Beurteilungsbögen statt.

Die Beurteilung wurde von der Fachlehrerin vorgenommen. Dies hatte zwei Ziele: Es konnte erprobt werden, dass die konkreten Beurteilungskriterien für die Arbeit des Lehrers geeignet sind und es konnte ein Bild über die Objektivität der Beurteilung anhand dieser Kriterien gewonnen werden, indem die Übereinstimmung der Beurteilung der Fachlehrerin und der eigenen Beurteilung untersucht wurde.

Bei 182 Beurteilungsentscheidungen gab es in 116 Fällen (64%) übereinstimmende Bewertungen, in 58 Fällen (32%) Abweichungen um ein Kompetenzniveau und in 8 Fällen (4%) Abweichungen von mehr als einem Kompetenzniveau. Die erstellten Materialien zur Beurteilung, insbesondere die kompetenz- und aufgabenspezifischen Beurteilungskriterien, erlaubten somit die Übernahme der differenzierten, kompetenzbezogenen Beurteilung durch die Fachlehrerin und eine zufriedenstellende Übereinstimmung der Bewertung.

Das Konzept der Differenzierung sowie das der Beurteilung konnte problemlos auf die Inhalte und Anforderungen der zwölften Klasse übertragen werden, wobei wieder Aufgaben der Fachlehrerin und ein Teil konzeptspezifischer Aufgaben verwendet wurden. Auf Grund der erhöhten Komplexität der Aufgaben gelingt es in Klasse 12 noch besser als in Klasse 11 die vier Aktivitätsbereiche in einer Aufgabe zusammenzubringen, so dass deutlich wird, dass zur Lösung anspruchsvoller mathematischer Aufgaben sehr unterschiedliche mathematische Kompetenzen notwendig und zu verknüpfen sind.

Die aufgabenbezogenen Rückmeldungen wurden von den Schülern angenommen, wobei sie den Vorteil hatten, dass die unterrichtende Lehrerin zugleich die Beurteilende war und ihnen für Nachfragen zur Verfügung stand, was für die Kommunikation über Leistungen, insbesondere auch für die Transparenz der Beurteilungskriterien, wichtig ist. Bei der Dokumentation der Leistungen wurden auch in dieser Fallstudie stabile individuelle Stärken sowie Kompetenzen mit deutlichen aufgabenabhängigen Schwankungen beobachtet. Wie in den vorangegangenen Fallstudien unterschieden sich die Kompetenzverteilungen zwischen den Schülern und bei einem Schüler zwischen den Kompetenzbereichen.

# 5. Objektive Anforderungen und individuelle Umsetzung mathematischer Aufgaben

Bei der Erprobung der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen zeigte sich, dass die kompetenzspezifischen Leistungen eines Schülers deutlich von der Aufgabe abhängen (vgl. 4.1 und 4.2). Einfluss auf die Schülerleistungen können Merkmale der Aufgabe wie Offenheit, Kontext und die mit der Aufgabe verbundenen (kompetenzspezifischen) Anforderungen haben. Darüber hinaus wurde beobachtet, dass die Schüler einen Teil der intendierten Aktivitäten nicht ausführten, wodurch die entsprechenden Kompetenzen nicht beurteilt werden konnten. Sind Aufgaben, wie die in der Erprobung verwendeten, methodisch offen angelegt, entwickeln die Schüler ihre eigene Lösungsstrategie und führen dabei Aktivitäten aus, die nicht unbedingt den intendierten entsprechen. Dieses eigenständige kreative Lösen mathematischer Aufgaben ist zu würdigen und zu unterstützen. Für eine zielorientierte Förderung der Schüler, insbesondere aber auch für eine differenzierte Rückmeldung ist es jedoch wichtig, dass die Schüler möglichst viele der intendierten Aktivitäten auch ausüben. Das heißt nicht, dass sie einer bestimmten Musterlösung folgen, sondern innerhalb ihres eigenen Lösungsweges bestimmte Kompetenzen darlegen[99]. Ziel ist es, für die Leistungsbeurteilung Aufgaben zu entwickeln, die zu vielseitigen Aktivitäten anregen, um entsprechend vielseitige Kompetenzen beurteilen zu können. Die verwendeten Aufgaben haben aus objektiver Sicht diese Anforderung erfüllt (vgl. Anhang 1.3, Anhang 2). Es stellt sich nach Bearbeitung der Aufgaben jedoch die Frage, ob das Potenzial der Aufgabe auch umgesetzt werden konnte und die Schüler beispielsweise Aktivitäten der vier Bereiche in ausgewogenem Verhältnis ausgeführt haben. Es wird angenommen, dass die Abweichungen zwischen intendierten und umgesetzten Aktivitäten von den Parametern der Aufgabe abhängen. So könnte ein ungewohnter Kontext Aktivitäten des Übersetzens in die mathematische Sprache erschweren oder ein Alltagskontext zur verbalen Argumentation anregen. Auch die sprachliche Formulierung kann die Aktivitäten der Schüler beeinflussen (vgl. Sjuts 2006, S. 110).

---

[99] Die Aktivitäten der Schüler sollen nicht auf die intendierten eingeengt werden, eine noch größere Vielfalt ist immer erwünscht. Dagegen soll durch geeignete Anregungen in den Aufgaben gegen eine begrenzte Aktivitätenvielfalt gearbeitet werden.

In diesem Kapitel wird deshalb exemplarisch untersucht, welche der intendierten Aktivitäten die Schüler ausführten, welche eher nicht und inwiefern diese Ergebnisse auf gewisse Aufgabenmerkmale zurückgeführt werden können. Es geht darum, durch die objektive Analyse der Aufgabenmerkmale und durch die Analyse von Schülerarbeiten, also der Aufgabenumsetzung, Hinweise zur Verbesserung der Qualität von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen zu erarbeiten.[100] Dabei steht die Frage im Vordergrund: Wie sehen Aufgaben aus, die vielfältige Aktivitäten zulassen und anregen, um eine differenzierte Beurteilung mathematischer Kompetenzen zu ermöglich? Auf diese Weise kann auch das erstellte System zur Analyse und Beschreibung von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen reflektiert werden. Für die Analyse der Umsetzung exemplarischer Aufgaben wurde eine weitere Fallstudie durchgeführt, um eine größere Anzahl von Schülerarbeiten auswerten zu können.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird die Untersuchungsmethode für die qualitative Analyse der Schülerarbeiten beschrieben. Anhand zweier Aufgaben, die sich in der Umsetzung unterscheiden, wird die Analyse demonstriert, wobei auch aufgabenspezifische Besonderheiten der Umsetzung deutlich werden. Schließlich werden die Ergebnisse aller sieben Aufgabenanalysen (vgl. Anhang 2) zusammengefasst und diskutiert.

## 5.1 Qualitative, aktivitätenbezogene Analyse von Schülerarbeiten

> „Als Unterrichtende tun wir notwendigerweise etwas, das im Unsichtbaren wirkt. Natürlich bemühen wir uns, uns ein Bild zu machen von dem, was aus unseren Lernangeboten in der Verarbeitung durch die Schülerinnen und Schüler entsteht. Wir beobachten, wir schließen aus Anzeichen, wir vermuten, wir fragen nach, aber wir wissen, dass wir nie genau wissen können, welche Lernprozesse ablaufen. “ (Spinner 1994, S. 155)

Wie Spinner beschreibt, sind die inneren Prozesse der Schüler Außenstehenden nicht zugänglich. Ein Lehrer kann nur aus seinen Beobachtungen auf die ihm verborgenen Prozesse schließen. Auch die bei Aufgabenbearbeitungen stattfindenden geistigen Aktivitäten werden nicht immer sichtbar, bleiben häufig verborgen (vgl. Sjuts 2006, S. 110). Eine Möglichkeit, sich der bei der Bearbeitung einer mathematischen Aufgabe von einem Schüler ausgeführten geistigen Aktivitäten zu nähern, ist die interpretative Analyse schriftlich

[100] Die für die vorliegende Arbeit nutzbaren Schülerarbeiten erlauben, auf Grund der kleinen, nicht repräsentativen Stichprobe, keine empirischen Schlüsse auf den Zusammenhang zwischen Aufgabenmerkmalen und der Anregung von Schüleraktivitäten. Generell kann nur von Tendenzen gesprochen werden, da bei verschiedenen Schülern verschiedene Aktivitäten induziert werden können. Möglicherweise ergeben sich jedoch Hinweise für die Aufgabengestaltung, die ggf. in umfassenderen Folgeuntersuchungen geprüft werden könnten.

vorliegender Aufgabenbearbeitungen. Die interpretative Analyse von Texten, die Schüler erzeugen, wenn sie Aufgaben lösen und dabei Verfahrensschritte, Zwischen- und Endergebnisse ihrer gedanklichen Bearbeitung notieren, findet vor allem im Rahmen der Diagnose, insbesondere im Rahmen der Erforschung von Schülerfehlern Anwendung (vgl. Beck/Maier 1994, S. 37, 3.2). In diesem Abschnitt wird eine Untersuchungsmethode zusammengestellt, mit der die von Schülern bei der Aufgabenbearbeitung ausgeführten Aktivitäten erschlossen und eingeordnet werden können. Ziel ist dabei der Vergleich zwischen den tatsächlich von den Schülern ausgeführten und den mit der Aufgabe intendierten Aktivitäten, was als ein wesentlicher Aspekt der umgesetzten Aufgabenqualität gesehen wird. Folgende Fragen sind dabei von Interesse:

1. Welche mathematischen Aktivitäten üben die Schüler bei der Aufgabenbearbeitung aus?
2. Welche Aktivitäten werden von vielen, welche von wenigen Schülern ausgeführt?
3. Wie ist die Verteilung der ausgeführten Aktivitäten auf die Aktivitätsbereiche von Lechner und wie verhält sie sich zur Verteilung der intendierten Aktivitäten?
4. Gibt es typische Lösungswege und werden diese durch charakteristische Aktivitäten ausgezeichnet?

### 5.1.1 Begründung der Einbeziehung qualitativer Forschungsmethoden

Grundlage der Beantwortung der genannten Fragen ist die Erschließung der von den Schülern bei der Aufgabenbearbeitung ausgeführten Aktivitäten. Dies erfolgt in dieser Arbeit durch die interpretative Analyse schriftlicher Aufgabenbearbeitungen. Die Angemessenheit qualitativer Untersuchungsmethoden für diesen Auswertungsschritt wird in diesem Abschnitt begründet. Die anschließende Analyse der aufgedeckten Schüleraktivitäten zur Beantwortung der Fragestellungen findet anhand einer Verbindung qualitativer und quantitativer Methoden statt.[101]

Qualitative Forschung hat den Anspruch, Lebenswelten aus der Sicht der handelnden Menschen zu beschreiben, um auf Abläufe, Deutungsmuster und Strukturmerkmale aufmerksam zu machen (vgl. Flick/Kardorff/Steinke 2003, S. 14). Die inneren Strukturen bleiben Außenstehenden verborgen, sind in der Regel aber auch „den in der Selbstverständlichkeit des Alltags befangenen Akteuren selbst nicht bewusst“ (Flick/Kardorff/Stein-

[101] Bei den hier eingesetzten quantitativen Verfahren handelt es sich lediglich um die Bestimmung von Häufigkeiten und deren Vergleich. Statistische Verfahren können auf Grund der Anlage der Untersuchung als Fallstudie, also der intensiven Auswertung eher geringer Datenmengen, nicht angewendet werden.

ke 2003, S. 14). Für die Überführung der zunächst verborgenen Struktur schriftlich dargelegter Lösungsprozesses in eine Abfolge von Schüleraktivitäten, ist es notwendig, die Gedankengänge des Schülers bei der Bearbeitung nachzuvollziehen. Insbesondere bei Verwendung der formalen, bei Schülern häufig recht knappen, ergebniszentrierten Darstellungsweise, ist es schwierig, sich in die Lage des Schülers zu versetzen und herauszufinden, wie er zu seiner Darlegung gelangte. Bei stark ergebniszentrierten, z. T. aber auch bei komplexen verbalen Formulierungen, kann deshalb nicht erwartet werden, dass auf diese Weise alle Schüleraktivitäten aufgedeckt werden.[102]

Qualitative Forschung ist in ihren Zugangsweisen häufig offener als Forschungsstrategien, die mit statistisch abgesicherten, standardisierten Methoden und normativen Konzepten arbeiten (vgl. Flick/Kardorff/Steinke 2003, S. 17). Sie eignet sich deshalb für Untersuchungen, bei denen es um die Erschließung eines bislang wenig erforschten Bereiches geht und erste Informationen zur Hypothesenformulierung für anschließende, standardisierte und repräsentative Erhebungen gewonnen werden sollen (vgl. Flick/Kardorff/Steinke 2003, S. 25). Dies trifft auf das Anliegen dieser Untersuchung zu: Es ist vor der Untersuchung offen, mit welchen Aktivitäten die Schüler auf die Anregungen der Aufgaben reagieren, wie das Verhältnis zwischen intendierten und ausgeführten Aktivitäten ist, etc.

Für quantitative Methoden ist das Formulieren von Hypothesen vor Beginn der Untersuchung unverzichtbar: Die Ausarbeitung des theoretischen Rahmens bestimmt die nachfolgenden (empirischen) Forschungsschritte (vgl. Meinefeld 2003, S. 266). Auch für qualitative Methoden wird die theoriegeleitete Wahrnehmung nicht in Frage gestellt, die Formulierung von Hypothesen im voraus jedoch abgelehnt (vgl. Meinefeld 2003, S. 266). So soll vermieden werden, dass der Forscher auf bestimmte Aspekte fixiert wird, die seinem eigenen (wissenschaftlichen und alltäglichen) Relevanzbereich entstammen, aber nicht von vornherein mit den Deutungsmustern der untersuchten Personen zusammenpassen (vgl. Meinefeld 2003, S. 266). Dies kann hier auf Grund der Unterrichtssituation, insbesondere der gezielten Anregung von Aktivitäten, nicht konsequent angewendet werden. Mit den Aufgaben sind bereits bestimmte Intentionen verbunden. Die in der objektiven Aufgaben-

[102] Um die Interpretation der Schüleraktivitäten sicherer zu gestalten, können nachfolgend Schülerinterviews durchgeführt werden, um mit den Schülern gemeinsam herauszufinden, welche Aktivitäten sie ausgeführt haben. Es ist jedoch anzunehmen, dass vielen Schülern während der Bearbeitung ihre Aktivitäten nicht bewusst sind. Vielmehr kann die differenzierte Rückmeldung dazu beitragen, den Schülern ihre Aktivitäten bewusst zu machen und diese zukünftig bewusster und kontrollierter auszuüben, um den Anforderungen der Aufgabenstellung noch besser gerecht zu werden.

analyse herausgestellten potenziell möglichen Aktivitäten sind zum Zeitpunkt der qualitativen Auswertung der Schülerarbeiten bekannt. Dennoch wird versucht, die Aktivitäten der Schüler zunächst offen, am Text, ohne Bezug zu den intendierten Aktivitäten zu erschließen. Die Gegenüberstellung mit den intendierten Aktivitäten und die Einordnung in die Aktivitätsbereiche findet erst im Anschluss statt.

Die Praxis qualitativer Forschung zeichnet sich u. a. durch folgende methodische Merkmale aus (vgl. Flick/Kardorff/Steinke 2003, S. 24):

1. Methodisches Spektrum statt Einzelmethode,
2. Gegenstandsangemessenheit der Methoden,
3. Fallanalyse als Ausgangspunkt,
4. Qualitative Forschung als Textwissenschaft.

Diese Eigenschaften entsprechen dem hier verfolgten Untersuchungsgegenstand: Die Verschiedenartigkeit der Untersuchungsfragen, verbunden mit den Ziel der Untersuchung von Zusammenhängen zwischen objektiven Anforderungen der Aufgabenstellung und den subjektiven Umsetzungen, macht z. B. die Anwendung unterschiedlicher Methoden und deren Anpassung[103] an den Untersuchungsgegenstand erforderlich. Ausgangspunkt der Untersuchungen sind die Analysen einzelner Fälle, hier die intensive Analyse von Schülerarbeiten. Erst dann findet Zusammenfassung, Vergleich und Gruppierung statt. Die schriftlichen Schülerarbeiten entsprechen Texten im erweiterten Sinne (vgl. Beck/Maier 1994, S. 37).

Die Unabhängigkeit des Beobachters vom Forschungsgegenstand hat einen zentralen Stellenwert in der quantitativen Forschung. Die qualitative Forschung greift dagegen auf die (methodisch kontrollierte) subjektive Wahrnehmung des Forschers zurück und betrachtet sie als Bestandteil der Erkenntnis (vgl. Flick/Kardorff/Steinke 2003, S. 25). Um qualitative Forschung dennoch nicht beliebig und willkürlich werden zu lassen, werden auch für qualitative Methoden Gütekriterien beschrieben. Die Gütekriterien der quantitativen Forschung (Objektivität, Reliabilität und Validität) sind für die qualitative Forschung vor allem auf Grund der vergleichsweise geringen Formalisier- und Standardisierbarkeit nicht geeignet (vgl. Steinke 2003, S. 322). Steinke (2003, S. 323ff.) formuliert dem spezifischen Profil qualitativer Forschung entsprechende Kernkriterien: intersubjektive Nachvollziehbarkeit, Gegenstandsangemessenheit des Vorgehens, empirische Verankerung von Hypo-

[103] Die Gegenstandsbezogenheit der Methoden hat zur Folge, dass für die konkrete Fragestellung dieser Arbeit nur Aspekte oder einzelne Schritte etablierter qualitativer Verfahren übernommen werden können oder dass diese anpassend modifiziert werden, was in den folgenden Abschnitten beschrieben wird.

thesen, Abgrenzung des Geltungsbereichs einer entwickelten Theorie, Kohärenz und Relevanz einer Theorie und reflektierte Subjektivität. Diese Kriterien sind auch für die vorliegende Arbeit leitend. Da es sich bei der schulpraktischen Untersuchung jedoch um eine explorative Studie mit einer nicht repräsentativen Stichprobe handelt, in welcher eine neue Methode erstmalig umgesetzt wird, können nicht alle Kriterien zufriedenstellend erfüllt werden. Demzufolge sind keine empirisch verankerten Hypothesen, sondern nur erste Hinweise auf mögliche Zusammenhänge formulierbar.

### 5.1.2 Erschließen der ausgeführten Aktivitäten durch offenes Codieren

Unter Codierung wird das Aufbrechen, Konzeptualisieren und auf neue Weise Zusammensetzen von Daten verstanden, wobei dem empirischen Material Begriffe (Codes) zugeordnet werden, die zunächst möglichst nahe am Text und später abstrakter formuliert werden (vgl. Flick 2000, S. 196/197). Es werden drei Arten des Codierens unterschieden, die auch Phasen im Forschungsprozess entsprechen können: offenes, axiales, selektives Codieren.

Das offene Codieren dient der analytischen Aufschlüsselung der Daten, indem diese in Begriffe gefasst werden. Dazu werden die Daten zunächst segmentiert: Aussagen werden in ihre Sinneinheiten zergliedert, um sie mit Anmerkungen und charakterisierenden Codes zu versehen (vgl. Flick 2000, S. 198, 200, Böhm 2003, S. 477/478). Ziel sind dabei Codes, die sich unmittelbar auf die Daten beziehen. Der Codierende nutzt sein Hintergrundwissen über den untersuchten Bereich. „Theoretische Codes“ im Sinne von Begriffen wissenschaftlicher Theorien sollten anfangs jedoch vermieden werden (vgl. Böhm 2003, S. 478). Statt dessen gelten „In-vivo-Codes“, die als umgangsprachliche Deutungen der Phänomene direkt aus der Sprache des Untersuchungstextes stammen, als fruchtbarer (Böhm 2003, S. 478).

Bei der aktivitätenbezogenen Analyse von Schülerarbeiten wird durch offenes Codieren der „Lösungstext“, d. h. die verbalen und symbolischen Darlegungen der Schüler innerhalb ihrer Aufgabenbearbeitung, in einzelne Lösungsschritte (Sinneinheiten) segmentiert. Der Begriff, der dieser Einheit im Codierungsprozess zugeordnet wird, ist nach der Aufgabenstellung dieser Arbeit eine mathematische Aktivität. Demnach grenzt der Wechsel der Aktivität das Segment ab. Die Länge der Abschnitte kann unterschiedlich sein, wichtig ist eine sinnvolle, altersgemäße Gliederung. Die Benennung der Aktivität erfolgt anhand der schriftlichen Darlegung des Schülers („In-vivo-codes“), ohne theoretisch erarbeitete Kategorien für Schüleraktivitäten an diesen Text heranzutragen. Dadurch bleibt dieser Auswer-

tungsschritt offen und es ist eher möglich, alle Schüleraktivitäten aufzuschlüsseln. Das Ergebnis dieses ersten Auswertungsschrittes ist somit eine Liste von Aktivitäten, welche der Schüler nach den verfügbaren Darlegungen bei der Lösung einer Aufgabe ausgeführt hat. Auf Grund des notwendigen Interpretationsprozesses (vgl. 5.1.1) sind bei einer knappen Darlegung des Lösungsprozesses die Rückschlüsse auf die kognitiven Aktivitäten der Schüler mit einer gewissen Unsicherheit verbunden. Aktivitäten, welche sich nicht in der schriftlichen Darlegung widerspiegeln, können nicht erfasst werden. Im Sinne des Gütekriteriums der reflektierten Subjektivität ist zu vermerken, dass die Abgrenzung, Benennung und Zuordnung einer Aktivität nicht immer eindeutig ist und deshalb trotz Textgebundenheit vom Analysierenden abhängen kann. Abhilfe kann hier die Konsensbildung bei einer Kodierung in einer Gruppe oder der Vergleich von Kodierungen unterschiedlicher Personen sein, was in dieser Arbeit auf Grund der Angemessenheit von Methode und Aufwand in einer ersten, ohnehin nicht repräsentativen Erprobung nicht vorgenommen werden konnte. Dieses Maß der Subjektivität der Auswertung überträgt sich auf folgende Analyseschritte.
Das offene Codieren von Schülerarbeiten wird exemplarisch in Anhang 2.1 und 2.2 dargestellt.

### 5.1.3 Analyse der aufgedeckten Schüleraktivitäten

Allein durch das Aufdecken der Aktivitäten werden die subjektiven Anforderungen der Aufgabe nicht ausreichend beschrieben. Im Anschluss an das offene Codieren findet eine Strukturierung und Analyse der aufgedeckten Aktivitäten statt, wobei auch quantitative Auswertungsschritte einbezogen werden.

Zunächst wird untersucht, welche Aktivitäten die Schüler häufig, welche eher selten ausgeführt haben (Frage 2). Kernaktivitäten, d. h. Aktivitäten, die von vielen Schülern ausgeführt werden, kennzeichnen das spezifische, auf Klasse und Unterrichtsituation bezogene, Förderungsvermögen einer Aufgaben besser als die potenziell möglichen Aktivitäten.

Um Häufigkeiten bestimmter Aktivitäten aufzunehmen werden die individuellen Aktivitäten, die vom speziellen Lösungsweg eines einzelnen Schülers geprägt sind, verglichen und auf gemeinsame Strukturen hin untersucht. Dieser Prozess entspricht einer Kategorisierung, d. h. der Zusammenfassung von Begriffen (Codes aus dem offenen Codieren) zu Oberbegriffen und der Herausarbeitung von Beziehungen zwischen Begriffen und Oberbegriffen (vgl. Flick 2000, S. 197). Die entstehenden Kategorien werden mit, nun abstrakteren, Codes versehen, die den Inhalt der Kategorie treffend wiedergeben. Es werden sowohl Aktivitäten innerhalb einer Lösung als auch zwischen den Lösungen der gesamten Klasse bezüglich ihrer Struktur und Anforderung verglichen und gruppiert. Beispielsweise kann die Aktivität „Bilden der ersten Ableitung“ mehrmals in einer Lösung und in allen Lösungen auftreten. Die Häufigkeitsanalyse bezieht sich auf alle Aktivitäten eines Schülers und auf alle in der Klasse erstellten Lösungen.[104]

Um einzuschätzen, ob mit einer gewählten Aufgabe eine vielseitige Förderung und Beurteilung gelingt, wird geprüft, ob die vier Aktivitätsbereiche von Lechner auch in der Umsetzung der Aufgabe ausgewogenen auftreten (Frage 3). Dazu ist eine weitere Kategorisierung, nun bezüglich der vier Aktivitätsbereiche als von außen herangetragene Kategorien, durchzuführen, wobei die Aktivitäten auf wesentliche Merkmale vereinfacht werden. Die Zuordnung wird durch die Beschreibung der Aktivitätsbereiche (vgl. 1.3.1) erleichtert. Dieser Vorgang kommt dem selektiven Codieren (vgl. Flick 2000, S. 202/203, Böhm 2003, S. 482/483) nahe, mit dem Unterschied, dass nun nicht mehr in einem Fall gearbeitet wird, sondern auf der Menge aller zu einer Aufgabe ausgeführten Aktivitäten. Nicht eine Schülerarbeit sondern eine Aufgabe entspricht nun einem Fall.

Im nächsten Schritt dient die erstellte Liste ausgeführter Aktivitäten dem Vergleich zwischen intendierten und ausgeführten Aktivitäten, sowohl auf der Ebene einzelner Aktivitäten als auch auf der Ebene der Aktivitätsbereiche. Dafür wird zum einen die Häufigkeit bestimmt, mit der die „objektiven Aktivitäten“ der Beispiellösung jeweils tatsächlich von den Schülern ausgeführt wurden. Zum anderen werden Aktivitäten ermittelt, welche Schüler bei der Bearbeitung ausübten, die aber nicht in der objektiven Analyse benannt wurden. Dabei ist auch hier eine Abstraktion der individuellen Aktivitäten vorzunehmen, um diese in ihrer Struktur und Anforderung den intendierten zuordnen zu können oder nicht. Um die Ausgewogenheit der Umsetzung bezüglich der vier Aktivitätsbereiche einzuschätzen, wird die Anzahl der durchschnittlich von einem Schüler in einem Aktivitätsbereich ausgeführten Aktivitäten der Anzahl der intendierten Aktivitäten in diesem Bereich gegenübergestellt (dazu genau in 5.5.1). Ziel dieses Vergleichs ist eine Aussage darüber, ob die mit der Aufgabe angestrebte Breite oder Spezifität der Förderung auch umgesetzt werden konnte.

[104] Eine andere Möglichkeit wäre, zu untersuchen wie viele Schüler eine bestimmte Aktivität ausführen.

### 5.1.4 Aufdecken typischer Lösungswege

In diesem letzten Schritt der Auswertung werden die Lösungswege der Schüler bezüglich ausgewählter Aufgaben verglichen und gruppiert, um typische Lösungswege gegenüberzustellen und bezüglich der eingesetzten Aktivitäten zu charakterisieren. Dazu werden verschiedene qualitative Verfahren kombiniert.

Zunächst werden mit Hilfe des selektiven Codierens (vgl. Flick 2000, S. 202/203, Böhm 2003, S. 482/483) die Listen von Aktivitäten (Codelisten), analysiert und strukturiert, um ein zentrales Phänomen der Bearbeitung (des Falles) zu benennen. Dies ist hier eine typische Aktivität oder eine Gruppe von Aktivitäten, die den Lösungsweg charakterisiert. Die Formulierung sollte nur wenige Sätze umfassen, da sie einen kurzen kennzeichnenden Einblick in die Struktur liefern soll.

Wurden alle Lösungswege so charakterisiert, können (möglicherweise) Gruppen strukturell ähnlicher Lösungswege gebildet werden. Kennzeichnend wird für eine Gruppe ein Motto formuliert, welche die Besonderheit der Lösungsstrategie charakterisiert, z. B. „Rückwärtsausführung der formalen Extremwertbestimmung“ im Gegensatz zu „Symmetriebetrachtung des Funktionsgraphen und des Graphen der ersten Ableitung“. Die Gruppen werden anschließend hinsichtlich der Struktur der Lösungswege verglichen, wobei vor allem Unterschiede bezüglich der eingesetzten Aktivitäten, insbesondere in Zusammenhang mit der Qualität der Lösung interessieren.

## 5.2 Rahmenbedingungen der Fallstudie

Die Fallstudie wurde von März bis Juni 2004 mit der mathematisch profilierten Klasse 11 der Herder-Oberschule (Gymnasium) im Bezirk Berlin Charlottenburg-Wilmersdorf, einer weiteren Schule der Berliner Netzwerkschulen, durchgeführt. Anders als die Schüler der Andreas-Oberschule lernen die 21 Schüler dieser Klasse, bis auf Ausnahmen, bereits seit dem siebenten Schuljahr zusammen im profilierten Kurs. Die Schüler werden nach dem Rahmenplan der Berliner Netzwerkschulen von einer Fachlehrerin des Gymnasiums unterrichtet. Sie sind einen inhaltlich und methodisch anspruchsvollen Unterricht gewöhnt.

Der Unterricht selbst wurde auch in dieser Fallstudie nicht beeinflusst. Alle Aufgaben wurden als Hausaufgaben bearbeitet. Das Bearbeiten komplexer mathematischer Aufgaben als Hausaufgaben war für die Schüler jedoch neu. Die Schüler bekamen zu jeder ihrer

Bearbeitungen eine differenzierte aufgabenbezogene Rückmeldung anhand eines Beurteilungsbogens (vgl. 4.2). Die Beurteilung durch die Fachlehrerin erfolgte separat.

In die Fallstudie wurden sieben Aufgaben einbezogen, davon vier Aufgaben aus der Analysis (Funktionenanalyse und Extremwertaufgaben) und drei aus der Linearen Algebra (Vektorraum, Lineare Gleichungssysteme). Die Themen der Aufgaben und die Anzahl der dazu analysierten Schülerarbeiten sind in Tabelle 5/1 zusammengefasst. Die Aufgabenanalyse und die Ergebnisse der Umsetzungen werden im Folgenden für zwei Aufgaben ausführlich dargestellt. Die Auswertungen der verbleibenden fünf Umsetzungen befinden sich in Anhang 2.

Tab. 5/1: Analysierte Aufgaben und Anzahl der Schülerlösungen

| Aufgabe | Anzahl analysierter Schülerarbeiten |
|---|---|
| 11B6.1: Extrema einer Funktion mit Parameter | 17 |
| 11B6.2: Beweis zum Thema Kurvendiskussion | 16 |
| 11B7.2: Flächenmaximum unter der Wurzelfunktion | 17 |
| 11B7.3: Optimaler Eintrittspreis | 16 |
| 11B8.1: Vektorraum der magischen Quadrate | 15 |
| 11B9.1: Basis eines Vektorraumes | 16 |
| 11B10.1: Zusammensetzung der Verpflegung einer Expedition | 13 |

## 5.3 Analyse der Aufgabe Extrema einer Funktion mit Parameter

Aufgabenstellung

Für welche reellen Zahlen $a$ hat die Funktion $f$ mit $f(x)=-x^4+2ax^3-ax^2$ an der Stelle $x_0=-1$ ein lokales Extremum? Handelt es sich um ein Minimum oder ein Maximum? Begründen Sie alle gezogenen Schlüsse vollständig.

Mögliche Lösung

Die Funktion $f$ mit $f(x)=-x^4+2ax^3-ax^2$ hat laut Aufgabenstellung bei $x_0=-1$ ein lokales Extremum, also gilt die notwendige Bedingung für Extrema $f'(-1)=0$. Mit dieser Bedingung kann der Parameter $a$ bestimmt werden.

$x_0=-1$ ist lokale Extremstelle von $f$ mit $f(x)=-x^4+2ax^3-ax^2 \Rightarrow f'(-1)=0$

$f'(x)=-4x^3+6ax^2-2ax$

$$f'(-1) = 4 + 6a + 2a = 4 + 8a \overset{Vor.}{=} 0 \Rightarrow a = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Somit kommt nur die Funktion $f(x) = -x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2$ in Frage.

Diese hat die Ableitungen $f'(x) = -4x^3 - 3x^2 + x$ und $f''(x) = -12x^2 - 6x + 1$.

Anhand der zweiten Ableitung wird nun geprüft, ob tatsächlich ein Extremum vorliegt und ob dies ein Minimum oder ein Maximum ist.

$f''(-1) = -12 + 6 + 1 = -5 < 0$

Mit $f'(-1) = 0 \wedge f''(-1) \neq 0$ ist auch eine hinreichende Bedingung für Extrema erfüllt. Da $f''(-1) < 0$, liegt bei $x_0 = -1$ ein lokales Maximum.

Kompetenzspektrum

Grundwissen: Bestimmung von Extrema, Ableitungsregeln (GW)
Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)
Ausführen formaler Verfahren (FO)
Ausführen formaler Operationen und Umformungen (FO)
Mathematisch Argumentieren (Schlussfolgern und Begründen) (KA)
Formal und verbal fachsprachlich Darstellen (DI)

### 5.3.1 Analyse der Aufgabe nach den Kriterien an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

#### 5.3.1.1 Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

*Bedingungen auf Grund der Beurteilungssituation*

Validität

Bereits in der Aufgabenstellung ist die Verbindung zu den zu beurteilenden Kompetenzen (Kompetenzspektrum) sichtbar: Es ist eine geeignete Lösungsstrategie zu finden, formale Verfahren und Operationen sind auszuführen, es ist mathematisch zu argumentieren und es sind formale, evtl. auch verbale oder graphische Darstellungen sinnvoll. Diese Kompetenzen gehören zu den (z. B. in den EPA (KMK 2002) und den Bildungsstandards (KMK 2004) aufgeführten) wichtigen mathematischen Kompetenzen. Die Aufgabenstellung ist rein innermathematisch, bezieht sich auf diese Kompetenzen. Es gibt keine Anzeichen dafür, dass die zu beurteilenden Kompetenzen von anderen überlagert werden. Voraussetzung ist jedoch, dass die Schüler den Begriff des lokalen Extremums verstanden haben.

Gerechtigkeit

Verständlichkeit: Die in der Aufgabenstellung verwendeten fachsprachlichen Begriffe gehören zu den bisher in Klasse 11 ausführlich thematisierten und verinnerlichten Inhalten. Ebenso sind die verwendeten formalen Darstellungen den Schülern vertraut.

Erwartungstransparenz: Die Aufgabenstellung ist deutlich formuliert. Eine Begründung der gezogenen Schlüsse wird explizit gefordert, um argumentative Kompetenzen beurteilen zu können und eine ausführliche Darlegung des Lösungsweges anzuregen.

Ergebnisorientierung: Die Aufgabe ist nicht in Teilaufgaben gegliedert, kann aber in Teilergebnisse und -kompetenzen strukturiert werden, die separat beurteilt werden können.

Schwierigkeit: Alle Wissenselemente und methodischen Mittel sind in den vorangegangenen Stoffeinheiten der elften Klasse erworben worden.

Möglichkeit individueller Wege (Offenheit)

Die Aufgabe ist methodisch offen, da kein Lösungsweg vorgegeben wird. Das formale Vorgehen mit Hilfe der Bedingungen für Extrema ist jedoch naheliegend, da die Extremwertbetrachtung kürzlich im Unterricht thematisiert wurde. Dennoch sind im einzelnen individuelle Zugänge und Herangehensweisen, z. B. die Verwendung von Skizzen, möglich.

*Bedingungen durch Anspruch an Aufgabenqualität*

Individuelle und gesellschaftliche Bedeutung der Aufgabe: Funktionale Zusammenhänge werden in vielen Wissenschaften untersucht. Funktionenscharen, bei denen die Abhängigkeit von einem Parameter untersucht wird, sind dabei ebenso wichtig wie Analysen einzelner Funktionen. In der experimentellen Forschung gibt es häufig die Situation, dass für gegebene Messwerte eine Funktionsgleichung gesucht wird, wobei die Anpassung freier Parameter eine entscheidende Rolle spielt. Die rein innermathematische Aufgabenstellung verrät jedoch nichts über das Anwendungspotenzial. Individuell kann die Aufgabe durch das Auftreten eines Parameters eine kognitive Herausforderung darstellen und mit Neugierde verbunden sein.

Kognitive Forderung: Die Aufgabe knüpft an das den Schülern bekannte Konzept der Bestimmung von Extremstellen an, um es auf Funktionenscharen auszuweiten. Gleichzeitig findet durch die Umkehr der üblichen Fragestellung bei Kurvendiskussionen eine stärkere Verinnerlichung der Zusammenhänge statt. Die Aufgabe erlaubt vielen Schülern einen Zugang, aber genauso auch über ihr derzeitiges Wissen hinauszugehen und selbständig Zusammenhänge zu finden. Anspruchsvolle kognitive Fähigkeiten, wie Anwenden, Analysieren evtl. auch Synthetisieren, werden einbezogen.

*Kriterien verbunden mit dem Ziel des Ansprechens vielseitiger mathematischer Kompetenzen*

Darstellend-interpretative Aktivitäten: formal darstellen, evtl. auch verbal oder graphisch darstellen, zwischen unterschiedlichen Darstellungen übersetzen

Heuristisch-experimentelle Aktivitäten: Zusammenhänge herstellen, geeignete Lösungsstrategien finden

Formal-operative Aktivitäten: algebraische Operationen ausführen, formale Verfahren ausführen

Kritisch-argumentative Aktivitäten: Schlussfolgerungen ziehen und begründen

**Fazit der Analyse der entscheidenden Kriterien: Die Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen werden für die Untersuchungsklasse erfüllt.**

#### 5.3.1.2 Komplexitätsbeschreibende Merkmale von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

Komplexität der einbezogenen mathematischen Inhalte

Wissenseinheit/Stoffgebiet und curriculare Wissensstufe: Mit dieser Aufgabe wird eine Wissenseinheit angesprochen: „Bestimmung von Extremstellen“. Diese gehört zu den Standardinhalten der Analysis der Sekundarstufe II. Implizit werden verschiedene Ableitungsregeln angesprochen, die ebenfalls Standardinhalte der Oberstufenanalysis sind.

Art des Wissens: Faktenwissen (notwendige und hinreichende Bedingungen für Extrema, Ableitungsregeln für Polynome), prozedurales Wissen (Extremwertbestimmung). Bei einer begrifflichen Diskussion eventuell unter Verwendung graphischer Mittel kann auch konzeptuelles Wissen einbezogen werden.

Es liegt eine selbständige Verknüpfung neu erlernter Wissenselemente aus einem abgegrenzten Bereich der Sekundarstufe II vor: Anforderungsbereich 2.

Komplexität bezüglich spezifischer Aktivitätsbereiche

Anforderungen im heuristischen Bereich: Die Aufgabe ist eindeutig lösbar, erlaubt aber unterschiedliche Lösungswege. Diese können global abweichen (z. B graphische Lösung – formale Lösung) oder lokal (z. B. Prüfen der hinreichenden Bedingungen anhand der zweiten Ableitung – anhand eines Vorzeichenwechsels der ersten Ableitung). Bei dieser Aufgabe ist das Ziel des mathematischen Problemlöseprozesses gegeben. Es liegt eine Umkehraufgabe vor, für die den Schülern kein Standardverfahren zur Verfügung steht. Innerhalb der Aufgabenstellung wird durch die Angabe des lokalen Extremums auf ein zur Lösung der Aufgabe geeignetes mathematisches Konzept (Extremwertbestimmung) hingewiesen. Das genaue Vorgehen, z. B. der Rückwärtsanwendung der Extremwertbestimmung, inklusive der erforderlichen mathematischen Operationen, ist jedoch selbst zu entwickeln. Es liegt somit die erste Stufe der Komplexität der Modellierung vor: die Modellierung wird durch die Aufgabenstellung erleichtert. Das selbständige Anwenden bekannter Lösungsmöglichkeiten in neuartigen Situationen entspricht dem Anforderungsbereich 2.

Anforderungen im formal-operativen Bereich: Die Aufgabe kann durch „Rückwärtsanwendung“ des Verfahrens der Extremwertbestimmung gelöst werden. Dabei sind folgende mathematische Operationen auszuführen: erste Ableitung eines Polynoms vierten Grades bilden, Extremstelle einsetzen und Parameter berechnen, zweite Ableitung an der Stelle des Extremums bilden. Dies sind für Schüler der elften Klasse Routineanforderungen: Anforderungsbereich 1.

Anforderungen im darstellend-interpretativen Bereich: Durch die Verwendung formaler Darstellungen innerhalb der Aufgabenstellung werden zunächst auch solche angeregt. Diese können für die formale Lösung ausreichen. Es ist vorstellbar, dass auch graphische Darstellungen und deren Übersetzung in die formale und verbale Darstellung zur Lösung der Aufgabe eingesetzt werden. Die Komplexität dieser Kategorie ist bei der formalen Lösung gering, kann aber variieren: Anforderungsniveau (1-) 2 (selbständige Darstellungen geringer Komplexität).

Anforderungen im kritisch-argumentativen Bereich: Innerhalb der Aufgabenstellung wird explizit die Begründung aller gezogenen Schlüsse gefordert. Diese muss mit mathematischen Mitteln erfolgen. Bei der formalen Lösung ist eine symbolische Argumentation naheliegend, aber auch verbale Argumentationen sind denkbar. Die formale Argumentation wird voraussichtlich wenig komplex sein, die verbale kann durchaus anspruchsvoller sein. Die selbständige Auswahl und Anordnung von Argumenten bei insgesamt geringer Komplexität durch wenige angesprochene Wissensinhalte entspricht Anforderungsbereich 2.

### 5.3.2 Analyse der umgesetzten Schüleraktivitäten

Die folgende Auflistung enthält die bei der aktivitätenbezogenen Analyse der Beispiellösung ermittelten, d. h. die mit der Aufgabe intendierten, Aktivitäten. Alle 17 Schülerarbeiten zu dieser Aufgabe entsprachen im Wesentlichen der vorgestellten formalen Lösung (vgl. Beispiel Anhang 2.1). Die Analyse und Gegenüberstellung unterschiedlicher Lösungswege entfällt deshalb bei dieser Aufgabe.

Intendierte Aktivitäten (Aktivitätsbereich, Anzahl von Schülern, welche die intendierte Aktivität innerhalb ihrer Bearbeitung ausführten):

- Zusammenhänge zwischen der lokalen Extremstelle und der Nullstelle der ersten Ableitung herstellen und eine Lösungsidee finden (HE, 17),
- Lösungsansatz explizit formulieren (DI, 11 ),
- Schlussfolgerungen aus den in der Aufgabenstellung gegebenen Daten ziehen (KA, 8),
- erste Ableitung bilden (FO, 17),
- gegebene Extremstelle einsetzen und Parameter berechnen (FO, 17),
- Zusammenhänge zwischen der zweiten Ableitung an der Extremstelle und der Art des Extremums herstellen (HE, 16),
- das weitere Vorgehens verbal formulieren (DI, 8),
- hinreichende Bedingung explizit prüfen (KA, 4),
- zweite Ableitung an der Extremstelle bestimmen (FO, 16),
- auf ein Maximum schließen (KA, 16).

Mit zwei heuristisch-experimentellen, zwei darstellend-interpretativen, drei formal-operativen und drei kritisch-argumentativen Aktivitäten können mit dieser Aufgabe, zunächst potenziell, alle vier Aktivitätsbereiche angesprochen werden.

Ein hoher Anteil der intendierten Aktivitäten wurde von vielen Schülern umgesetzt.

Neben den intendierten Aktivitäten gab es „unerwartete“, d. h, solche, die von den Schülern, aber nicht in der Beispiellösung, ausgeführt wurden:

- Zweimal wurde geprüft, ob die Ableitung der gefundenen Funktion tatsächlich bei $x_0 = -1$ eine Nullstelle hat (Kontrolle des erhaltenen Ergebnisses, FO, KA).
- Einmal wurden die Zusammenhänge zwischen Maximum/Minimum und dem Vorzeichenwechsel der Ableitung der Funktion beschrieben (HE, DI).
- Einmal wurde der Verlauf des Graphen der Funktion beschrieben (HE, DI), viermal sogar die Graphen der Funktion und ihrer Ableitungen (HE, DI).

Insgesamt wurden von den Schülern bei der Bearbeitung dieser Aufgabe 52 formal-operative, 39 heuristisch-experimentelle, 30 kritisch-argumentative und 25 darstellend-interpretative Aktivitäten ausgeführt. Mit der Aufgabe gelang es somit alle Aktivitätsbereiche einzubeziehen, der Schwerpunkt lag im formal-operativen Bereich.

### 5.3.3 Ausgeführte Schüleraktivitäten und objektive Aufgabenparameter

Im Folgenden wird versucht, wichtige und auffällige Ergebnisse aus der Analyse der Schülerarbeiten mit den Anforderungen und Merkmalen der Aufgabe zusammen zu bringen.

*Gute Umsetzung heuristisch-experimenteller und formal-operativer Aktivitäten*

Zunächst fällt die hohe Lösungsquote für diese Aufgabe auf. Durch die Aufgabenstellung wurde eine Wissenseinheit angesprochen: „Extremwertbestimmung“, ein Standardinhalt der Sekundarstufe II. Die geringe Komplexität der mathematischen Konzepte sowie die kompetenzbezogenen Anforderungsniveaus von 1 bis 2 können Ursache dafür sein, dass alle Schüler, welche die Aufgabe bearbeiteten, auch einen geeigneten Ansatz fanden und diesen bis zur formalen Lösung ausführen konnten. Auf Grund der geringen inhaltlichen Komplexität ist auch die Anzahl der herzustellenden Zusammenhänge und der intendierten heuristischen Aktivitäten gering. Die intendierten heuristischen Aktivitäten wurden von nahezu allen Schülern umgesetzt. Dabei kann eine Rolle spielen, dass innerhalb der Aufgabenformulierung auf ein geeignetes mathematisches Konzept hingewiesen wurde und das formale Lösungsverfahren für die Schüler naheliegend war. Dennoch lag mit der Umkehraufgabe eine den Schülern ungewohnte Aufgabenstellung vor und es spricht für die intellektuellen Fähigkeiten der Schüler geeignete Zusammenhänge herzustellen und einen Lösungsansatz zu finden. Da einige Schüler unerwartete heuristische Aktivitäten, wie das Analysieren von Funktionsgraphen ausübten, übersteigt die durchschnittliche Anzahl der heuristischen Aktivitäten pro Schülerlösung (2,3) sogar etwas die erwartete Anzahl (2).

Die Anzahl der ausgeführten formal-operativen Aktivitäten entsprach den Erwartungen. Die Gründe dafür sind naheliegend: Alle Schüler wählten den formalen Lösungsweg, für dessen vollständige Bearbeitung die intendierten formal-operativen Aktivitäten zwingend notwendig waren.

*Geringere Umsetzung darstellend-interpretativer und kritisch-argumentativer Aktivitäten*

Trotz expliziter Aufforderung gelang die Umsetzung darstellender und argumentativer Aktivitäten weniger gut als die der formalen und heuristischen Aktivitäten. So wurden Schlussfolgerungen nur von einigen Schülern begründet und Lösungsschritte selten kommentiert. Auch die eher formale argumentative Aktivität des Prüfens des hinreichenden Kriteriums wurde nur von wenigen Schülern ausgeführt. Begriffliche verbale Argumentationen fanden kaum statt. Die einfache Schlussfolgerung auf ein Maximum wurde dagegen von den meisten Schülern vollzogen. Das Ergebnis bezüglich argumentativer Aktivitäten kann nicht mit den objektiven Merkmalen der Aufgabe erklärt werden, denn die zur Argumentation notwendigen Zusammenhänge waren den Schülern aus den letzten Unterrichtsstunden bekannt und deshalb die Anforderungen der Argumentation nicht hoch. Hier sind wahrscheinlich eher generelle Neigungen von Schülern bei der Darstellung von Lösungswegen von Bedeutung, beispielsweise dass Umgehen zusätzlicher Argumentationen und Erläuterungen, wenn aus der formalen Lösung „alles klar“ ist.

*Keine unterschiedlichen Lösungswege*

Ein mathematisches Konzept zur Lösung der Aufgabe bzw. ein Verfahren wurde in der Aufgabenstellung nicht vorgegeben, aber auf ein sinnvolles mathematisches Konzept durch den Begriff „lokales Extremum“ hingewiesen. Dies kann eine Ursache dafür sein, dass alle Schüler den formalen Lösungsweg der Rückwärtsausführung der Extremwertbestimmung wählten. Da alle Schüler im Wesentlichen einen Lösungsweg ausführten, dessen individuelle Darstellung zwar in Qualität und Quantität unterschiedlich ist, aber dem gleichen heuristischen Ansatz folgt, kann für die Umsetzung nicht von einer offenen Aufgabe gesprochen werden. Hier ist auch von Bedeutung, dass die Schüler erst kürzlich das Vorgehen bei der formalen Bestimmung von Extremwerten im Unterricht gelernt und geübt haben.

Weitere Eigenschaften der Aufgabenformulierung können die Auswahl des formalen Lösungsweges nahegelegt haben: Die Aufgabenstellung enthält bereits eine formale Darstellung der Funktion, die mit bekannten Regeln abgeleitet werden kann und die Fragestellung ist ergebnisorientiert formuliert.

## 5.4 Analyse der Aufgabe Beweis zum Thema Kurvendiskussion

Aufgabenstellung

Zeigen Sie, dass es keine ganzrationale Funktion dritten Grades gibt, für die 0 und 3 lokale Extremstellen sind und 1 eine Wendestelle ist.

Mögliche Lösung

Ausgangspunkt des Nachweises sind die notwendigen Kriterien für Extrem- und Wendestellen: Wenn $x_E$ Extremstelle von *f* ist, dann gilt $f'(x_E)=0$. Wenn $x_W$ Wendestelle von *f* ist, dann gilt $f''(x_W)=0$.

Als Polynom dritten Grades hat *f*(*x*) die allgemeine Form $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ mit $a\neq 0$. Die Ableitungen lauten $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, $f''(x)=6ax+2b$, $f'''(x)=6a$.

Der Nachweis der Behauptung erfolgt indirekt.

Angenommen, 0 und 3 sind lokale Extremstellen und 1 ist eine Wendestelle von *f*, dann gilt auf Grund der notwendigen Bedingungen an Extrem- und Wendestellen:

$$f'(0)=c=0 \text{ (I)},\ f'(3)=27a+6b+c\overset{\text{(I)}}{=}27a+6b=0 \text{ (II) und } f''(1)=6a+2b=0 \text{ (III)}$$

Die Gleichungen (II) und (III) sind ein lineares Gleichungssystem für die Variablen *a* und *b*, welches beispielsweise mit dem Einsetzungsverfahren gelöst werden kann.

Aus (III) folgt $b=-\frac{a}{3}$. Dies eingesetzt in (II) ergibt $27a-2a=25a=0$ und somit $a=0$.

Damit gibt es kein Polynom dritten Grades, das die geforderten Bedingungen erfüllt.

Kompetenzspektrum:

Grundwissen: Bestimmung von Extrem- /Wendestellen, Ableitungsregeln (GW)
Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)
Ausführen formaler Operationen und Umformungen (FO)
Mathematisch Argumentieren (KA)
Formal und fachsprachlich verbal Darstellen (DI)

### 5.4.1 Analyse der Aufgabe nach den Kriterien an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

#### 5.4.1.1 Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

*Bedingungen auf Grund der Beurteilungssituation*

Validität

Aus der Aufgabenstellung ist erkennbar, dass die Aufgabe sich auf kritisch-argumentative Kompetenzen bezieht („Zeigen Sie ...“). Damit verbunden sind heuristisch-experimentelle Kompetenzen, da eine geeignete Argumentationsbasis auszuwählen ist, Zusammenhänge herzustellen und einzelne Argumente zu verknüpfen sind. Diese Kompetenzen können jedoch nicht beurteilt werden, wenn kein Ansatz gefunden werden kann, weil das Grundwissen fehlt. Es ist nicht immer möglich zu trennen, ob fehlendes Grundwissen oder fehlende Problemlösefähigkeiten einen Zugang zur Aufgabe verhindern. Bei einer formalen Lösung, ähnlich der Beispiellösung, kann das Ausführen formaler Operationen eingeschätzt werden. Dies ist nicht der Fall, wenn eine begriffliche oder auf graphischen Darstellungen beruhende Argumentation geführt wird. Die Validität steht hier in Konkurrenz zur Vielfalt der Lösungsmöglichkeiten. Wichtig ist daher zunächst flexibel die wesentlichen, bei der Bearbeitung der Aufgabe gezeigten Kompetenzen der individuellen Lösung herauszufiltern und diese zur Beurteilung auszuwählen, die nicht von anderen Kompetenzen überdeckt werden. Die Aufgabenstellung ist rein innermathematisch, bezieht sich auf mathematische Kompetenzen. Es gibt keine Anzeichen dafür, dass diese von anderen Kompetenzen überlagert werden. Der geforderte Nachweis kann jedoch die Einstellung der Schüler zur Aufgabe beeinflussen, von leistungsorientierten Schülern kann eine Herausforderung gesehen werden, von anderen subjektiv auch eine Überforderung. Die mit der Aufgabe angesprochenen Kompetenzen gehören zu den (z. B. in den EPA (KMK 2002) und den Bildungsstandards (KMK 2004) aufgeführten) wichtigen mathematischen Kompetenzen.

Gerechtigkeit

Verständlichkeit: Die in der Aufgabenstellung verwendeten fachsprachlichen Begriffe gehören zu den bisher in Klasse 11 ausführlich thematisierten und verinnerlichten, so dass die Aufgabenstellung von den Schülern verstanden werden kann.

Erwartungstransparenz: Die Aufgabenstellung ist deutlich und eindeutig formuliert. Die Aufforderung „Zeigen Sie“ sollte von den Schülern mit der Forderung nach einem Nachweis und der damit verbundenen zusammenhängenden Argumentation mit mathematischen Mitteln verknüpft werden.

Ergebnisorientierung: Die Beurteilung kann in einzelne Argumentationsschritte oder in einbezogene Kompetenzen gegliedert werden, so dass Teilleistungen bewertet werden können.

Schwierigkeit: Der geforderten Nachweis macht die Aufgabe methodisch anspruchsvoll, da längere zusammenhängende mathematische Argumentationen auch für die Schüler der profilierten elften Klasse nicht die Regel sind. Die inhaltlichen Mittel sind den Schülern jedoch vertraut. Es handelt sich um Inhalte, die in den letzten Wochen thematisiert wurden.

Möglichkeit individueller Wege (Offenheit)

Wie alle selbständigen Argumentationen ist die Aufgabe methodisch offen. Eine geeignete Argumentationsbasis ist von den Schülern selbst zu finden, geeignete Argumente sind auszuwählen und zu einer schlüssigen Argumentationskette zu verbinden. Die gewählten Strategien können sich global (formale - begriffliche Argumentation) und lokal (z. B. kann ein Widerspruch in der formalen Lösung an mehreren Stellen gezeigt werden) unterscheiden. Individuelle Zugänge zur Aufgabe und individuelle Wege der Bearbeitung sind möglich.

*Bedingungen durch Anspruch an Aufgabenqualität*

Individuelle und gesellschaftliche Bedeutung der Aufgabe: Der Inhalt der Aufgabe hat gesellschaftlich keine direkte Bedeutung. Die Aufgabe bietet jedoch innermathematisch und methodisch einen Lerngewinn, der für die mathematisch interessierten Schüler auch individuelle Bedeutung haben kann. Anhand der Aufgabe werden die in der Regel bekannten Eigenschaften ganzrationaler Funktionen, insbesondere die von quadratischen Funktionen mit den neu erworbenen Konzepten der Differenzialrechnung verbunden. Dies dient der innermathematischen Vertiefung und Vernetzung der Konzepte. In methodischer Hinsicht hat die geforderte zusammenhängende mathematische Argumentation ihre Bedeutung.

Kognitive Forderung: Von den Schülern sind Konzepte der Differenzialrechnung, die in den letzten Wochen thematisiert wurden und ihnen somit bekannt, aber noch nicht vertraut sind, selbständig in einer neuen Situation anzuwenden. Dabei sind die neuen Inhalte mit anderen, auch solchen vorangegangener Stoffabschnitte, wie den Eigenschaften quadratischer Funktionen, zu verbinden. Es werden anspruchsvolle kognitive Fähigkeiten, wie Anwenden, Analysieren, Synthetisieren, einbezogen.

*Kriterien verbunden mit dem Ziel des Ansprechens vielseitiger mathematischer Kompetenzen*

Darstellend-interpretative Aktivitäten: formal darstellen, verbal darstellen, graphisch darstellen, zwischen unterschiedlichen Darstellungen übersetzen

Heuristisch-experimentelle Aktivitäten: eine geeignete Argumentationsbasis finden, Zusammenhänge herstellen, lokales Ordnen (der Argumente zu einer Argumentationskette)

Formal-operative Aktivitäten: algebraische Operationen und Umformungen ausführen

Kritisch-argumentative Aktivitäten: Schlussfolgerungen ziehen und begründen, nachweisen

**Fazit der Analyse der entscheidenden Kriterien: Die Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen werden erfüllt, wenn die unter Validität und Gerechtigkeit genannten Voraussetzungen zutreffen, also die Schüler die notwendigen Grundkenntnisse zu Extrem-, Wendestellen besitzen und bereits selbständig bewiesen haben. Das war in der Untersuchungsgruppe der Fall.**

<u>5.4.1.2 Komplexitätsbeschreibende Merkmale von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen</u>

Komplexität der einbezogenen mathematischen Inhalte

Wissenseinheit/Stoffgebiet und curriculare Wissensstufe: Die Aufgabe verbindet explizit drei Wissenseinheiten: „ganzrationale Funktion dritten Grades“, „Extremstelle“ und „Wendestelle“. Werden in begrifflichen Argumentationen die Eigenschaften der ersten Ableitung einbezogen, sind auch die Eigenschaften von Parabeln wichtig. Von den Schülern sind somit Wissenseinheiten verschiedener Stoffeinheiten der Klasse 11 zu verknüpfen. Die Eigenschaften von Parabeln wurden in der neunten Klasse erarbeitet und in der elften aufgefrischt.

Art des Wissens: Faktenwissen (notwendige und hinreichende Bedingungen an Extrem- und Wendestellen, Funktionsgleichungen und Eigenschaften ganzrationaler Funktionen dritten und zweiten Grades), prozedurales Wissen (Ableitung von Polynomen, Bestimmung von Extrem- und Wendestellen). Bei einer begrifflichen Diskussion kann auch konzeptuelles Wissen einbezogen werden.

Es liegt eine selbständige Verknüpfung von z. T. neu erlernten Wissenselemente aus mehreren Stoffeinheiten der Sekundarstufe II vor: Anforderungsbereich 2-3 (in Abhängigkeit vom individuellen Lösungsweg, genauer der Anzahl der verknüpften Wissenselemente).

Komplexität bezüglich spezifischer Aktivitätsbereiche

Anforderungen im heuristischen Bereich: Für den geforderten Nachweis stehen den Schülern unterschiedliche Beweisstrategien zur Verfügung. Mit der Extremwertbetrachtung und der Bestimmung von Wendestellen als Teile der Kurvendiskussion haben die Schüler erst kürzlich methodische Mittel erlernt, die sich bei der Bearbeitung der Aufgabe anbieten. Eine vom formalen Herangehen abweichende Lösungsstrategie wäre eine Analyse der Zusammenhänge zwischen Funktion und deren Ableitung und die Verwendung der Symmetrieeigenschaften von Parabeln (begriffliche Diskussion). Neben diesen globalen Abweichungen werden auch lokale individuelle Abweichungen innerhalb solcher Strategietypen auftreten, z. B. bei der Auswahl verbaler Argumente und algebraischer Umformungen. Da das Ziel des mathematischen Problemlöseprozesses gegeben ist, liegt eine Umkehraufgabe vor, die für die Schüler ungewohnt und anspruchsvoller als eine „normale Kurvendiskussion“ ist. Innerhalb der Aufgabenstellung werden durch die Angabe der lokalen Extrem- und Wendestellen die zur Lösung der Aufgabe notwendigen Schlüsselkonzepte spezifiziert (erste Stufe der Komplexität der Modellierung). Daraus ist das Lösungsmittel „Kurvendiskussion“ ableitbar. Das genaue Vorgehen, z. B. der Rückwärtsanwendung der Bestimmung von Extrem- und Wendestellen, inklusive der erforderlichen mathematischen Operationen, ist jedoch selbst zu entwickeln. Die selbständige Anwendung bekannter heuristischer Mittel in neuartigen Situationen ist je nach Komplexität der gezogenen Verbindungen Anforderungsbereich 2-3 zuzuordnen.

Anforderungen im formal-operativen Bereich: Bei der „Rückwärtsanwendung“ der Bestimmung von Extrem- und Wendestellen sind folgende Operationen auszuführen: erste, zweite, dritte Ableitung eines Polynoms bilden, gegebene Extrem- und Wendestellen einsetzen, Gleichungen umformen/vereinfachen und die gesuchten Variablen bestimmen. Diese Operationen sind für Schüler der elften Klasse Routineanforderungen. Die selbständige Auswahl und Anordnung bekannter Operationen wird Anforderungsbereich 2 zugeordnet.

Anforderungen im darstellend-interpretativen Bereich: Die Aufgabenstellung ist verbal fachsprachlich formuliert. Zur Übersetzung in die formale Darstellung ist die allgemeine Darstellung eines Polynoms dritten Grades notwendig. Da in der Aufgabenstellung keine formalen Darstellungen verwendet werden, sind die Übersetzungen anspruchsvoll und komplex. Abhängig vom Lösungsweg sind verschiedene formale, verbale, graphische Darstellungen und Übersetzungen zwischen diesen Darstellungen zu erwarteten: Anforderungsbereich 2 (-3).

kritisch-argumentative Anforderungen: Es ist ein Nachweis vorzunehmen. Dadurch werden bestimmte Erwartungen an die Argumentation gestellt, wie eine logisch schlüssige Argumentationskette basierend auf mathematischen Sätzen und Schlussweisen, die aus dem Unterricht bekannt sind. Die Argumentation ist bei einem formalen Herangehen weniger komplex (Anforderungsbereich 2) als bei einer begrifflich-verbalen Argumentation z. B. anhand von Symmetriebetrachtungen (Anforderungsbereich 3). Beim formalen Vorgehen sind Schlussfolgerungen aus formalen Verfahren und algebraischen Analysen explizit zu formulieren und das Vorgehen ist zu kommentieren, so dass eine Argumentation und keine „Rechnung“ vorliegt. Bei der begrifflichen Argumentation sind die Eigenschaften der Graphen von Funktion und Ableitung verbal zu beschreiben und Beziehungen und Schlussfolgerungen verbal zu formulieren, wobei Wissenseinheiten verschiedener Themengebiete zu verbinden sind und die mathematische Fachsprache einzusetzen ist.

### 5.4.2 Intendierte Schüleraktivitäten

Die folgende Auflistung enthält die bei der aktivitätenbezogenen Analyse der Beispiellösung ermittelten, mit der Aufgabe intendierten Aktivitäten. Anders als bei Aufgabe 11B6.1 (5.3.2) wählten bei Aufgabe 11B6.2 wenige Schüler den formalen Weg. Ihre Lösungsstrategien waren weitaus vielseitiger. Deshalb ist es hier nicht sinnvoll den intendierten Schüleraktivitäten direkt die ausgeführten zuzuordnen. Diese werden in 5.4.3 systematisiert.

Intendierte Aktivitäten (Aktivitätsbereich):
- Zusammenhänge herstellen, eine Argumentationsbasis finden (HE)
- die Argumentationsbasis beschreiben (DI, KA)
- eine allgemeine Funktionsgleichung für Polynome dritten Grades aufstellen (DI)
- erste, zweite und dritte Ableitung in allgemeiner Darstellung bilden (FO)
- die konkrete Beweisstrategie finden und formulieren (HE, KA, DI)
- Schlussfolgerungen aus den gegebenen Daten ziehen (KA)

- die gegebenen Extrem-/Wendestellen in die notwendigen Bedingungen einsetzen (FO)
- Struktur eines linearen Gleichungssystems erkennen und das weitere Lösungskonzept erläutern (DI, HE)
- Gleichungen umformen, Variablen bestimmen (FO)
- aus $a = 0$ schlussfolgern, dass unter den gegebenen Bedingungen kein Polynom dritten Grades zu finden ist (Beweisschluss)(KA)

Mit drei heuristisch-experimentellen, drei formal-operativen, vier darstellend-interpretativen und vier kritisch-argumentativen Aktivitäten werden mit der Aufgabe potenziell alle Aktivitätsbereiche ausgewogen angesprochen. Auch beim formalen Lösungsweg sind heuristisch-experimentelle und kritisch-argumentative Aktivitäten wichtig.

Insgesamt wurden von 16 Schülern 73 heuristisch-experimentelle, 44 darstellend-interpretative, 21 formal-operative und 63 kritisch-argumentative Aktivitäten ausgeführt. Damit führten bei dieser Aufgabe die Schüler mehr heuristisch-experimentelle Aktivitäten aus als erwartet (durchschnittlich 4,6 Aktivitäten pro Schülerlösung gegenüber 3 Aktivitäten in der intendierten Lösung). Die Anzahl der kritisch-argumentativen Aktivitäten der Schüler (durchschnittlich 3,9) entsprach den Erwartungen. Darstellend-interpretative Aktivitäten wurden etwas seltener ausgeführt als erwartet (2,7 durchschnittlich ausgeführte Aktivitäten). Deutlich unter den Erwartungen lag jedoch die Anzahl der formal-operativen Aktivitäten (durchschnittlich 1,3 ausgeführte Aktivitäten pro Schülerlösung).

### 5.4.3 Vergleich unterschiedlicher Lösungswege

Bei der Analyse der Schülerarbeiten wurden mit dem in 5.1.4 beschriebenen Verfahren fünf Gruppen von Lösungswegen aufgedeckt. Diese unterscheiden sich im heuristischem Ansatz, z. T. aber auch in der Stringenz der Argumentation. Im Folgenden werden diese Lösungsstrategien und die dabei von den Schülern ausgeführten Aktivitäten beschrieben. Eine Schülerarbeit zu jedem dieser Lösungswege befindet sich im Anhang 2.2.

*LW I: Wendestelle als arithmetisches Mittel der Extrema, Begründung mit der Punktsymmetrie der Funktion*

Für diesen Lösungsweg sind zwei Aussagen von Schülern typisch:

- „Die Wendestelle bildet das arithmetische Mittel der beiden Extremstellen“ (Behauptung)
- „Bei einer ganzrationalen Funktion dritten Grades entspricht deren einziger Wendepunkt dem Punkt, an dem der Graph (punkt)symmetrisch angeordnet ist.“

Die Argumentation wird teilweise mit graphischen Darstellungen und der Berechnung des arithmetischen Mittels aus 0 und 3 untermauert. Da 1 nicht das arithmetische Mittel ist, folgt schnell die Behauptung.

Dieser Lösungsweg ist nur akzeptabel, wenn die als Grundwissen verwendete Aussage zur Punktsymmetrie von Polynomen dritten Grades, auf die sich die gesamte Argumentation stützt, tatsächlich im Unterricht bewiesen wurde, was auf die Untersuchungsklasse nicht zutrifft. Das Anliegen der Aufgabe war es gerade, den Schülern die Symmetrieeigenschaften ganzrationaler Funktionen dritten Grades bewusst zu machen und diese mit den Mitteln der Differenzialrechnung zu begründen.

Dieser Lösungsweg wurde mit unterschiedlich umfangreicher Argumentation von 3 Schülern eingesetzt, die dabei folgende Aktivitäten ausführten:

- Zusammenhänge zu vorhandenem Grundwissen herstellen: Wendestelle entspricht dem arithmetischen Mittel beider Extremstellen (HE, 1)
- eine Behauptung aufstellen (KA, 1)
- Zusammenhänge zu vorhandenem Grundwissen herstellen: Wendestelle entspricht dem Symmetriezentrum/eine Argumentationsbasis finden (HE, 3)
- in eine formale funktionale Darstellung übersetzen ($f(-x)=-f(x)$) (DI, 1)
- folgern, dass die Wendestelle das arithmetische Mittel der Extremstellen ist (KA, 2)
- die Situation graphisch veranschaulichen (DI, 1)
- das arithmetische Mittel aus 0 und 3 bestimmen (FO, 2)
- das formale Ergebnis verbal formulieren (DI, 1)
- folgern, dass die Bedingungen nicht zu erfüllen sind (Beweisschluss) (KA, 2)
- Zusammenhänge zu Eigenschaften von Polynomen dritten Grades herstellen (nur zwei Extrema), folgern, dass kein weiteres Extrema existiert (HE, KA 1)
- Zusammenhänge zu vorhandenem Grundwissen herstellen: notwendige und hinreichende Bedingung an Extrema (HE, 1)

*LW II: Wendestelle ist arithmetisches Mittel der Extrema*

Hier verwendet ein Schüler die Aussage „Eine Wendestelle ist immer genau das arithmetische Mittel zwischen den beiden nächstliegenden Extremstellen.“ als Grundlage seines Lösungsweges und ist mit $\frac{0+3}{2}\neq 1$ sofort fertig. Abgesehen davon, dass die Aussage in dieser Form nicht mathematisch korrekt ist, ist diese Argumentation nicht ausreichend, da die Aussage weder im Unterricht noch innerhalb der Bearbeitung bewiesen bzw. begründet wurde. Bei diesem Lösungsweg werden nur wenige Aktivitäten einbezogen:

- Zusammenhänge zu vorhandenem Grundwissen herstellen: Wendestelle entspricht dem arithmetischen Mittel beider Extremstellen/finden einer Argumentationsbasis (HE, DI, GW, 1)
- das arithmetische Mittel aus 0 und 3 bestimmen (FO, 1)
- folgern, dass 1,5 die Wendestelle sein muss (KA,1).

*LW III: Nachweis, dass die Wendestelle eines Polynoms dritten Grades immer mittig zwischen den beiden Extrema liegt, anhand der Achsensymmetrie der ersten Ableitung*

Diesen Lösungsweg kennzeichnen folgende Ausschnitte aus Schülerarbeiten:

- „Wenn $f$ eine Wendestelle $a$ hat, hat die Ableitungsfunktion $f'$ dort ein Extremum."
- „Bei der Extremstelle $e$ von $f$ hat $f'$ dann eine Nullstelle (notwendig), also $f'(e)=0$."
- „Die Ableitungsfunktion $f'$ von einer ganzrationalen Funktion dritten Grades ist eine Parabel. Das Extremum ist der Scheitelpunkt."

Nun wird ausgenutzt, dass eine Parabel achsensymmetrisch ist, wobei die Symmetrieachse durch den Scheitelpunkt bzw. das Extrema von $f'$ geht. Somit liegen auch die Nullstellen symmetrisch, d. h. sie haben den gleichen Abstand vom Extremum.

Aus den oben geschilderten Zusammenhängen zwischen $f$ und $f'$ folgt daher:

- „Die Wendestelle von $f$ (also auch das Extremum von $f'$) liegt aufgrund der Achsensymmetrie von $f'$ genau in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen von $f'$ und den Extrema von $f$."

Mit der formalen Bestimmung des arithmetischen Mittels, „$\frac{0+3}{2} \neq 1$", ist einsichtig, dass die Bedingungen nicht erfüllt werden können.

Die begriffliche Argumentation anhand der Symmetrieeigenschaften der ersten Ableitung wurde als Lösungsweg in verschiedenen Nuancen der Ausführlichkeit und Stringenz der Argumentation von acht Schülern gewählt, die folgende Aktivitäten ausführten:

- Zusammenhang zu vorhandenem Grundwissen herstellen: notwendige Bedingungen an Extrem- und Wendestellen (HE, 2)
- aus einer der notwendigen Bedingungen schlussfolgern (KA, 1)
- Zusammenhänge herstellen/ eine Argumentationsbasis finden und darlegen (HE, DI 8)
- auf die Nullstelle der ersten Ableitung folgern (KA, 1)

- Verbindungen zwischen Merkmalen von Funktion und Ableitung herstellen und darlegen (HE, DI 6)
- die Situation graphisch veranschaulichen (DI, 3)
- den Widerspruch graphisch veranschaulichen (DI, 2)
- auf die Parabelform der ersten Ableitung folgern (KA, HE, 4)
- Folgern, dass die Ableitung bei 1 ein Extrema hat, falls die Funktion dort eine Wendestelle hat (KA, HE, 3)
- Zusammenhänge zwischen Extrem- und Wendestellen herstellen (HE, 2)
- Feststellen, dass aus Symmetriegründen die Anforderungen nicht erfüllbar sind (KA, 3)
- die erste Ableitung analysieren und deren Symmetrie beschreiben (HE, DI, 6)
- das arithmetische Mittel aus 0 und 3 bestimmen (FO, 3)
- Zusammenhänge zwischen der Lage der Wendestelle und den Nullstellen der ersten Ableitung erläutern (KA, DI, 1)
- Abstand der Nullstellen von $f'$ von der Wendestelle von $f$ bestimmen (FO, 1)
- Folgern, dass 1 nicht Wendestelle sein kann (KA, 1)
- folgern, dass bei einem Extremum von $f$ $f'$ eine Nullstelle hat (KA, GW, 3)
- auf zwei Nullstellen von $f'$ im gleichen Abstand von der Symmetrieachse schließen (KA, 2)
- folgern, dass die Wendestelle von $f$ bzw. das Extremum von $f'$ „genau zwischen“ beiden Nullstellen von $f'$ bzw. den Extrema von $f$ liegt (KA, 1)
- Zusammenhang zu bekanntem Grundwissen herstellen: Die Ableitung eines Polynoms dritten Grades ist eine Parabel (Polynom zweiten Grades). (HE, 3)
- schließen, dass wenn 0 und 3 Nullstellen der ersten Ableitung sind, der Scheitelpunkt bei 3/2 liegen muss (KA, HE, 2)
- Beweisschluss ziehen: 3/2 muss die Wendestelle sein, nicht 1 (KA, 4)
- eine Behauptung aufstellen: Die Wendestelle liegt immer zwischen benachbarten Extrema (HE, KA, 3)
- aus der Achsensymmetrie der Parabel folgern, dass das Extremum von $f'$ zwischen den beiden Nullstellen liegt (KA, HE, 1)
- verallgemeinern (HE, 2)
- Zusammenhänge zu vorhandenem Grundwissen herstellen: Ein Polynom dritten Grades hat nur eine Wendestelle, $f$ ist dazu punktsymmetrisch (HE, GW, 1)

- den Graph analysieren (HE, 1)
- aus der Symmetrie auf die Abstandsgleichheit der beiden Extrema zum Symmetriezentrum folgern (KA, 1)
- Zusammenhang zwischen dem Extremum von $f'$ und dem Scheitelpunkt der Parabel herstellen (HE, 2)
- $f'$ analysieren und beschreiben (HE, DI, 2)
- Schlussfolgern, dass das Maximum von $f'$ Wendestelle von $f$ ist (KA, 2)
- allgemeine Darstellung eines Polynoms dritten Grades angeben (DI, 1)
- die erste Ableitung der allgemeinen Darstellung bilden (FO, 1)
- eine geeignete funktionale Darstellung finden (HE, DI, 1)
- Zusammenhänge herstellen: Scheitelpunktskoordinaten aus der *p*-*q*-Formel (HE, DI, 1)
- für $x^2$ exemplarisch zeigen, dass bei jeder quadratischen Funktion der Scheitelpunkt Extremum ist (FO, KA, HE, DI, 1)
- notwendige und hinreichende Bedingung an Wendestellen für den Scheitelpunkt von $f'$ prüfen (KA, HE, FO, 1)
- Abstände mit Beträgen formal darstellen (FO, DI, 1)

*LW IV: Formaler Weg: Die notwendigen Bedingungen an Extrem- und Wendestellen führen zu einem Widerspruch.*

Dieser Lösungsweg entspricht der vorgestellten Beispiellösung: Die allgemeine Darstellung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades ($f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$) wird angegeben. Die notwendigen Bedingungen an Extrem- und Wendestellen werden aufgestellt. Beim Einsetzen der gegebenen Werte in die Ableitungen ergeben sich Bedingungen an die Parameter der allgemeinen Funktionsgleichung (drei Gleichungen mit drei Unbekannten). Diese führen entweder auf unterschiedliche Werte für $b$ oder auf $a=0$, also in beiden Fällen auf einen Widerspruch zu den Forderungen der Aufgabenstellung.

Mit lokal unterschiedlichen formalen Strategien wurde dieser Lösungsweg (nur) zweimal gewählt,[105] wobei folgende Aktivitäten ausgeführt wurden:

- die allgemeine Darstellung für ganzrationale Funktionen dritten Grades angeben (DI, 2)

[105] Dieses erstaunliche Ergebnis wird als Zeichen für den vielseitigen Unterricht der mathematisch profilierten Klasse gesehen, in dem begriffliche Argumentationen (mindestens) ebenso gefördert werden wie formale.

- Zusammenhang zu vorhandenem Grundwissen herstellen: notwendige Bedingungen für Extrem- und Wendestellen (HE, 2)
- analysieren, Bedingungen herausstellen und formal darstellen (HE, DI, 2)
- einen Lösungsansatz finden (HE, 2)
- erste und zweite Ableitung der allgemeinen funktionalen Darstellung bilden (FO, 2)
- Gleichung umformen und Parameter bestimmen (FO, 2)
- Schlussfolgerungen ziehen (KA, 2)
- Schlussfolgerung aus der dritten Bedingung ziehen (KA, 2)
- zweite, dritte Bedingung analysieren, auf Widerspruch schließen (KA, HE, FO, 2)
- einen Beweisschluss führen: Bedingungen können nicht erfüllt werden (KA, 2)
- Schlussfolgern, dass bei $a=0$ kein Polynom dritten Grades mehr vorliegt (KA, 1)

*LW V: ‚Aufleiten' der zweiten Ableitung, die mit den notwendigen Bedingungen an Wendestellen gegeben ist. Notwendige Bedingungen für Extrema führen zum Widerspruch.*

Aus der notwendigen Bedingung an Wendestellen wird gefolgert, dass $f''(x)$ die Form $f''(x)=(x-1)a$ hat. Daraus wird auf $f'(x)$ der Form $f'(x)=\frac{a}{2}x^2-ax+b$ geschlossen. Mit den notwendigen Bedingungen für die gegebenen Extremstellen folgt $a=0$ und somit ein Widerspruch, da mit $a=0$ keine ganzrationale Funktion dritten Grades mehr vorliegt. Beim zweiten Lösungsweg dieser Art ergaben sich aus den notwendigen Bedingungen zwei unterschiedliche Werte für den Parameter *b*.

Die beiden Schüler führten folgende Aktivitäten aus:

- Zusammenhänge zu vorhandenem Grundwissen herstellen: notwendige Bedingungen für Extrem- und Wendestellen (HE, 2)
- Bedingungen aus der Aufgabenstellung formal darstellen (DI, 2)
- formal schließen (KA, 1)
- einen Lösungsansatz finden (HE, 2)
- eine geeignete Darstellung für $f''(x)$ finden (HE, DI, 2)
- die Form von $f'(x)$ ableiten (HE, DI, 1)
- erste Bedingung ausführen und Schlussfolgerung daraus ziehen (FO, KA, 2)
- zweite Bedingung ausführen, daraus auf $a=0$ schließen (FO, KA, 2)
- schlussfolgern, dass dies nicht möglich ist (KA, 1)
- aufleiten von $f''(x)$ auf $f'(x)$ und $f(x)$ (HE, 1)

- auf einen Widerspruch schließen (KA, 1)

Auf Grund der großen Individualität der Lösungsstrategien zu dieser Aufgabe gibt es keine Aktivitäten, die von vielen Schülern ausgeführt werden. Es stellt sich nun die Frage, ob sich die Lösungswege bezüglich der einbezogenen Aktivitäten unterscheiden, insbesondere, ob sie die vier Aktivitätsbereiche unterschiedlich stark ansprechen. In Tabelle 5/2 werden für die fünf Lösungsstrategien die durchschnittlichen Anzahlen der Aktivitäten pro Lösung[106], geordnet in die vier Aktivitätsbereiche, aufgeführt.

Tab. 5/2: Anzahl der bei den unterschiedlichen Lösungsstrategien zu Aufgabe 11B6.2 durchschnittlich pro Lösung ausgeführten Aktivitäten

| Durchschnittliche Anzahl der Aktivitäten pro Lösung | LW I | LW II | LW III | LW IV | LW V |
|---|---|---|---|---|---|
| HE | 2 | 1 | 6,5 | 4 | 4 |
| DI | 1 | 1 | 2,7 | 2 | 2,6 |
| FO | 0,7 | 1 | 1 | 3 | 2 |
| KA | 2 | 1 | 4,5 | 4,5 | 3,5 |
| Gesamtzahl | 5,7 | 4 | 16,1 | 13,5 | 11,5 |

Wie Tabelle 5/2 zeigt, unterscheiden sich die Lösungswege in der Gesamtzahl einbezogener mathematischer Aktivitäten. Lösungsweg I und II stellen auf Grund der unvollständigen Argumentation jedoch nur eine Teillösung von Lösungsweg III dar. Werden die Lösungswege II, IV, V verglichen, d. h. die „akzeptablen" Lösungen, liegen die Anzahlen der unterschiedlichen einbezogenen Aktivitäten nicht weit auseinander. Bei allen drei Lösungswegen liegt der Schwerpunkt bei den heuristisch-experimentellen und kritisch-argumentativen Aktivitäten. Die Intentionen der Aufgabenstellung sind in dieser Hinsicht umgesetzt worden. Bei Lösungsweg III der begrifflichen Argumentation anhand der Symmetriebetrachtung des Graphen der ersten Ableitung werden die meisten heuristischen Aktivitäten ausgeführt, hier ist eine Vielzahl von Zusammenhängen herzustellen. Aber auch bei den eher formalen Lösungswegen haben die kalkülhaften Aktivitäten „Werkzeugcharakter", dominieren die Lösung nicht. Demzufolge war die Aufgabe geeignet, um die Schüler zu vielseitigen und auch anspruchsvollen mathematischen Aktivitäten anzuregen.

[106] Dies geschieht, um eine von der Anzahl der Lösungen unabhängige Darstellung zu wählen.

### 5.4.4 Ausgeführte Schüleraktivitäten und objektive Aufgabenparameter

Das auffälligste Ergebnis der Umsetzung dieser Aufgabe sind die vielfältigen Lösungswege der Schüler, ganz im Gegensatz zur inhaltlich ähnlichen Aufgabe 11B6.1 (vgl. 5.3). Für die Fragestellung dieser Arbeit ist aber vor allem die hohe Umsetzung heuristisch-experimenteller und kritisch-argumentativer Aktivitäten interessant.

*Hohe Umsetzung heuristisch-experimenteller und kritisch-argumentativer Aktivitäten*

Sowohl im heuristischen als auch im argumentativen Bereich wurden die spezifischen Anforderungen dem Anforderungsbereich 2-3 zugeordnet. Dies konnte die Schüler nicht davon abhalten, gerade in diesen Bereichen aktiv zu sein. Die Zahl der unterschiedlichen heuristischen Aktivitäten übertraf deutlich die Erwartungen. Vor allem bei der begrifflichen Argumentation stellten die Schüler eine Vielzahl von Zusammenhängen her, auch zwischen Wissenseinheiten unterschiedlicher Stoffeinheiten, analysierten Funktionsgraphen und deren Eigenschaften und führten heuristische Strategien wie Verallgemeinern aus. Die Einbeziehung mehrer Wissenseinheiten scheint die Schüler somit zu heuristischen Aktivitäten anzuregen, ein Ergebnis, was sicher für den profilierten Kurs spezifisch ist. Die Problemlösestruktur und Komplexität der Modellierung unterscheidet sich bei dieser Aufgabe dagegen nicht wesentlich von Aufgabe 11B6.1: In beiden Fällen liegt eine Umkehraufgabe vor, für die es kein Standardverfahren gibt, und in beiden Fällen wird auf ein geeignetes mathematisches Konzept innerhalb der Aufgabenformulierung hingewiesen. Bedeutsam war hier aber sicher auch, dass die Inhalte den Schülern vertraut waren. Ebenso hatten die Schüler anscheinend unterschiedliche bekannte Herangehensweisen zur Auswahl und konnten sich ihren Fähigkeiten und Neigungen entsprechend entscheiden oder sogar unterschiedliche Strategien verbinden.

Auch die Aufforderung, einen Nachweis zu führen, kann die Schüler dazu bewegt haben, Zusammenhänge genau zu analysieren. Die Formulierung der Aufgabenstellung legt bereits durch die Forderung nach mathematischen Argumentationen Gewicht auf den Lösungsprozesse, was sie von der eher ergebnisorientierten Formulierung von 11B6.1 unterscheidet.

Die explizite Forderung nach einem Nachweis sollte auch ein Grund für die gute Umsetzung kritisch-argumentativer Kompetenzen sein. Möglicherweise sind Nachweise für die Schüler mit einem besonderen Anspruch verbunden und besser geeignet sie zu expliziten Schlussfolgerungen und Argumentationen zu bewegen, als die Aufforderung zum Begründen von Schlussfolgerungen (11B6.1). Auch die Verknüpfung verschiedener Wissenseinheiten sollte die Anzahl logischer Schlüsse und den Umfang der Argumentation beeinflusst haben.

*Geringere Umsetzung formal-operativer Aktivitäten*

Die geringere Umsetzung formal-operativer Aktivitäten wurde dadurch verursacht, dass die meisten Schüler sich gegen den formalen Weg entschieden und innerhalb der begrifflichen Argumentation weitgehend auf formal-operative Aktivitäten verzichten konnten. Die Schüler, die sich für den formalen Weg der Beispiellösung entschieden, führten die intendierten algebraischen Operationen auch aus.

*Unterschiedliche Lösungsstrategien*

Bei dieser Aufgabe stellt sich, die Frage, welche Merkmale der Aufgabe dazu beigetragen haben können, dass die Schüler derart vielfältige individuelle Lösungswege kreierten. Dies ist vor allem deshalb interessant, weil in Aufgabe 11B6.1 ein Lösungsweg, der formale, dominierte. Was könnten die Ursachen dafür sein, dass von zwei methodisch offen formulierten Aufgaben zu ähnlichen Inhalten die eine offen umgesetzt wird, die andere nicht? Sind hier Merkmale der Aufgabe entscheidend oder Merkmale der Aufgabenbearbeiter (Kenntnisse, Methodenrepertoire etc.) oder Merkmale des Unterrichts (z. B. Schwerpunktsetzungen in der Förderung)? Diese für die Förderung individueller Lösungswege durchaus bedeutsame Fragestellung hat für das Anliegen dieser Untersuchung insofern keine wesentliche Bedeutung, dass mit allen drei akzeptablen Lösungsstrategien vielfältige und anspruchsvolle Aktivitäten umgesetzt wurden.

Dennoch sollen einige Aufgabenmerkmale benannt werden, die Einfluss auf die offene Umsetzung gehabt haben können:[107]

- In der Aufgabenstellung sind keinerlei formal-symbolische Darstellungen vorhanden. Solche könnten die Schüler eventuell eher dazu anregen formale Darstellungen und weiter formale Lösungswege einzusetzen.
- Die Aufforderung, einen Nachweis zu führen, kann dazu geführt haben, die Schüler weiter blicken zu lassen als auf die „normale Kurvendiskussion“.

[107] Abgesicherte Aussagen sind anhand des vorliegenden Datenmaterials nicht möglich. Außerdem ist die interpretative Analyse der Aufgabenbearbeitungen dafür nicht ausreichend. Schüler- und Lehrerinterviews müssten die Interpretationen ergänzen und stützen.

- Es ist keine konkrete Funktion gegeben. Die Übersetzung in eine formale Darstellung muss auf allgemeiner Ebene enden. Formale Verfahren müssen zunächst mit einem allgemeinen Ausdruck geführt werden. Diese neuartige Situation, bei der nicht sofort gerechnet werden kann, hat möglicherweise dazu angeregt, andere Wege zu finden.
- Es existieren mehrere lokal und global abweichende Lösungsmöglichkeiten deren inhaltliche und methodische Voraussetzungen die Schüler sicher beherrschen. Die Lösungselemente aller Wege wurden im letzten halben Jahr erlernt oder wiederholt. Dadurch ist wahrscheinlich, dass die Schüler selbst zwischen verschiedenen Herangehensweisen wählen können. Es ist ein Unterschied, ob eine Aufgabe potenziell methodisch offen ist, da kein Verfahren vorgegeben wurde, ob eine Aufgabe potenziell offen ist, weil dem Aufgabensteller verschiedene Lösungswege eingefallen sind oder schließlich, ob ein Schüler selbst zwischen verschiedenen ihm zugänglichen Lösungswegen wählen kann. Bei dieser Aufgabe könnte bei einigen Schülern die letzte Situation zutreffen, bei Aufgabe 11B6.1 dagegen wahrscheinlich nur die ersten beiden.

Der letztgenannte Aspekt bezieht sich bereits auf die Wechselwirkungen zwischen Aufgabenanforderungen und den Voraussetzungen der Schüler auf Grund des zuvor erlebten Unterrichts und evtl. eigenständiger Lernprozesse. Bei dieser Aufgabe wird ganz klar, dass die inhaltliche und methodische Förderung der Schüler im Unterricht (mindestens) ebenso großen Einfluss auf die Aufgabenbearbeitungen der Schüler hat, wie die Merkmale der Aufgabe selbst. Die Schüler der Untersuchungsklasse sind vermutlich darin geübt, Funktionsgraphen zu analysieren und zu vergleichen. Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften von Funktionen sind ihnen bekannt bzw. können von ihnen erschlossen werden. Gerade das vernetzende mathematische Denken zwischen Inhalten verschiedener Stoffabschnitte wird in den profilierten Klassen gepflegt. So sind die Schüler mit den Eigenschaften von Parabeln gut vertraut, mit denen die vor der Differenzialrechnung (Nullstellen, Symmetrie, Scheitelpunkt), aber auch mit denen, die innerhalb der Differenzialrechnung (Extrem- und Wendestellen) diskutiert wurden. Es gelingt ihnen, diese zu verbinden und so auf effektive Weise, ohne neue komplexe formale Verfahren, die Aufgabe zu lösen.

Um den Beziehungen zwischen Unterricht und Aufgabenbearbeitung nachzugehen, könnten die selben potenziell offenen Aufgaben in Klassen gestellt werden, die sich bezüglich der Vorkenntnisse der Schüler und der unterrichtlichen Förderung unterscheiden. Die genauen Vorkenntnisse der Schüler, der „Lehrplan“ der Klasse, die Schwerpunktsetzungen des Lehrers und andere Unterrichtsmerkmale sind anhand von Unterrichtsbeobachtungen und Lehrer- evtl. auch Schülerinterviews genau zu analysieren. Die Arbeiten der Schüler könnten wie hier qualitativ untersucht werden. Zusätzlich können die Schüler mündlich oder schriftlich zur Begründung und Reflexion ihres Herangehens angeregt werden, um zu erkunden, warum sie den entsprechenden Lösungsweg bevorzugen.

## 5.5 Zusammenfassung der Ergebnisse aus den Analysen der Schülerarbeiten

Die differenzierten Aufgabenanalysen und die Analysen der Schülerarbeiten bei der Bearbeitung exemplarischer Aufgaben wurden ausgeführt, um Hinweise zur Verbesserung der Qualität von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen zu erhalten. Im Mittelpunkt stand die zu Beginn des fünften Kapitels formulierte Frage: Wie können Aufgaben aussehen, die vielfältige Aktivitäten anregen, um eine differenzierte Beurteilung mathematischer Kompetenzen zu ermöglich? Innerhalb der objektiven Aufgabenanalysen wurde bestimmt, ob die Aufgaben den Kriterien an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen (vgl. Kapitel 2) genügen und welche kompetenzspezifischen Anforderungen sie aufweisen. Darüber hinaus wurde im Sinne der Analyse realisierter Anforderungen untersucht, inwieweit die mit der Aufgabe verbundenen Intentionen von den Schülern umgesetzt wurden. An dieser Stelle wird ein Überblick über die Ergebnisse aller sieben Auswertungen (vgl. Anhang 2) gegeben, wobei die folgenden Fragen im Mittelpunkt stehen:

- Inwiefern wurden die mit den Aufgaben intendierten Aktivitäten durch die Schüler umgesetzt? Gibt es Unterschiede zwischen den Aktivitätsbereichen und den Aufgaben?
- Welche Merkmale zeigen die Aufgaben, die von den Schülern in der gewünschten Intensität umgesetzt wurden?

### 5.5.1 Verhältnis zwischen ausgeführten und intendierten Schüleraktivitäten

Tab. 5/3: Anzahl der intendierten und der durchschnittlich von einem Schüler ausgeführten Aktivitäten für die vier Aktivitätsbereiche und die sieben Aufgaben der Fallstudie

| Aufgabe | $DI_{intendiert}$ | $DI_{ausgeführt}$ | $HE_{intendiert}$ | $HE_{ausgeführt}$ | $FO_{intendiert}$ | $FO_{ausgeführt}$ | $KA_{intendiert}$ | $KA_{ausgeführt}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11B6.1 | 2 | 1,5 | 2 | 2,3 | 3 | 3,1 | 3 | 1,8 |
| 11B6.2 | 4 | 2,7 | 3 | 4,6 | 3 | 1,3 | 4 | 3,9 |
| 11B7.1 | 5 | 3,2 | 5 | 3,2 | 4 | 4,2 | 4 | 3,1 |
| 11B7.2 | 7 | 4,2 | 3 | 2,5 | 4 | 2,9 | 4 | 1,6 |
| 11B8.1 | 8 | 6,2 | 9 | 6,1 | 5 | 2,3 | 10 | 2,2 |
| 11B9.1 | 12 | 5,8 | 8 | 4,6 | 6 | 3,4 | 4 | 1,6 |
| 11B10.1 | 6 | 3,4 | 6 | 4,8 | 4 | 3,8 | 5 | 2,2 |

Tabelle 5/3 dokumentiert für alle Aufgaben und Aktivitätsbereiche die Zahl der intendierten Aktivitäten, die von einer Beispiellösung abgeleitet wurden, sowie die durchschnittlich von einem Schüler bei der Bearbeitung der Aufgabe ausgeführten Aktivitäten. Die objektiven Aufgabenanalysen ergeben, dass alle sieben Aufgaben potenziell ausgewogen Aktivitäten der vier Bereiche ansprechen. Schwerpunkte bezüglich einzelner Aktivitätsbereiche variieren von Aufgabe zu Aufgabe. Auch in der Umsetzung der Aufgaben werden alle Aktivitätsbereiche angesprochen, wobei die Schwerpunkte ebenfalls variieren.

Zum Vergleich der intendierten und der umgesetzten Schüleraktivitäten wird die *Umsetzungsquote U* definiert: $U = \frac{u}{i}$, wobei $u$ die Anzahl der durchschnittlich von einem Schüler bei der Bearbeitung einer Aufgabe ausgeführten Aktivitäten eines Aktivitätsbereiches und $i$ die Anzahl der mit der Aufgabe intendierten Aktivitäten des Aktivitätsbereichs ist.[108] Art und Anzahl der intendierten Aktivitäten wurden von einer, jeweils vorgestellten, Beispiellösung abgeleitet. Daher ist die Anzahl nur ein Richtwert. Andere Lösungsstrategien können zu einer anderen Gewichtung der Aktivitätsbereiche führen, wie es z. B. bei der Aufgabe 11B6.2 Beweis zum Thema Kurvendiskussion der Fall war (vgl. 5.4). Deutliche Abweichungen von der intendierten Förderung sind bei Beurteilungsaufgaben jedoch kritisch, da dann die gewünschten Kompetenzen nicht sicher beurteilt werden können bzw. die Validität der Aufgabe eingeschränkt wird.

[108] Es ist nicht gedacht, dass die Schüler die Aktivitäten der Beispiellösung ausführen, sondern dass sie die Aktivitätsbereiche entsprechend einbeziehen. Deshalb wird nicht die Umsetzung der intendierten Aktivitäten bestimmt, sondern die Umsetzung auf den Aktivitätsbereich bezogen und alle von den Schülern ausgeführten Aktivitäten werden einbezogen.

In Tabelle 5/4 werden die für die Fallstudie bestimmten Umsetzungsquoten für Schüleraktivitäten der vier Bereiche dargestellt. Auf Grund der geschilderten Schwierigkeiten bei einer Beispiellösung als Bezugspunkt werden Umsetzungsquoten bis zu 0,5 (50% der intendierten Aktivitäten wurden umgesetzt) nicht für kritisch gehalten. Die Beispiellösungen sind teilweise sehr ausführlich dargestellt, entsprechen eher einer optimalen Lösung, die nicht von allen Schülern erwartet werden kann. Die dunkel markierten Zellen in Tabelle 5/4 enthalten jedoch auffällige Ergebnisse, die in Abschnitt 5.5.2 diskutiert werden.

Tab. 5/4: Umsetzungsquoten der Schüleraktivitäten in den vier Aktivitätsbereichen für die sieben Aufgaben der Fallstudie, Umsetzungsquote aller Aktivitäten einer Aufgabe ($U_{ges}$) und Mittelwert der Umsetzungsquoten eines Aktivitätsbereiches

| Aufgabe | $U_{DI}$ | $U_{HE}$ | $U_{FO}$ | $U_{KA}$ | $U_{ges}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 11B6.1 | 0,8 | 1,1 | 1,0 | 0,6 | 0,9 |
| 11B6.2 | 0,7 | 1,5 | 0,4 | 1,0 | 0,9 |
| 11B7.1 | 0,6 | 0,6 | 1,1 | 0,8 | 0,8 |
| 11B7.2 | 0,6 | 0,8 | 0,7 | 0,4 | 0,6 |
| 11B8.1 | 0,8 | 0,7 | 0,5 | 0,2 | 0,5 |
| 11B9.1 | 0,5 | 0,6 | 0,6 | 0,4 | 0,5 |
| 11B10.1 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 0,4 | 0,7 |
| Mittel | 0,7 | 0,9 | 0,8 | 0,5 | 0,7 |

Die mittlere Umsetzung der Aktivitätsbereiche durch die profilierten Schüler der Untersuchungsklasse ist für die sieben betrachteten Aufgaben insgesamt zufriedenstellend. Werden alle Aufgaben einbezogen, gibt es keine dramatischen Unterschiede in der Umsetzung der Aktivitätsbereiche. In der Tendenz werden vor allem heuristisch-experimentelle und formal-operative Aktivitäten von den Schülern den Erwartungen entsprechend umgesetzt. Heuristisch-experimentelle und formal-operative Aktivitäten sind zur Bearbeitung einer Aufgabe zwingend notwendig, insbesondere für die Bestimmung einer formalen Lösung. Darstellende und vor allem argumentative Tätigkeiten werden möglicherweise von einigen Schülern als „schmückendes Beiwerk“ gesehen, wenigstens, wenn nicht ausdrücklich eine Argumentation gefordert ist.

### 5.5.2 Umsetzung unterschiedlicher Aktivitätsbereiche und Zusammenhang zu Aufgabenmerkmalen

Im Folgenden wird auf die Umsetzung der einzelnen Aktivitätsbereiche näher eingegangen und es wird versucht, Zusammenhänge zwischen Aufgabenmerkmalen und der Umsetzung der vier Aktivitätsbereiche herzustellen. Dies geschieht u. a., indem Aufgaben beschrieben werden, welche den Erwartungen entsprechend (oder sogar besser) umgesetzt wurden.

*Umsetzung darstellend-interpretativer Aktivitäten*

Darstellend-interpretative Aktivitäten werden von den Schülern dieser Fallstudie bei den sieben erprobten Aufgaben im Mittel zu 70% umgesetzt. Bezüglich verbaler Beschreibungen der Zusammenhänge und Kommentierungen des Vorgehens gibt es in der Klasse eine große Spanne zwischen stark ergebniszentrierten und ausführlichen Lösungsdarlegungen. Wirklich kritisch sind die Ergebnisse jedoch bezüglich keiner Aufgabe, zumal die Darstellung der Lösungsfindung in den Beispiellösungen recht ausführlich erfolgte.

Die Aufgabe mit der höchsten Umsetzung intendierter darstellend-interpretativer Aktivitäten war Aufgabe 11B6.1 Extrema einer Funktion mit Parameter. Mit zwei intendierten darstellend-interpretativen Aktivitäten war die Komplexität bezüglich derartiger Kompetenzen jedoch gering. Gleiches gilt für die Anforderungen, da auf der formalen Ebene gearbeitet werden kann, was die Aufgabenstellung auch begünstigt (vgl. 5.3). Die zweite Aufgabe mit einer guten Umsetzung darstellend-interpretativer Aktivitäten ist Aufgabe 11B8.1 Vektorraum der magischen Quadrate, zu der eine ganze Reihe darstellend-interpretativer Aktivitäten intendiert war, mit Anforderungen bis zum Niveau 3 (vgl. Anhang 2.5). Die ausgeführten Aktivitäten entsprechen hier selbständig gewählten formalen und verbalen Darstellungen. Auf Grund der einzelnen Teilaufgaben, die teilweise wiederum aus einzelnen Lösungsschritten bestanden, war hier, anders als z. B. bei Aufgabe 11B6.2, eine ganze Reihe von Einzeldarstellungen, auch von ähnlichen, vorzunehmen. Die Ergebnisorientierung, ein Kriterium an Aufgaben zur Leistungsbeurteilung, kann hier begünstigend gewirkt haben. Die Analyse der Schülerarbeiten zu Aufgabe 11B9.1 Basis eines Vektorraumes mit komplexen Anforderungen bzgl. des darstellend-interpretativen Aktivitätsbereichs zeigte, dass vor allem komplexe verbale Erläuterungen, Interpretationen von Darstellungen und zusätzliche verbale Kommentare nicht ausgeführt wurden (vgl. Anhang 2.6). Dagegen entsprachen die dort häufig ausgeführten Darstellungen den für die Lösungsfindung im engeren Sinne notwendigen.

Aufgaben, welche die gewünschten Darstellungen notwendig erforderlich machen, sind somit vorzuziehen. Ebenso ist es sinnvoll, bei Beurteilungsaufgaben, wie bei Diagnoseaufgaben (vgl. Sjuts 2006), explizit zur Erläuterung und Kommentierung des Vorgehens, zum Interpretieren und zum verbalen Beschreiben aufzufordern.

*Umsetzung heuristisch-experimenteller Aktivitäten*

Die intendierten heuristisch-experimentellen Aktivitäten wurden im Mittel zu 90% umgesetzt. Das Entwickeln von Lösungsansätzen und das Herstellen vielfältiger Zusammenhänge ist für die Schüler der profilierten Klasse eine Herausforderung, die sie gern annehmen. Hier gibt es jedoch deutliche Unterschiede zwischen den Aufgaben (Umsetzungsquoten zwischen 0,6 bis 1,6). Auffällig ist Aufgabe 11B6.2 Beweis zum Thema Kurvendiskussion, bei der weit mehr heuristisch-experimentelle Aktivitäten ausgeführt wurden als erwartet. Da die Schüler zuvor im Unterricht formal Extrem- und Wendestellen bestimmten, wurde angenommen, dass sie diese Verfahren bei der Aufgabenlösung einsetzen. Mit dem formalen Weg sind nur wenige schöpferische Aktivitäten verbunden. Die Mehrheit der Schüler wählte jedoch die begriffliche Argumentation (vgl. 5.4) und stellte selbständig vielseitige Zusammenhänge zwischen Funktion und erster Ableitung sowie zwischen Extrem- und Wendestellen her. Als mögliche Ursache der Anregung derart vieler schöpferischer Aktivitäten wurde die hohe inhaltliche Komplexität benannt (vgl. 5.4.4). Diese kann, muss aber nicht zu einer hohen Umsetzung heuristisch-experimenteller Aktivitäten führen: Die Aufgaben 11B7.1 Flächenmaximum unter der Wurzelfunktion und 11B9.1 Basis eines Vektorraumes sind inhaltlich und auch hinsichtlich heuristischer Anforderungen komplex. Bei diesen Aufgaben war jedoch die Umsetzungsquote heuristischer Aktivitäten mit 0,6 vergleichsweise gering. Bei beiden Aufgaben wurden vor allem die heuristischen Aktivitäten von wenigen Schülern umgesetzt, welche das Herstellen von Zusammenhängen mit nicht vertrauten Inhalten oder wenig vertraute methodische Elemente betrafen.[109] In beiden Fällen liegt für die betreffenden Aufgabenteile eine (innermathematische) Modellierung der zweiten Stufe vor: Auf das sinnvolle mathematische Konzept bzw. auf eine sinnvolle

[109] Bei Aufgabe 11B7.1 stellten beispielsweise nur drei Schüler explizit die in der Aufgabenstellung verlangte Vermutung zur maximalen Fläche auf (vgl. Anhang 2.3). Ursachen könnten sein, dass die Schüler keinen Ansatz fanden, wie sie zu einer Vermutung kommen könnten, dass die Aufgabenstellung ihnen fremd war und sie diese deshalb nicht ausführten oder, dass sie die Aufgabenstellung ignorierten, weil sie den Grenzwert exakt berechnen können. Bei Aufgabe 9.1 wurden die heuristischen Aktivitäten von wenigen oder keinen Schülern ausgeführt, welche das Herstellen von Zusammenhängen zwischen dem euklidischen Vektorraum und dem fremden Vektorraum der Polynome höchstens zweiten Grades betrafen (vgl. Anhang 2.6).

Lösungsstrategie wird innerhalb der Aufgabenstellung nicht hingewiesen. Dies stellt ebenfalls einen Unterschied z. B. zu den Aufgaben 11B6.1 und 11B6.2 dar.

Heuristische Kompetenzen werden möglicherweise dann von vielen Schülern umgesetzt, wenn mehrere Inhalte verbunden werden, zu denen die Schüler sichere Kenntnisse haben und ihnen verschiedene, für sie greifbare Lösungsstrategien zur Verfügung stehen.

*Umsetzung formal-operativer Aktivitäten*

Die formal-operativen Aktivitäten wurden in dieser Fallstudie im Mittel zu 80% umgesetzt. Dieses Ergebnis entspricht den Erwartungen, denn diese Aktivitäten sind wie auch heuristisch-experimentelle notwendig, um überhaupt ein (formales) Ergebnis zu erhalten. Die geringe Umsetzung der formal-operativen Aktivitäten bei Aufgabe 11B6.2 Beweis zum Thema Kurvendiskussion wurde in Abschnitt 5.4.4 darauf zurückgeführt, dass die Schüler einen Lösungsweg wählten, der weitestgehend ohne formal-operative Aktivitäten auskommt. Hier wird jedoch auch ein Problem innerhalb der Kriterien an Aufgaben für Leistungsbeurteilungen (vgl., 2.2.1) deutlich: Soll die Kompetenz, bestimmte Verfahren auszuführen, beurteilt werden, ist aus Gründen der Validität und Erwartungstransparenz direkt das entsprechende Verfahren einzufordern. Dies steht jedoch im Widerspruch zum Kriterium der Möglichkeit individueller Zugänge und Lösungsmöglichkeiten. Zwischen den unterschiedlichen Forderungen kann nur ein Kompromiss gefunden werden. Dieser wird in Aufgaben gesehen, bei denen das gewünschte Verfahren, z. B. aus Gründen der Effektivität oder Sicherheit, die prominenteste Lösungsmethode ist und dennoch allein gefunden werden muss. Auf diese Weise konnte das Verfahren der Extremwertbestimmung durch die Aufgaben 11B6.1, 11B7.1, 11B7.2 (vgl. Anhang 2) geprüft werden.

Bei den Bearbeitungen der Aufgaben 11B6.1, 11B7.1 und 11B10.1 (vgl. Anhang 2) wurden die formal-operativen Aktivitäten wie intendiert ausgeführt. Die formalen Aktivitäten dieser Aufgabenstellungen waren bei der Lösungsfindung unumgänglich; die Schüler hatten keine (naheliegende) Alternative, konnten nicht wie bei Aufgabe 11B6.2 die algorithmische Bearbeitung durch eine effektive begriffliche Argumentation ersetzen.

Bei Aufgabe 11B8.1 (vgl. Anhang 2.5) wurden insgesamt die mathematischen Aktivitäten nicht wie intendiert umgesetzt. Hier wurden beispielsweise von der Mehrheit der Schüler die Vektorraumaxiome für den Vektorraum der magischen Quadrate nicht (formal) nachgewiesen, wozu neben argumentativen Aktivitäten auch algebraische Operationen auszuführen sind. Die hohe Komplexität und Schwierigkeit der Aufgabe führte dazu, dass die

Schüler Aufgabenteile nicht wie gedacht bearbeiteten. Möglicherweise sahen sie auch nicht die Notwendigkeit, die Überprüfung der Kriterien wirklich formal auszuführen und darzulegen.

Formale Verfahren und Operationen können somit nur ausgeführt werden, wenn die Schüler die Verbindung zu diesen Verfahren herstellen und den Weg bis zur Bearbeitung dieser Verfahren ausführen, also vorgeschaltete Anforderungen bewältigen.

*Umsetzung kritisch-argumentativer Aktivitäten*

Die kritisch-argumentativen Aktivitäten wurden von den Schülern der Untersuchungsklasse mit der geringsten Quote von im Mittel etwa 50% umgesetzt. Die Umsetzung kritisch-argumentativer Kompetenzen gelang am besten bei Aufgabe 11B6.2. Hier waren durch die Aufforderung „zeigen sie" explizit argumentative Tätigkeiten gefordert, ebenso wie in Aufgabe 11B6.1 und in Aufgabe 11B7.1. Bei den beiden außermathematischen Anwendungen 11B7.2 und 11B10.1 mit dem Kontext angemessenen offenen Fragestellungen, ohne explizite Aufforderungen wurden dagegen die Argumentationen nicht wie gewünscht ausgeführt (vgl. Anhang 2).

Diese Ergebnisse lassen vermuten, dass nicht eingeforderte, selbständige mathematische Argumentationen von Schülern seltener ausgeführt werden. Wenn aber argumentative Tätigkeiten nicht ausgeführt werden, können entsprechende Kompetenzen nicht beurteilt werden und diesbezügliche Rückmeldungen nicht die Förderung argumentativer Kompetenzen unterstützen. Deshalb wird, wenigstens bis zur Verinnerlichung der Anforderungen, eine explizite Aufforderung zur Argumentation in Beurteilungsaufgaben aus Gründen der Validität und Transparenz für notwendig gehalten.

Aufgabe 11B8.1 Vektorraum der magischen Quadrate fällt bereits bezüglich der Komplexität der einbezogenen Argumentation auf (vgl. Anhang 2.5). Hier sind in der Beispiellösung zehn argumentative Aktivitäten separiert worden, weitaus mehr als bei den anderen Aufgaben. Dieser hohen Komplexität und den hohen argumentativen Anforderungen der Aufgabe steht eine geringe Umsetzungsquote gegenüber. Die Schüler führten zwar die entdeckenden heuristisch-experimentellen Aktivitäten aus, prüften jedoch überwiegend nicht angemessen, ob die Vektorraumaxiome tatsächlich erfüllt werden. Auch insgesamt ist die Umsetzung intendierter Aktivitäten bei dieser komplexen Aufgabe geringer als bei weniger komplexen Aufgaben. Ein genereller Zusammenhang zwischen Anforderungsniveau bezüglich argumentativer Kompetenzen und deren Umsetzungsquote konnte an den sieben gestellten Aufgaben nicht beobachtet werden.

*Zusammenfassung der Hinweise zur Aufgabengestaltung*

Insgesamt ist festzuhalten, dass in dieser Fallstudie keine generellen Zusammenhänge zwischen Aufgabenparametern und den Umsetzungsquoten der Schüleraktivitäten aufgedeckt werden konnten. Insbesondere war kein systematischer Zusammenhang zwischen den kompetenzspezifischen Anforderungsniveaus und der Umsetzungsquote entsprechender Aktivitäten festzustellen: Die Schüler nahmen einerseits hohe Anforderungen an (hohe Umsetzungsquote bei Anforderungsniveau 3). Andererseits gab es auch niedrige Umsetzungen bei Anforderungsniveau 3 und auch niedrige Umsetzungen bei Anforderungsniveau 1. Es ist also nicht der Fall, dass hohe objektive[110] Anforderungen die Schüler vor der Umsetzung dieser Aufgabenteile abschreckten.

Dieses Ergebnis kann, wie alle weiteren Ergebnisse dieser Fallstudie, nicht auf andere Klassen übertragen werden. Die Untersuchungen wurden mit einer kleinen und, auf Grund der Profilierung, nicht repräsentativen Versuchsgruppe vorgenommen. Ziel war es nicht, statistisch abgesicherte Zusammenhänge zwischen Aufgabenparametern und der Umsetzung intendierter Aktivitäten aufzudecken, sondern einige Hinweise zur Gestaltung von Aufgaben zur Anregung vielseitiger Schüleraktivitäten zu erhalten (s.u.). Es ist gut möglich, dass unter anderen Versuchsbedingungen systematische Zusammenhänge zwischen kompetenzspezifischen Anforderungen und den Umsetzungen zugehöriger Aktivitäten beobachtet werden können.

In Bezug auf die Verbesserung von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen können folgende kompetenzspezifische Hinweise[111] zusammengefasst werden:

- Zur Verbesserung der Umsetzung kritisch-argumentativer und darstellend-interpretativer Aktivitäten wird es für sinnvoll gehalten bei Beurteilungsaufgaben diese Aktivitäten explizit einzufordern. Dadurch wird auch die Validität der Aufgabe, die Erwartungstransparenz und die Ergebnisorientierung erhöht.

---

[110] Es ist wichtig, hier von objektiven Anforderungen zu sprechen, da die Schüler subjektiv eine ganz andere Anforderung sehen können.

[111] Auch diese Hinweise sind nicht statistisch abgesichert und somit nicht allgemeingültig. Auf Grund der hohen Plausibilität werden sie aber als mögliche Mittel der Verbesserung der Aufgaben in Bezug auf die Anregung vielseitiger, aber auch spezifischer Aktivitäten gesehen.

- Zur Anregung heuristischer Aktivitäten werden Aufgaben präferiert, in denen mehrere Wissenseinheiten verknüpft werden, zu denen die Schüler sichere Kenntnisse besitzen. Die methodenoffene Umsetzung von (methodisch offenen) Aufgaben ist dann möglich, wenn die Schüler verschiedene Lösungsmethoden kennen und beherrschen. Eine objektiv methodisch offene Aufgabe, in dem Sinne, dass der Lösungsweg nicht eingegrenzt wird, ist allein nicht ausreichend.
- Formale Verfahren und Operationen werden anscheinend vor allem dann ausgeführt, wenn diese kalkülhaften Aktivitäten zur Lösung der Aufgabe effektiv und für die Schüler naheliegend sind. Außerdem sollten die heuristischen Anforderungen so gestaltet sein, dass die Schüler Verbindungen zu diesen Verfahren herstellen und die vorgeschalteten Anforderungen bewältigen können.

Insgesamt gelang es mit den ausgewählten Aufgaben die Schüler zu vielseitigen mathematischen Aktivitäten anzuregen. Diese verteilten sich zufriedenstellend auf die Aktivitätsbereiche. Das erstellte Analysesystem zur Auswahl von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Aktivitäten erlaubt es somit, Aufgaben für diesen Anspruch zu prüfen und zu beschreiben. Dabei können auch Schwachstellen der Aufgaben, insbesondere bezüglich der Kriterien an Beurteilungsaufgaben aufgedeckt werden, die bei der Beurteilung der Kompetenzen bedacht werden sollten.

Die Deutung der Ergebnisse mit den analysierten Aufgabenmerkmalen gelang dagegen nicht zufriedenstellend. Um Zusammenhänge zwischen Merkmalen von Aufgaben und Schüleraktivitäten zu untersuchen, sind Aufgaben auszuwählen, die sich in spezifischen Merkmalen stärker unterscheiden. Zum anderen ist eine repräsentative Untersuchungsgruppe notwendig. Das hier entwickelte und explorativ erprobte Verfahren der Analyse von Schülerarbeiten, insbesondere das zunächst offene Codieren und die daran anschließende Zuordnung zu theoretischen Kategorien wird auch für größere empirische Studien zur realisierten Aufgabenqualität für geeignet gehalten.

Die Aufgabenbearbeitungen der Schüler werden, so wird in der Fallstudie (einmal mehr) deutlich, nicht nur von den Merkmalen der Aufgabe, sondern ebenso von unterrichtlichen Merkmalen sowie motivationalen Eigenschaften der Schüler bestimmt. Diese Merkmale wurden in der vorgenommenen Untersuchung nicht erhoben. Gerade bei Aufgaben zu Beurteilungszwecken ist jedoch eine Reflexion der Wirkung dieser Faktoren notwendig, denn sie tragen wesentlich dazu bei, dass die Kriterien an Aufgaben für Leistungsbeurteilungen erfüllt werden. Beispielsweise sind aus dem Unterricht gewohnte Erwartungen an die Stringenz von Argumentationen, an die Darstellung von Modellierungen, an die Beschreibung der Lösungsstrategie ausschlaggebend dafür, ob eine bestimmte Aufgabenstellung dem Kriterium der Erwartungstransparenz genügt. Die üblichen unterrichtlichen Anforderungen, aber auch die Inhalte bestimmen darüber hinaus die realisierten Anforderungen. Der (realisierte) heuristische Anspruch einer Aufgabe hängt beispielsweise wesentlich davon ab, welche Verfahren, Lösungsstrategien etc. die Schüler aus dem Unterricht kennen, wie intensiv diese geübt wurden, wann sie letztmalig angewendet wurden. Hier wären Untersuchungen wichtig, welche aufgabenspezifische, unterrichtspezifische und individuelle Merkmale einbeziehen.

# 6 Zusammenfassung, Reflexion und Ausblick

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, ein Konzept der kompetenzorientierten Leistungsbeurteilung zu entwickeln, welches erlaubt in differenzierter Form die mathematischen Kompetenzen von Schülern zu beurteilen und ihnen förderungsorientierte Rückmeldungen zu geben. Das Konzept besteht aus zwei wesentlichen Komponenten: einem System zur Analyse und Beschreibung von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen (vgl. Kapitel 2) und dem Beurteilungskonzept selbst (vgl. Kapitel 3).

Aufgaben sind als Mittel der Anregung mathematischer Aktivitäten die Grundlage der Beurteilung erworbener Kompetenzen. Die spezifische Situation der Beurteilung stellt Anforderungen an die Aufgabe, die z. T. von den Anforderungen an Aufgaben zum Erwerb mathematischer Kompetenzen (Lernaufgaben) abweichen. Zusätzlich zu didaktischen und fachdidaktischen Kriterien an Aufgabenqualität und diesen situationsspezifischen Anforderungen müssen Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen geeignet sein, vielfältige mathematische Aktivitäten anzuregen. Das in Kapitel 2 entwickelte System bietet die Grundlage der Auswahl und Konstruktion von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen. Neben den so erfassten objektiven Aufgabenmerkmalen ist die Umsetzung der Aufgaben von Bedeutung. Sollen unterschiedliche mathematische Kompetenzen der Schüler beurteilt werden, reicht es nicht, entsprechende Aktivitäten durch geeignete Aufgaben zu planen, sondern diese sind von den Schülern auch auszuführen. Ebenso bleibt zu prüfen, ob die Kriterien an Beurteilungsaufgaben in der spezifischen Umsetzung realisiert werden können. In diesem Sinne wird auf der Grundlage der durchgeführten Fallstudien das erstellte System der Aufgabenanalyse in Abschnitt 6.1 kritisch betrachtet.

Grundlage des in Kapitel 3 entwickelten Modells der differenzierten Leistungsbeurteilung ist eine Differenzierung in die Aktivitätsbereiche heuristisch-experimentell, darstellend-interpretativ, formal-operativ und kritisch-argumentativ. Die Beurteilung der Schülerleistungen beruht auf kompetenz- und aufgabenspezifischen Beurteilungskriterien. Die Rückmeldung an die Schüler erfolgt in differenzierter Form anhand von Rückmeldungsbögen. Die Erprobung des Konzeptes fand durch Fallstudien mit mathematisch profilierten Klassen der Sekundarstufe II (vgl. Kapitel 4) statt. Dabei wurde beobachtet, dass sich individuelle Stärken und Schwächen der Schüler bezüglich der vier Aktivitätsbereiche bereits an einzelnen Aufgabenbearbeitungen zeigen. Bei der Dokumentation der Leistungen konnten zum einen stabile individuelle Stärken und Schwächen bezüglich der Aktivitätsbereiche sichtbar gemacht werden. Zum anderen zeigten sich aber auch deutliche aufgabenabhängige Schwankungen in den Kompetenzdarlegungen. Diese sprechen für eine aufgabenbezogene Rückmeldung der Leistungen an die Schüler. In den schulpraktischen Untersuchungen fanden sich somit beide Ansätze zum Kompetenzbegriff wieder: Kompetenzen als allgemeine intellektuelle Fähigkeiten und Kompetenzen als spezielle intellektuelle Fähigkeiten (vgl. Weinert 2001, Klieme 2004 und Kapitel 1). Die Schüler nahmen die erweitere Leistungsbeurteilung überwiegend positiv auf und sehen die differenzierten Rückmeldungen als Unterstützung des selbständigen Lernens. Im ersten Kapitel dieser Arbeit wurde ein Katalog an Anforderungen an eine Form der Leistungsbeurteilung, die aktuellen didaktischen und fachdidaktischen Ansprüchen an einen kompetenzorientierten Unterricht genügt, zusammengestellt. Das entwickelte Konzept der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen genügt im wesentlichen diesen Kriterien (vgl. 3.5). Ähnlich wie bei der Aufgabenanalyse ist es aber auch hier wichtig, dass nicht nur das Modell diesen Kriterien genügt, sondern, dass die Qualität bei der spezifischen Umsetzung im Unterricht beibehalten werden kann. Im Abschnitt 6.2 wird die Umsetzung des Konzeptes der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen anhand dieser Kriterien reflektiert.

Abschließend wird in Abschnitt 6.3 ein Ausblick auf mögliche unterrichtliche Umsetzungen des entwickelten Konzeptes gegeben.

## 6.1 Reflexion des Systems zur Analyse und Beschreibung von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

In diesem Abschnitt wird das in Kapitel 2 erstellte System zur Analyse und Beschreibung von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen bewertet, indem die bei der Erprobung gewonnenen Erfahrungen zu den einzelnen Kriterien beschrieben werden und auf Problempunkte hingewiesen wird.

Validität

Die Analyse der Validität einer Aufgabe sensibilisiert für mögliche Problempunkte die direkt mit der Beurteilung in Verbindung stehen: Geben die Darlegungen und damit die Grundlagen der Beurteilung Anlass auf die jeweilige Kompetenz zu schließen? Können die Kompetenzen sauber getrennt werden? Bezieht sich die Beurteilung auf anspruchsvolle mathematische Kompetenzen oder bezieht sie sich einseitig auf Leistungen, die schnell bewertbar sind? Bereits die Konstruktion der Aufgaben wurde so angelegt, dass vielseitige mathematische Aktivitäten angeregt werden, vor allem auch solche, die von der KMK in den Bildungsstandards (KMK 2004) und in den EPA (KMK 2002) als zu fördernde mathematische Kompetenzen herausgestellt wurden. In Abschnitt 1.3 wurde gezeigt, dass durch die Umsetzung der vier Aktivitätsbereiche fachdidaktische Zielsetzungen erfüllt werden, die gewählte Differenzierung somit fachdidaktisch valide ist.

Eine Überlagerung der Kompetenzen kann dagegen nicht immer verhindert, durch kompetenzspezifische Beurteilungskriterien jedoch eingegrenzt werden. Außerdem können andere Kompetenzen, wie z. B. die Lesekompetenz, mathematische Kompetenzen überlagern. Das wurde in den verwendeten Aufgaben durch eine gute Anpassung an die altersspezifischen Voraussetzungen der Schüler in Grenzen gehalten, wobei auch die besonderen Voraussetzungen der mathematisch profilierten Klassen zu berücksichtigen waren. Eine besondere Beachtung sollte in diesem Aspekt Modellierungsaufgaben gewährt werden. Für Leistungsbeurteilungen empfiehlt sich im Sinne der Validität ein nicht zu komplexer Kontext, der mit grundlegenden Kenntnissen verstanden werden kann, was bei den verwendeten Aufgaben der Fall war.

Problematisch in Bezug auf die Validität (ebenso wie auf die Reliabilität und Objektivität) ist der Schluss aus der schriftlichen Aufgabenbearbeitung auf die Kompetenz des Schülers. Hier ist, abgesehen von einfachen kalkülhaften Aktivitäten, eine interpretative Begutachtung durch den Lehrer unvermeidbar. An dieser Stelle fehlen fachdidaktische Maßstäbe die z. B. Hinweise darauf geben, aus welchen Darlegungen eines Schülers auf bestimmte heuristische Kompetenzen geschlossen werden kann. Das Aufstellen konkreter Beurteilungskriterien wird als praxisorientiertes Hilfsinstrument gesehen. Auf Grund der Situationsabhängigkeit von Kompetenzdarlegungen ist außerdem zu gewährleisten, dass sich die Beurteilung eines Schülers nicht auf einen Beurteilungsanlass bezieht, sondern das eine Kompetenz in verschiedenen Situationen gezeigt werden kann. Das erfolgte in den Fallstudien durch das Beurteilen einer Kompetenz anhand unterschiedlicher Aufgaben.

Eine Reihe von aufgabenspezifischen Bedingungen in Bezug auf eine ausreichende Validität konnte bereits innerhalb der objektiven Aufgabenanalyse aufgestellt und somit in der Umsetzung und Beurteilung berücksichtigt werden. Hier zeigt sich aber auch die Bedeutung der Analyse der Schülerarbeiten bzw. die Analyse der realisierten Aufgabenqualität.

Geringe Umsetzungsquoten bezüglich einzelner Aktivitäten und bezüglich der Aktivitätsbereiche stehen in Verbindung mit unsicher(er)en Beurteilungen. Teilweise wird somit erst in der Umsetzung deutlich, ob anhand der Aufgabe die gewünschten Kompetenzen beurteilt werden können.

Gerechtigkeit

Unter Gerechtigkeit wurden die Aspekte Verständlichkeit, Transparenz, Ergebnisorientierung und Schwierigkeit zusammengefasst. Verständlichkeit und Schwierigkeit können durch eine sensible Reflexion der Aufgabenstellung und der Kenntnis der Voraussetzungen der Schüler erreicht werden. Ergebnisorientierung wurde bei den eingesetzten Aufgaben gewährleistet, indem explizit Teilaufgaben formuliert und die Bearbeitungen für die Beurteilung in einzelne Lösungsschritte und Teilkompetenzen gegliedert wurden. Dies ist bei den Aufgaben der Oberstufenmathematik oft gut realisierbar. Wichtig ist dabei aber auch, dass die Schüler Aufgabenabschnitte erkennen können, was möglicherweise bei Aufgabe 11B9.1 Basis eines Vektorraums nicht der Fall war. Die Aufforderung zur Untersuchung auf Vektorraumstruktur wurde nur von wenigen Schülern in Teilaufgaben, entsprechend den Vektorraumaxiomen, übersetzt. Möglicherweise ist bei Beurteilungsaufgaben eine explizite Strukturierung vorzuziehen.

Diese leistet auch einen Beitrag zur Transparenz der Anforderungen, einem weiteren nicht leicht zu realisierenden Aspekt von Gerechtigkeit. Transparenz der Anforderungen wird durch klare und direkte Aufforderungen realisiert. Dies steht jedoch im Widerspruch zu Kriterien der Aufgabenqualität wie Offenheit und Realitätsnähe. Hier ist ein Kompromiss bei der Aufgabenformulierung unvermeidbar. Die Ergebnisse der Erprobung (vgl. 5.5) unterstützen z. B. explizite Aufforderungen zu Begründungen und zu Kommentierungen, um die Ausführung dieser Kompetenzen zu bedingen und deren Beurteilung möglich zu machen. Die Transparenz von Anforderungen wird aber auch von den Erfahrungen der Schüler aus dem Unterricht beeinflusst: Was ist unter einer Begründung zu verstehen? Wie ist der Lösungsweg darzulegen? etc. Insgesamt sind die Aspekte des Kriteriums Gerechtigkeit in besonderem Maße von den Vorkenntnissen und Vorerfahrungen der Schüler abhängig, wodurch die Analyse dieser Aspekte nur in Bezug auf eine konkrete Lerngruppe Sinn macht.

Individuelle Wege (Offenheit)

Alle in dieser Arbeit eingesetzten Aufgaben sind methodisch offen in dem Sinne, dass kein Verfahren vorgegeben wird, was die Schüler zu Vorgehensweisen drängt, die nicht ihren Fähigkeiten und Neigungen entsprechen. Zum einen nutzten die Schüler diese Freiräume und wählten Lösungswege die sich lokal und global unterschieden. Den unterschiedlichen Lösungswegen entsprachen unterschiedliche mathematische Aktivitäten, jedoch nicht zwingend Schwerpunktsetzungen, welche die Beurteilung bestimmter Kompetenzen einschränkten (vgl. 5.4.3). Die im Kompetenzspektrum ausgewählten Kompetenzen sind somit nicht von der präsentierten Beispiellösung abhängig, sondern können durch unterschiedliche Lösungsstrategien umgesetzt werden.

Auf der anderen Seite wurde deutlich, dass Offenheit der Aufgabenstellung nicht allein ausreicht, um zu individuellen Lösungswegen anzuregen. Hier ist ebenso wichtig, dass die Schüler zwischen verschiedenen Wegen wählen können, d. h. dass ihnen verschiedene Lösungsstrategien bekannt und bewusst sind.

Individuelle und gesellschaftliche Bedeutung von Aufgaben

Bei Leistungsbeurteilungen handeln die Schüler nicht nur aus eigenem Antrieb. Dennoch sollten Beurteilungsaufgaben nicht zum Selbstzweck gestellt werden, sondern stellvertretend für einen gesellschaftlich relevanten Inhalt stehen. Die Inhalte der verwendeten mathematischen Aufgaben haben z. T. gesellschaftliche Bedeutung, zum anderen Teil handelt es sich um grundlegende mathematische Konzepte, die für die (mathematisch interessierten) Schüler individuell von Bedeutung sind. Außerdem wurde versucht, die Aufgaben durch Inhalt, Kontext oder Methode interessant zu gestalten. Dabei gelang es aber nur zum Teil die Schüler wirklich zur Bearbeitung zu motivieren. Beispielsweise konnte auch der realitätsnahe Kontext der Aufgabe 11B10.1 Verpflegung einer Expedition nicht mehr als 13 (von 21) Schüler zur Bearbeitung motivieren. Bei allen Aufgaben gab es eine große Breite in Bezug auf Umfang und Qualität der Bearbeitungen.

Kognitive Forderung

Qualitativ hochwertige (lernprozessanregende) Aufgaben sind kognitiv anspruchsvoll und erlauben den Schülern ihre Fähigkeiten und Fertigkeiten zu erweitern. Der Anspruch auch in Beurteilungssituationen die Schüler zum Lernen anzuregen widerspricht der Auffassung, dass Leistungs- und Beurteilungssituationen voneinander zu trennen sind (vgl. 1.5.5). Bei der Erprobung des in dieser Arbeit entwickelten Beurteilungskonzeptes festigte sich jedoch die Vermutung, dass vorhandene Kenntnisse auch innerhalb von Beurteilungssituationen vertieft und vernetzt werden können, z. B. durch Anwendung bekannter Inhalte und Verfahren auf neuartige, auch außermathematische Kontexte. Auch hochwertige kognitive Fähigkeiten bis hin zur Stufe des Evaluierens können einbezogen werden und werden von den Schülern auch umgesetzt. Allerdings wurde auch beobachtet, dass heuristische Aktivitäten zu ungewohnten Inhalten und Methoden weniger gut umgesetzt wurden als solche zu gefestigten Inhalten (vgl. 5.5). Das kommt der Aussage von Hußmann, Leuders und Prediger (2007, S. 6) nahe, gezielt etwas über prozessbezogene Kompetenzen erfahren zu können, wenn in Diagnoseaufgaben nicht zu viel inhaltliches Vorwissen eingebracht werden muss.

Die differenzierte Beurteilung mathematischer Kompetenzen ist durch die Einbeziehung anspruchsvoller und komplexer Kompetenzen, wie Argumentieren, Problemlösen, Modellieren, Interpretieren, nicht streng von Lernprozessen trennbar. Auch im Anforderungsbereich III der EPA (vgl. KMK 2002, S. 22) und der Bildungsstandards (vgl. KMK 2004, „Verallgemeinern und Reflektieren“) werden Prozesse beschrieben, bei denen die Anwendung erlernter Inhalte und Methoden allein nicht ausreicht, die zusätzliche kognitive Fähigkeiten, wie kreatives oder vernetzendes Denken, notwendig machen und nicht mehr streng von Lernprozessen getrennt werden können.

Kriterien verbunden mit dem Ziel des Ansprechens vielseitiger mathematischer Kompetenzen

Die Beurteilung von Kompetenzen der vier Aktivitätsbereiche anhand einer Aufgabe setzt voraus, dass die Aufgabe zu entsprechenden Aktivitäten anregt und diese von den Schülern in geeigneter Quantität umgesetzt werden. Die in den Fallstudien verwendeten Aufgaben wurden so konstruiert, dass sie potenziell Aktivitäten aller vier Aktivitätsbereiche einbeziehen, ohne einseitig Schwerpunkte zu setzen. Die Intention der ausgewogenen Förderung konnte auch umgesetzt werden: Die Schüler führten bei der Bearbeitung der Aufgaben Aktivitäten aller vier Aktivitätsbereiche aus, wenn auch nicht immer im intendierten Verhältnis und in der intendierten Quantität. Insgesamt gelang vor allem die Aktivierung zu heuristisch-experimentellen und formal-operativen Aktivitäten sehr gut, die zu kritisch-argumentativen Aktivitäten noch nicht zufriedenstellend (vgl. 5. 5). Um kritisch-argumentative und darstellend-interpretative Aktivitäten stärker einzubeziehen, wird zum einen die stärkere Einbindung dieser Aktivitäten in den Unterricht und zum anderen deren explizite Forderung in Beurteilungsaufgaben befürwortet. Den Schülern muss besser bewusst gemacht werden, dass Argumentationen und Darstellungen ebenso zu einer mathematischen Problemlösung gehören, wie die schöpferischen und kalkülhaften Tätigkeiten. Dazu sollten diese Aktivitäten immer wieder im Unterricht hervorgehoben werden, durch deren Würdigung, durch deren Demonstration und durch deren selbständige Ausführung. Dies gilt vor allem auch, weil die Schüler der Untersuchungsklassen bezüglich argumentativer Kompetenzen am ehesten noch Förderbedarf haben. Die für die profilierten Klassen erhobenen Ergebnisse können nicht auf andere Klassen der Sekundarstufen übertragen werden. Es ist anzunehmen, dass in Klassen mit geringerem mathematischen Niveau die Umsetzungsquote argumentativer Aktivitäten noch deutlicher von der Umsetzungsquote formal-operativer Aktivitäten abweicht, aber auch dass heuristisch-experimentelle Kompetenzen weniger gut umgesetzt werden als formal-operative.

Komplexität der einbezogenen mathematischen Inhalte

Die Komplexität der einbezogenen Inhalte wird als eine bedeutende Eigenschaft von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen gesehen (vgl. 2.2.2). Zum einen ist die Einschätzung der Komplexität der mathematischen Inhalte wichtig bezüglich der Wertung der Schülerleistungen und sollte auch in die Rückmeldung an die Schüler einfließen. Ob die Anforderungen der Aufgabe bei der Beurteilung der Leistungen berücksichtigt werden sollten, ist dabei eine offene Frage. In dieser Arbeit sind die Beurteilungen der Schülerleistungen nicht vom Anforderungsniveau abhängig. Zum anderen kann das Anforderungsniveau sehr wohl die Umsetzung der Aktivitäten als auch die Schülerleistungen beeinflussen. Bei der Untersuchung der Umsetzung intendierter Aktivitäten wurde die Aufgabe am besten umgesetzt, die mit Anforderungsniveau 2 eine vergleichsweise geringe mathematische Komplexität zeigt. Die Aufgaben mit der geringsten Umsetzungsquote hatten eine hohe mathematische Komplexität. Ein stabiler Zusammenhang konnte jedoch nicht beobachtet werden: Auch Aufgaben mit Anforderungsniveau 3 bzgl. der mathematischen Inhalte wurden gut umgesetzt. Die Untersuchung unterstützt den Einsatz mathematisch komplexer Aufgaben, da sie die Anregung heuristischer Aktivitäten begünstigten. Die angesprochenen mathematischen Konzepte sollten jedoch bei Beurteilungsaufgaben den Schülern vertraut sein.

Komplexität bezüglich spezifischer Aktivitätsbereiche:

Es wurde ein deutlicher Zusammenhang zwischen den Anforderungen bezüglich eines Aktivitätsbereiches und dessen Umsetzung erwartet. Dieser konnte aber in der dazu durchgeführten Fallstudie (Kapitel 5) nicht gezeigt werden. Die Schüler setzten teilweise Aktivitäten mit hohen Anforderungen gut um oder Aktivitäten mit geringeren Anforderungen eher mäßig. Die Studie mit einer kleinen, nicht repräsentativen Untersuchungsgruppe lässt jedoch keine Schlüsse darüber zu, ob ein solcher Zusammenhang besteht. In Klassen mit einem größeren Leistungsgefälle und einem geringeren Leistungsanreiz könnte insbesondere bei Aufgaben, die sich in ihren Anforderungen deutlich unterscheiden, ein solcher Zusammenhang durchaus vorliegen. Da hohe Anforderungen nicht zwingend zu niedrigeren Umsetzungsquoten führen, beeinträchtigen sie nicht von vornherein die Eignung für die differenzierte Beurteilung mathematischer Kompetenzen.

Die Einschätzung der kompetenzspezifischen Anforderungen sind wichtig bezüglich der Reflexion der Beurteilungsergebnisse und für die individuelle Rückmeldung. Auch hier ist offen, ob und wie unterschiedliche Anforderungen in der Beurteilung berücksichtigt werden sollten. Außerdem wäre es interessant, ob systematische Zusammenhänge zwischen kompetenzspezifischen Anforderungen und der Qualität (nicht nur der Quantität) der Umsetzung entsprechender Aktivitäten auftreten.

Das erstellte System zur Auswahl und Beschreibung von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen erwies sich in der Erprobung als sinnvoll. Mit den so ausgewählten Aufgaben gelang es, die Schüler zu vielseitigen mathematischen Aktivitäten anzuregen, die auch zu beurteilbaren Ergebnissen führten. Die Ergebnisse zur Umsetzung dieser Aufgaben (Kapitel 5) können jedoch nicht mit den so aufgenommen Merkmalen der Aufgaben allein erklärt werden. Hier spielen Merkmale des Unterrichts und individuelle Merkmale eine ebenso große Rolle. Insbesondere die von Weinert (2001, 2002) beschriebene Verbindung zwischen kognitiven Kompetenzen und motivationalen Handlungsmustern (vgl. Kapitel 1) hat zur Folge, dass Kompetenzdarlegungen nicht nur von den kognitiven Anforderungen der Aufgabe beeinflusst werden. In Studien zur Umsetzung komplexer Aufgaben empfiehlt es sich deshalb neben den Parametern der Aufgabe durch Unterrichtsbeobachtungen und Lehrerinterviews auch Merkmale des Unterrichts (z. B. Förderung einzelner Aktivitätsbereiche, Vertrautheit mit mathematischen Modellierungen, Vertrautheit mit offenen Fragestellungen, Methodenvielfalt) und durch Schülerinterviews oder Fragebögen Merkmale der Leistungssituation (z. B. Leistungsbereitschaft, Interesse, subjektive Anforderungen) zu erfassen.

## 6.2 Reflexion des Konzeptes der differenzierten Beurteilung und Rückmeldung mathematischer Kompetenzen

In Abschnitt 3.5 wurde geprüft, ob das entwickelte Konzept der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen Kriterien an eine, den aktuellen Zielsetzungen des (Mathematik-)Unterrichts genügende, Leistungsbeurteilung (vgl. 1.5.2) erfüllt. In Bezug auf die Einschätzung von Aufgabenqualität wurde es als wichtig herausgestellt, nicht nur das objektive Potenzial einer Aufgabe einzuschätzen, sondern auch die Umsetzung der Aufgabe zu reflektieren (vgl. 2.1). Dies trifft in übertragener Form auf Leistungsbeurteilung, wie für alle Elemente von Unterricht, zu. An dieser Stelle wird deshalb geprüft, ob die aufgestellten Kriterien an Leistungsbeurteilungen auch in der Umsetzung der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen im Unterrichtsalltag erfüllt werden können. Dabei kommen Erfahrungen zur Sprache, welche sich auf die konkrete Umsetzung des Konzeptes innerhalb der Fallstudien (vgl. Kapitel 4) beziehen, und solche, die das Konzept allgemein (vgl. Kapitel 3) betreffen.

Vielfältige Leistungen werden anerkannt

Ein Ziel der Entwicklung eines Analyseinstrumentes an Aufgaben speziell für das Konzept der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen war es, solche Aufgaben konstruieren und auswählen zu können, die vielseitige mathematische Kompetenzen anregen. Insbesondere sollten die vier Aktivitätsbereiche von Lechner ausgewogen berücksichtigt werden. Die objektive Analyse der eingesetzten Aufgaben stellte zunächst sicher, dass die eingesetzten Aufgaben potenziell diesem Anspruch genügen (vgl. Anhang 1.3 und Anhang 2). Innerhalb des Unterrichts wurden die Anforderungen nicht geändert: Da die Aufgaben als Hausaufgaben bearbeitet wurden entsprachen die objektiven Anforderungen den realisierten Anforderungen. Die Analyse der Schülerarbeiten ergab, dass die Schüler bei der Bearbeitung der Aufgaben bei weitem nicht alle intendierten Aktivitäten ausführten, jedoch alle Aktivitätsbereiche einbezogen (vgl. Kapitel 5). Dabei unterschieden sich die Ergebnisse von Aufgabe zu Aufgabe und von Kompetenzbereich zu Kompetenzbereich. Die zu einzelnen mathematischen Kompetenzen erbrachten Leistungen wurden individuell anerkannt, auch wenn sie nicht intendiert waren. Innerhalb der individuellen

Rückmeldung kann bei einem offenen Analysieren der Schülerarbeiten auf alle erbrachten Leistungen eingegangen werden. Für die Dokumentation der Leistungsentwicklung ist die Zusammenfassung in Kompetenzbereiche dagegen unumgänglich.

Auch die Bearbeitung der Aufgaben als Hausaufgabe trug dazu bei, vielfältige Leistungen hervorzurufen. So konnten die Schüler beispielsweise ihre Kenntnisse im Umgang mit dem Computer einbringen, indem sie Kurven plotteten und analysierten oder Internetrecherchen durchführten.

Der Lernprozess findet Berücksichtigung

Durch die genaue Analyse der Schüleraktivitäten innerhalb des erstellten Systems der Aufgabenanalyse kann im Vorfeld der Aufgabenbearbeitung untersucht werden, ob prozessbezogene Aktivitäten einbezogen werden. Bei einer ausgewogenen Umsetzung der vier Aktivitätsbereiche, wird zwingend auch prozessbezogenen Fähigkeiten Bedeutung gegeben: z. B. logisches Denken innerhalb kritisch-argumentativer Aktivitäten, Finden von Lösungswegen innerhalb heuristisch-experimenteller Aktivitäten. Andere prozessbezogene Fähigkeiten wie Selbstständigkeit, Erkennen und Überwinden von Fehlern werden durch die Anlage der Umsetzung angesprochen. Die aufgabenspezifischen Beurteilungskriterien erlauben auch schwieriger zu beurteilende Kompetenzen kontrolliert und transparent zu quantifizieren. Dies gelang umso besser, je ausführlicher die Schüler ihren Lösungsprozess darstellten. Bei ergebniszentrierten Darstellungen können keine prozessbezogenen Fähigkeiten beurteilt werden. Zwar kann aus dem Ergebnis auf bestimmte notwendige Lösungsschritte geschlossen werden, wie das Herstellen von Zusammenhängen; die Unsicherheit auf Grund der Interpretation ohne dokumentierbare Anhaltspunkte lässt jedoch keine haltbare Beurteilung zu. Deshalb ist es wichtig, die Schüler immer wieder zu nachvollziehbaren Lösungsdarstellungen anzuhalten und in Aufgabenstellungen für Leistungsbeurteilungen noch stärker Eigenproduktionen der Schüler anzuregen.

Das hier entwickelte Konzept der Beurteilung mathematischer Kompetenzen, bzw. die beschriebene Umsetzung, bezieht sich nicht auf alle prozessbezogenen Kompetenzen, insbesondere die Kompetenzen, die auf der Kooperation zwischen Schülern beruhen wurden (bewusst) ausgeschlossen. Hierzu sind andere Formen der Leistungsbeurteilung oder andere Organisationsformen (z. B. Bearbeitung der Aufgaben in Gruppen) notwendig.

Leistungsbeurteilung ist verbunden mit differenzierten, förderungsorientierten Rückmeldungen

Durch das Beschreiben und Rückmelden individueller Stärken und Schwächen der Schüler wird bezweckt, die Entwicklung eines realistischen fachbezogenen Selbstkonzeptes zu unterstützen und Ansatzpunkte für das eigenständige Weiterlernen zu geben. Die Konzeption der Beurteilungsbögen ist, insbesondere durch die eingeschlossenen individuellen verbalen Rückmeldungen, gut geeignet dem Schüler persönliche Hinweise für selbständige Lernbemühungen zu geben. Dies wurde auch von den Schülern erkannt und als Vorteil der erweiterten Beurteilungsmethode herausgestellt (vgl. 4.1.4 und 4.2.6).

Erfolgt die differenzierte Beurteilung der mathematischen Kompetenzen häufig und regelmäßig, kann die dabei vorgenommene Diagnose in den Lernprozess eingebunden werden. Die Rückmeldungen können während des Lernens und Arbeitens vom Lehrer genutzt werden, um die Schüler individuell zu unterstützen und zu fördern, aber vor allem von den Schülern selbst bei der Bearbeitung weiterer Aufgaben (Selbstkontrolle). Aus diesem Grund ist die aufgabenbezogene Rückmeldung der Rückmeldung nach einem längeren Zeitraum vorzuziehen.

Die Rückmeldung der dargelegten Kompetenzen fand in den differenzierten aufgabenbezogenen Beurteilungsbögen zunächst kriteriumsorientiert statt, indem die Leistungen anhand der erarbeiteten kompetenz- und aufgabenspezifischen Beurteilungskriterien quantitativ bewertet wurden. Anschließend wurde die Leistung verbal erläutert, wobei auf individuelle Stärken und Schwächen innerhalb der Arbeit explizit hingewiesen wurde und Ansatzpunkte für das selbständige Lernen formuliert wurden. Die Beschreibung individueller Verbesserungen und Verschlechterungen war innerhalb der aufgabenbezogenen Rückmeldung nur für auffällige Veränderungen möglich, wenn z. B. bei einem Schüler, der sonst kaum argumentiert, dies bei einer Aufgabe gut gelang. Für die Beschreibung und Rückmeldung von Kompetenzentwicklungen ist es notwendig, die Leistungen über einen längeren Zeitraum differenziert zu dokumentieren. Auf Grund der großen Motivationskraft der individuellen Bezugsnorm, die in der Motivationspsychologie beschrieben wird (vgl. z. B. Rheinberg 1980, S. 139) und auch in der ersten Fallstudie (vgl. 4.1) beobachtet werden konnte, wird es für wichtig gehalten, neben den aufgabenspezifischen Rückmeldungen die Leistungsentwicklung aufzuzeigen, was die Schüler auch selbst tun können.

Über einen Einfluss der differenzierten Rückmeldung auf die Lernleistungen der Schüler geben die Untersuchungen dieser Arbeit keine Auskunft. Da Förderung und Rückmeldung zusammenwirken ist es schwierig, Ursachen für Leistungsverbesserungen eindeutig zu benennen. Nach der ersten Rückmeldung in der ersten Fallstudie (vgl. 4.1) konnte beobachtet werden, dass sich einige Schüler gerade in denen bei ihnen als Schwäche deklarierten Kompetenzen deutlich verbesserten. Erfolge bezüglich einer angemessen ausführlichen Darlegung des Lösungsweges werden teilweise einer Sensibilisierung auf die Bedeutung prozessorientierter Kompetenzen durch die differenzierte Beurteilung zugeschrieben. Ebenso bedeutsam sollte jedoch die spezifische Förderung im Unterricht gewesen sein, die auf anspruchsvolle mathematische Kompetenzen, wie Argumentieren und Problemlösen, ausgerichtet war. In der zweiten Fallstudie (vgl. 4.2) konnten derart auffällige Verbesserungen nicht beobachtet werden. Diese Schüler gaben auch an, sich beim selbständigen Lernen wenig an den Rückmeldungen zu orientieren.

Leistungen sind sichtbar und öffentlich

Die Zuordnung der gezeigten Leistungen zu Kompetenzniveaus und die Quantifizierung durch einen Punktwert hat eine Verschlüsselung der Leistungen zur Folge. Die Beurteilungskriterien erlauben jedoch, die quantitative Bewertung verbal zu beschreiben. Die quantitative Bewertung ist vor allem zur Dokumentation der Leistungen vorteilhaft. Die graphische Dokumentation der Leistungen wie sie hier vorgestellt wurde (Kompetenzverteilungen), ermöglicht die bei unterschiedlichen Aufgaben erbachten Leistungen zu vergleichen und ist der Mittelwertbildung vorzuziehen (vgl. 4.1.4). Die Leistungen selbst können gezeigt werden, indem die Aufgabenbearbeitungen, evtl. zusammen mit den Beurteilungen und selbst erstellten Dokumentationen der Kompetenzdarlegungen, in einem Portfolio zusammengestellt werden (vgl. 6.3).

Eine sachliche Kommunikation über Leistungen wird hergestellt

Die Kommunikation über Leistung wurde innerhalb der Fallstudien nicht ausgeschöpft. Da die Entwicklung kompetenzspezifischer Beurteilungskriterien erst durch die Bildungsstandards notwendig wurde und dafür bisher wenige wissenschaftliche Anhaltspunkte vorliegen, sind die hier entwickelten Kriterien ein Versuch, dies konkret und praxisorientiert umzusetzen. Die Schüler wurden deshalb noch nicht in die Entwicklung von Beurteilungskriterien einbezogen. Insgesamt war der Kontakt zu den Schülern gering, um den Unterricht selbst nicht zu beeinflussen. Wie in Abschnitt 3.5 beschrieben, bietet das Konzept vielfältige Anlässe, sich über Leistungen auszutauschen, was jedoch noch nicht entsprechend erprobt wurde. Gut gelungen ist es, den Schülern die unterschiedlichen mathematischen Kompetenzen mit ihren spezifischen Leistungsansprüchen bewusst zu machen. So war beispielsweise in der ersten Fallstudie eindrucksvoll, wie einige Schüler von einer stark ergebnisorientierten Darstellung zu einer ausführlichen Darstellung und Kommentierung des Lösungsweges übergingen, weil sie erkannten, dass viele Kompetenzen nicht allein am Ergebnis abgelesen werden können.

Leistungsbeurteilung unterstützt individuelles Lernen, aber auch das Erreichen gemeinsamer hoher Standards

Die Individualisierung der Beurteilung und der Rückmeldung konnte gut umgesetzt werden. Das wurde bereits durch die Auswahl methodisch offener Aufgabenstellungen unterstützt, die individuelle Schülerwege induzierten und so erzwangen, dass sich der Beurteilende auf den individuellen Weg einstellt.

Eine individuelle Rückmeldung gelang durch das Herausstellen individueller Stärken und Schwächen konkret an der vorliegenden Aufgabenbearbeitung. Es wurde nur auf den individuellen Lösungsweg Bezug genommen, die individuelle Leistung aber am gemeinsamen Standard, den Beurteilungskriterien gemessen. Die Beispiellösung diente dem Beurteilenden lediglich um zu erkennen, welche Kompetenzen zur Bearbeitung der Aufgabe erforderlich sind und welche Kompetenzbereiche eingeschlossen werden. Bei der Beurteilung stellte sich der Auswertende auf den individuellen Lösungsweg ein, nur die Kompetenzen, die dafür nötig waren, wurden bewertet, nicht die objektiv möglichen.

Die kompetenz- und aufgabenspezifischen Beurteilungskriterien sind auf der einen Seite als ein Gewinn des entwickelten Konzeptes zu sehen, da hier Kriterien für schwer quantifizierbare Kompetenzen formuliert werden, was die Beurteilung sowohl transparenter als auch objektiver und sicherer werden lässt. Auf der anderen Seite sind diese Kriterien zwar angelehnt an didaktische Vorstellungen, aber immer noch subjektiv ausgelegt. Von Seiten der Fachdidaktik sind wissenschaftliche Maßstäbe zu entwickeln, die eine kompetenzorientierte kriteriengeleitete Beurteilung unterstützen.

Das hier verwendete Differenzierungssystem bezieht alle Kompetenzbereiche der Bildungsstandards (KMK 2004) und der EPA (KMK 2002) ein. Bei der Umsetzung fand eine ausgewogene Berücksichtigung der vier Aktivitätsbereiche statt, womit zur Umsetzung der Bildungsstandards beigetragen wurde. Somit fand nicht nur eine Orientierung der Aufgaben an gemeinsamen Standards statt, sondern auch die Umsetzung entsprechender Anforderungen durch die Schüler wurde kontrolliert.

## 6.3 Anregungen zur Umsetzung im Unterricht

Die zusammengestellten Kriterien an Leistungsbeurteilungen (vgl. 1.5.2) zeigen auf, wie sich gängige Formen der Leistungsbeurteilungen im Mathematikunterricht ändern müssen, um einen qualitativ hochwertigen Mathematikunterricht zu unterstützen. Gleichzeitig lässt es die Belastung von Lehrern nicht zu, Leistungsbeurteilungen noch zeitaufwendiger zu gestalten. Die Lehrer, mit denen in Zusammenhang mit den unterrichtlichen Erprobungen gesprochen werden konnte, äußerten ihre Zustimmung bezüglich der Sinnhaftigkeit einer differenzierten und individuellen Rückmeldung, zugleich aber auch ihre Skepsis bezüglich der Umsetzbarkeit des Konzeptes auf Grund des Zeitaufwandes. Die Lehrer gaben an, derzeit die Arbeiten ihrer Schüler so weit es geht mit Kommentaren zur Lösung zu versehen, um Besonderheiten der Lösung erkenntlich zu machen, ihre Bewertung zu kommentieren und wenn möglich auch Anhaltspunkte zum Weiterlernen zu geben. Differenzierte Rückmeldungen darüber hinaus sind ihnen aus Zeitgründen nicht möglich. An dieser Stelle werden zwei Möglichkeiten aufgezeigt, in systematischer Form differenziert zu beurteilen, die in den Unterricht eingeordnet werden können und begrenzt zusätzlichen Zeitaufwand erfordern. Von Seiten der Bildungspolitik sollten Freiräume geschaffen werden, welche die Umsetzung neuer Formen der Leistungsbeurteilung ermöglichen, da kompetenzorientierte Leistungsbeurteilungen immer mit einem überdurchschnittlichen Zeitaufwand verbunden sind (vgl. Althoff 2001, S. 51).

*Differenzierende Beurteilungen bei üblichen Leistungserhebungen*

Ohne zusätzliche Beurteilungsanlässe zu schaffen, kann die differenzierte Beurteilung mathematischer Kompetenzen für die ohnehin durchzuführenden Leistungstests und Klausuren/Klassenarbeiten erfolgen. Vorraussetzung ist dabei, dass bei der Auswahl und Konstruktion der Aufgaben die Kriterien an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen Beachtung finden. Ein zeitlicher Mehraufwand ergibt sich vor allem durch die Erarbeitung kompetenzspezifischer Beurteilungskriterien. Dabei erscheint es sinnvoll aufgabenunabhängige kompetenzspezifische Beurteilungskriterien im Kollegium zu erarbeiten, was neben der größeren Effektivität den weiteren Vorteil der Diskussion über Leistungserwartungen und der Einigung auf gemeinsame Standards hat. Diese können dann vom beurteilenden Lehrer auf die jeweilige Aufgabe übertragen und zur Unterstützung einer objektiven Beurteilung konkretisiert werden. Die Erarbeitung kompetenzspezifischer Kriterien für unterschiedliche Altersgruppen von Seiten der Fachdidaktik, auch als Beitrag zur Umsetzung der Bildungsstandards, kann hier die Arbeit des Fachlehrers oder der Lehrergruppe deutlich unterstützen. Der Vergleich der Leistungen mit den Beurteilungskriterien und die differenzierte Rückmeldung in Form von Beurteilungsbögen entspricht einem vergleichsweise geringen zeitlichen Mehraufwand, wenn beachtet wird, das kompetenzorientierte Leistungsbeurteilung immer das verständige Nachvollziehen der individuellen Herangehensweise, das Prüfen individueller Argumentationen, Ansätze, Rechnungen mit sich bringt, was viele Lehrer tagtäglich mit viel Zeitaufwand bereits tun.

Der Nachteil dieser Organisationsform ist, dass es sich unverkennbar um eine Leistungssituation handelt und dem individuellen Problemlösen insofern Grenzen gesetzt sind, dass der zeitliche Rahmen, die Hilfsmittel und Ähnliches nicht individualisiert werden können.

*Differenzierende Beurteilungen anhand exemplarischer Aufgaben und Dokumentation im Portfolio*

Bei der schulpraktischen Erprobung des Konzeptes der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen innerhalb dieser Arbeit erfolgte die Beurteilung der Kompetenzen nicht in den üblichen Leistungsbeurteilungen, sondern für die Bearbeitung ausgewählter Aufgaben zu Hause. Innerhalb dieser Aufgabenbearbeitungen zeigen die Schüler gleichzeitig ihre Kenntnisse zu wichtigen unterrichtlichen Inhalten und legen inhaltsbezogen bereits erworbene mathematische Kompetenzen dar, können ihre Kenntnisse und Kompetenzen aber auch vertiefen und erweitern. Die Aufgaben können der Vertiefung, der Anwendung und dem Transfer unterrichtlicher Inhalte aber auch der Vorbereitung neuer Themen dienen. Diese Organisationsform erhält eine besondere Bedeutung durch den Einzug der Portfolioidee in den Mathematikunterricht (vgl. 1.5.3). Die Schüler können die Bearbeitungen dieser Aufgaben bzw. eine von ihnen vorgenommene Auswahl dieser Arbeiten in einem Portfolio sammeln bzw. den anderen Arbeiten ihres Portfolios hinzufügen. Eine selbstgeführte Dokumentation ihrer Leistungen, ähnlich den in Kapitel 4 vorgestellten Dokumentationsformen sowie eine selbstkritische Reflexion bereits erworbener Kompetenzen kann die Mappe ergänzen. Die kompetenzspezifischen Beurteilungskriterien, deren Kommentierung durch den Schüler und die Beurteilungen des Lehrers dienen der Einordnung der Leistungen. Dieses Konzept hat mehrere Vorteile: Die Dokumentation der Leistungen nimmt der Schüler vor, wodurch sich der zeitliche Aufwand für den Lehrer verringert. Gleichzeitig lernt der Schüler seine Leistungen selbst zu vergleichen und sich die Entwicklung seiner Kompetenzen zu verdeutlichen. Er übernimmt die Verantwortung über seine Leistungsentwicklung, kann sich selbst oder in Zusammenarbeit mit dem Lehrer Ziele und Ansatzpunkte für das selbständige Lernen ableiten. Die Differenzierung in einzelne Kompetenzen und Kompetenzbereiche wird vor allem für das selbständige Lernen für wichtig gehalten, da auch die Schüler, nicht nur der Lehrer, oft einseitige Schwerpunkte in ihren Anstrengungen setzen. Auch ihnen ist die gesamte Bandbreite der Lernziele des Mathematikunterrichts zu verdeutlichen, durch Aufgaben in denen entsprechende Kompetenzen wichtig sind und durch die Diskussion gemeinsamer Standards. Eine solche komplexe Dokumentation von Leistungen kommt ohne Zweifel einer Klausur oder Klassenarbeit gleich, weshalb die Möglichkeit eine solche durch ein Portfolio ersetzen zu können, einer Anerkennung der Leistungen und des Aufwandes von Lehrern und Schülern entspräche. Neben der Überarbeitung schulgesetzlicher Richtlinien, wird die Erarbeitung und Erprobung von Konzepten, welche die Portfolioidee und die differenzierte Beurteilung verbinden, in fachdidaktischen Studien für lohnenswert gehalten.

Neben diesen beiden naheliegenden Varianten der Umsetzung der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen sollte diese auch für Facharbeiten geeignet sein, welche immer mehr als Möglichkeit der Beurteilung komplexer Schülerleistungen in der gymnasialen Oberstufe gesehen werden. Der Umfang und die Komplexität der dabei gezeigten Leistungen bedingt gerade eine differenzierte Beurteilung. Die in dieser Arbeit vorgestellte Differenzierung in vier Aktivitätsbereiche wäre dabei eine Möglichkeit, die fachlichen Leistungen differenziert zu beurteilen. Diese müssten von Kriterien ergänzt werden, welche sich auf methodische und persönliche Kompetenzen, die bei Facharbeiten ebenfalls eine große Rolle spielen, beziehen.

# Literaturverzeichnis

Aebli, H. (1981): Denken: das Ordnen des Tuns. Band II: Denkprozesse. Stuttgart: Klett.

Althoff, H. (2001): Prüfungsaufgaben – Analysieren, Interpretieren und Argumentieren. Ziele, Beispiele und Erfahrungen. In: mathematik lehren, Heft 107, S. 47-51.

Ambrus, A./Schulz, W. (2001): Offene Aufgaben beim Arbeiten mit Funktionen in der Sekundarstufe I. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 69-72.

Ambrus, A./Schulz, W. (2002): Aufgabenumkehrung – eine Fundgrube für offene Aufgaben. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 71-74.

Anderson, L. W./Krathwohl, D. R./Airasian, P. W./Cruikshank, K. A./Mayer, R. E./Pintrich, P. R. (Hrsg.)(2001): A Taxonomy for Learning, Teaching and Assessing: A Revision of Bloom´s Taxonomy of Educational Objectives. New York: Longman.

Arnold, K.-H. (2002): Qualitätskriterien für die standardisierte Messung von Schulleistungen. Kann eine (vergleichende) Messung von Schulleistungen objektiv, repräsentativ und fair sein? In Weinert, F. E. (Hrsg.): Leistungsmessungen in Schulen. Weinheim, Basel: Beltz, S. 117-130.

Arnold, K.-H./Jürgens, E. (2001): Schülerbeurteilung ohne Zensuren. Neuwied, Kriftel: Luchterhand.

Arnold, K.-H./Froberg, A./Schmaeck, J./Schröder-Begoihn, Ä./Schubert, S. (2000): Integrierte Leistungsbeurteilung in der Orientierungsstufe und Sekundarstufe I (Abschlussbericht des Schulbegleitforschungsprojekts 871). Bremen: Senator für Bildung und Wissenschaft.

Arvold, B. (2001): Prozessorientierte Leistungsbewertung. In: mathematik lehren, Heft 107, S. 19-22, übersetzt von Weigand, H.-G.

Bartnitzky, H. (1989): Sechs Fragen zum Umgang mit Zensuren. In: Bartnitzky, H. (Hrsg.): Umgang mit Zensuren in allen Fächern. Frankfurt am Main: Cornelsen, S. 9-14.

Bastain, J. (1996): Leistung im Projektunterricht. Widersprüche verändern die Praxis. In: Friedrich Jahresheft XIV, S. 18-19.

Baumert, J./Lehmann, R. (1997): TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde. Opladen: Leske und Budrich.

Baumert, J./Bos, W./Lehmann, R. (Hrsg.) (2000): TIMSS/III: Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie – Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn. Band 2: Mathematische und physikalische Kompetenzen am Ende der gymnasialen Oberstufe. Opladen: Leske und Budrich.

Baumert, J./Klieme, E./Neubrand, M./Prenzel, M./Schiefele, U./Schneider, W./Stanat, P./ Tillmann, K.-J./Weiß, M. (Deutsches PISA-Konsortium)(Hrsg.)(2001):PISA 2000 – Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske und Budrich.

Baxter, G. P./Shavelson, R. S./Herman, S. J./Brown, K. A./Valadez, J. R. (1993): Mathematics performance assessment: technical quality and diverse student impact. In: Journal of Research in Mathematics Education, Vol. 24, Nr. 3, S. 190-216.

Beck, C./Maier, H. (1994): Mathematikdidaktik als Textwissenschaft. In: Journal für Mathematikdidaktik, Jg. 15, Heft 1/2, S. 35-78.

Beckmann, J. (1999): Persönlichkeit, Motivation und Leistung: Die Wechselwirkung von Persönlichkeitseigenschaften und Aufgabenmerkmalen bei der Erbringung von Leistung unter belastenden Bedingungen. In: Jerusalem, M./Pekrun, R. (Hrsg.): Emotion, Motivation und Leistung. Bern, Toronto, Seattle: Hogrefe, S. 169-182.

Bloom, B. S. (1976): Taxonomie von Lernzielen im kognitiven Bereich. Weinheim und Basel: Beltz.

Blömeke, S./Risse, J./Müller, C./Eichler, D./Schulz, W. (2006): Analyse der Qualität von Aufgaben aus didaktischer und fachlicher Sicht. In: Unterrichtswissenschaft, Jg. 34, Heft 4, S. 330-357.

Blum, W. (2006): Einführung (in Teil 1: Die Bildungsstandards Mathematik). In: Blum, W./Drüke-Noe, C./Hartung, R./Köller, O. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Berlin: Cornelsen, S. 14-32.

Blum, W./Drüke-Noe, C./Leiß, D./Wiegand, B./Jordan, A. (2005): Zur Rolle von Bildungsstandards für die Qualität im Mathematikunterricht. In: ZDM, Vol. 37, Heft 4, S. 267-274.

Blum, W./Wiegand, B. (2000): Offene Aufgaben – wie und wozu? In: mathematik lehren, Heft 100, S. 52-55.

Bohl, T. (2001): Theoretische Strukturierung – Begründung neuer Beurteilungsformen. In: Grunder, H.-U./Bohl, T. (Hrsg.): Neue Formen der Leistungsbeurteilung in den Sekundarstufen I und II. Hohengehren: Schneider, S. 9-50.

Böhm, A. (2003): Theoretisches Codieren: Textanalyse in der Grounded Theory. In: Flick, U./von Kardorff, E./Steinke, I. (Hrsg.): Qualitative Forschung. Ein Handbuch. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.

Borromeo Ferri, R. (2004): Vom Realmodell zum mathematischen Modell – Analyse von Übersetzungsprozessen aus der Perspektive mathematischer Denkstile. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 109-112.

Bromme, R./Seeger, F./Steinbring, H. (1990): Aufgaben, Fehler, Aufgabensysteme. In: Bromme, R./Seeger, F./Steinbring, H. (Hrsg.): Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler. Köln: Aulis, S. 1-30.

Bruder, R. (1988): Grundfragen mathematikmethodischer Theoriebildung unter besonderer Berücksichtigung des Arbeitens mit Aufgaben. Dissertation B an der Pädagogischen Hochschule Potsdam.

Bruder, R. (2000): Akzentuierte Aufgaben und heuristische Erfahrungen – Wege zu einem anspruchsvollen Mathematikunterricht für alle. In: Flade, L./Herget, W. (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen nach TIMSS. Berlin: Volk und Wissen, S. 69-78.

Bruder, R./Weigand, H.-G. (2001): Leistungen bewerten – natürlich! Aber wie? In: mathematik lehren, Heft 107, S. 4-8.

Bruder, R. (2006): Langfristiger Kompetenzaufbau. In: Blum, W./Drüke-Noe, C./Hartung, R./Köller, O. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Berlin: Cornelsen, S. 135-147.

Büchter, A./Leuders, T. (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistungen überprüfen. Berlin: Cornelsen.

Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung (BLK) (1997): Expertise „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“. Bonn, http://www.ipn.uni-kiel.de/projekte/blk_prog/gutacht/index.htm (Stand: 22.05.2007).

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur Österreich (bmbwk) (2004): Lehrplan der AHS-Oberstufe. Mathematik.

http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs_lehrplaene_oberstufe.xml (Stand: 22.05.2007).

Bürger, H. (1981): Realisierung allgemeiner Lernziele des Mathematikunterrichts. In: Journal für Mathematikdidaktik, Heft 4, S. 283-320.

Bürger, H. (2000): Argumentieren im Mathematikunterricht. In: Flade, L./Herget, W. (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen nach TIMSS: Anregungen für die Sekundarstufen. Berlin: Volk und Wissen.

Burkhard, C./Peek, R. (2004): Anforderungen an zentrale Lernstandserhebungen. In: Pädagogik, Jg. 56, Heft 6, S. 24-27.

Christiansen, B./Walther, G. (1986): Task and activity. In: Christiansen, B./Howson, A. G./ Otte, M. (Hrsg.): Perspectives on mathematics education. Dodrecht, Boston, Lancaster, Tokyo: Reidel, S. 243-307.

Courant, R. (1974): Die Mathematik in der modernen Welt. In: Otte, M. (Hrsg.): Mathematiker über die Mathematik. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, S. 181-202.

Devlin, K.(2002): Muster der Mathematik. Heidelberg, Berlin: Spektrum.

Devlin, K. (2006): Das Mathe-Gen. München: Deutscher Taschenbuch Verlag.

Dockhorn, C. (2000): Schulbuchaufgaben öffnen. In: mathematik lehren, Heft 100, S. 58-59.

Dörner, D. (1987): Problemlösen als Informationsverarbeitung. Stuttgart, Berlin, Köln, Mainz: Kohlhammer.

Dreyfus, T. (2002): Was gilt im Mathematikunterricht als Beweis? In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 15-22.

Drüke-Noe, C. (2006): Projektorientierung. In: Blum, W./Drüke-Noe, C./Hartung, R./Köller, O. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Berlin: Cornelsen, S. 126-134.

Eikenbusch, G./Lagergren, T. (2004): Keine Elchtests für die Schule ... . Erfahrungen mit Tests und zentralen Prüfungen in Schweden. In: Pädagogik, Jg. 56, Heft 6, S. 28-30.

Emer, W./Horst U. (2002): Wie wir gearbeitet und was wir erreicht haben – Projektarbeit reflektieren und zertifizieren. In: Winter, F./Groeben, A. v. d. /Lenzen, K.-D. (Hrsg.): Leistung sehen, fördern, werten. Neue Wege für die Schule. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt, S. 195-201.

Engstler, K. (2002): Versuche mit anderen Bewertungsformen – Pensenbuch und Portfolio. In: Winter, F./Groeben, A. v. d. /Lenzen, K.-D. (Hrsg.): Leistung sehen, fördern, werten. Neue Wege für die Schule. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt, S. 158-164.

Fischer, R./Malle, G. (1985): Mensch und Mathematik. Mannheim, Wien, Zürich: BI.

Flick, U. (2000): Qualitative Forschung. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.

Flick, U./von Kardorff, E./Steinke, I (2003): Was ist qualitative Forschung? – Einleitung und Überblick. In Flick, U./von Kardorff, E./Steinke, I. (Hrsg.): Qualitative Forschung. Ein Handbuch. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt, S. 13-29.

Fröhlich, I./Smolinski, B./Stern, T. (2006): Leistungen fair bewerten – Lernen individuell unterstützen. In: Praxis der Mathematik in der Schule, Jg. 48, Heft 10. S. 1-8.

Gallin, P./Hußmann, S. (2006): Dialogischer Unterricht – aus der Praxis in die Praxis. In: Praxis der Mathematik in der Schule, Jg. 48, Heft 7, S. 1-6.

Gallin, P./Ruf, U. (1990): Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz. Zürich: LCH.

Glaserfeld, E. v. (1999): Konstruktivismus und Unterricht. In: Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, Jg. 2, Heft 4, S. 499-506.

Goldberg, E. (1992): Beweisen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe 1. Ergebnisse – Schwierigkeiten – Möglichkeiten. In: Der Mathematikunterricht, Jg. 38, Heft 6, S. 33-46.

Goldberg, E. (2002): Streitend das Begründen lernen. In: mathematik lehren, Heft 110, S. 9-11.

Grunder, H.-U./Bohl, T. (2001): Neue Formen der Leistungsbeurteilung in den Sekundarstufen I und II. Hohengehren: Schneider.

Grunder, H.-U./Bohl, T./Broszat, K. (2001): Neue Lernformen – neue Beurteilungsformen?! Acht Handlungsschritte zur Durchführung einer schülerorientierten und kriterienbezogenen Leistungsbewertung. In: Pädagogik, Heft 11, S. 45-48.

Grass, B. (1996): Das Gute achten. Bewertung frei gestalteter Arbeitsprodukte. In: Friedrich Jahresheft XIV, S. 18-19.

Gubler-Beck, A. (2005): Portfolios im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 231-234.

Hackenbroch-Krafft, I./Jung-Paarmann, H./Schwarz, H.-H./Stockey, A./Vohmann, D. (2002): Facharbeiten – besondere Leistungen vorbereiten, anleiten und bewerten. In: Winter, F./Groeben, A. v. d. /Lenzen, K.-D. (Hrsg.): Leistung sehen, fördern, werten. Neue Wege für die Schule. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt, S. 147-157.

Häcker, T. (2007): Portfolio: Ein Entwicklungsinstrument für selbstbestimmtes Lernen. Hohengehren: Schneider.

Hanisch, G. (1985): Beweisen im Mathematikunterricht. Der Unterschied zwischen Logik und Psychologik. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, S. 138-141.

Harvard Group (1995): Assessing Mathematical Understanding an Skills effectively. An Interim Report of the Harvard Group Balanced Assessment in Mathematics Project. Educational Technology Center, Harvard Graduate School of Education. http://balancedassessment.concord.org/amuse.html (Stand 06.07.2007).

Hefendehl-Hebeker, L. (1999): Elemente einer veränderten Kultur des Mathematikunterrichts. In: Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Würtemberg (Hrsg.): Weiterentwicklung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts, S. 33-46.

Hefendehl-Hebeker, L. (2003): Erkenntnisgewinn in der Mathematik. In: Leuders, T. (Hrsg.): Mathematikdidaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen, S. 107-118.

Henningsen, A./Stein, M. K. (1997): Mathematical task and student cognition: classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. In: Journal for research in mathematics education, Vol. 28, Nr. 5, S. 524-549.

Herget, W. (1996): Die etwas andere Mathe-Aufgabe. Der Lösungsvielfalt gerecht werden. Friedrich-Jahresheft XIV, S. 53-55.

Herget, W. (2000): Rechnen können reicht ... eben nicht! In: mathematik lehren, Heft 100, S. 4-10.

Heske, H. (2002): Methodische Überlegungen zum Umgang mit Beweisen. In: mathematik lehren, Heft 110, S. 52-54.

Heymann, H. W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim und Basel: Beltz.

Heymann, H. W. (2004): Besserer Unterricht durch Sicherung von „Standards“? In: Pädagogik, Jg. 56, Heft 6, S. 6-9.

Humenberger, J./Reichel, H. C. (1995): Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: BI.

Hußmann, S./Selter, C. (2007): Standortbestimmungen. In Praxis der Mathematik in der Schule, Jg. 49, Heft 15, S. 9-13.

Hußmann, S./Leuders, T./Prediger, S. (2007): Schülerleistungen verstehen – Diagnose im Alltag. In Praxis der Mathematik in der Schule, Jg. 49, Heft 15, S. 1-8.

Ingenkamp, K. (1997): Lehrbuch der Pädagogischen Diagnostik. Weinheim, Basel: Beltz.

Jahnke, H. N. (1984): Anschauung und Begründung im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 32-41.

Jahnke, T. (2002): Optimal (und) begründet. Beweisen im Mathematikunterricht: Eine begründende Unterrichtseinheit zur Einführung in die Analysis. In: mathematik lehren, Heft 110, S. 60-64.

Jahnke, T. (2005): Zur Authentizität von Mathematikaufgaben. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Jerusalem, M./Mittag, W. (1999): Selbstwirksamkeit, Bezugsnormen, Leistung und Wohlbefinden in der Schule. In: Jerusalem, M./Pekrun, R. (Hrsg.): Emotion, Motivation und Leistung. Bern, Toronto, Seattle: Hogrefe, S. 223-246.

Kaiser, G. (1999): Zum Problem der Leistungsmessung. In: Grüning, B./Kaiser, G./Kreitz, R./Rauschenberger, H./Rinninsland, K. (Hrsg.): Leistung und Kontrolle. Weinheim, München: Juventa, S. 101-116.

Käpnick, F. (1998): Richtig oder falsch? Probleme bei Leistungsbewertungen im Mathematikunterricht. In: Grundschulunterricht, Heft 11, S. 25-27.

Kelle, U./Erzberger, C. (2003): Qualitative und Quantitative Methoden: kein Gegensatz. In: Flick, U./von Kardorff, E./Steinke, I. (Hrsg.): Qualitative Forschung. Ein Handbuch. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt, S. 299-308.

Klauer, K. J. (2002): Wie misst man Schulleistungen? In: Weinert, F. E. (Hrsg.): Leistungsmessungen in Schulen. Weinheim, Basel: Beltz, S. 103-116.

Klieme, E./Schümer, G./Knoll, S. (2001): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I: „Aufgabenkultur“ und Unterrichtsgestaltung. In Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) (Hrsg.): TIMSS – Impulse für Schule und Unterricht. Bonn, S. 43-57.

Klieme, E. (2004): Was sind Kompetenzen und wie lassen sie sich messen? In: Pädagogik, Jg. 56, Heft 6, S. 10-13.

Klieme, E./Avenarius, H./Blum, W./Döbrich, P./Gruber, H./Prenzel, M./Reiss, K./Riquarts, K./Rost, J./Tenorth, H.-E./Vollmer, H. J. (2003): Expertise zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Bonn: BMBF.

Klieme, E./Neubrand, M/Lüdtke, O. (2001): Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In: Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.): PISA 2000 – Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske und Budrich, S. 140-186.

Klieme, E./Leutner, D. (2006): Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen. Überarbeitete Fassung des Antrags an die DFG auf Einrichtung eines Schwerpunktprogramms, http://www.kompetenzdiagnostik.de (Stand 22.05.2007).

Knoll, S (1998): Anforderungsgestaltung im Mathematikunterricht. In: mathematik lehren, Heft 90, S. 47-51.

Köller, O. (2007): Leistungsmessung und Unterrichtsentwicklung in Deutschland auf der Basis länderübergreifender Bildungsstandards. Vortrag auf der gemeinsamen Jahrestagung der DMV und GDM 2007 in Berlin.
(Informationen zu standardbasierten Leistungsvergleichen: http://www.iqb.hu-berlin.de)

Lange, G. (2002): Die Laufrichtung ändern – lektorieren statt korrigieren. In: Winter, F./ von der Groeben, A./Lenzen K.-D. (Hrsg.): Leistung sehen, fördern, werten. Neue Wege für die Schule. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt, S. 127-134.

Lechner, J. (2002): Neue Perspektiven im Mathematikunterricht durch den Einsatz von Computeralgebrasystemen. Dissertation an der Universität Wien.
(Eine Beschreibung der vier Aktivitätsbereiche erfolgt auch unter J. Lechner: Grundwissen, Grundvorstellungen, Grundtätigkeiten. http://www.acdca.ac.at/projekt3/downl.htm, (Stand 22.05.2007).

Leont´ev, A. N. (1975): Tätigkeit, Bewusstsein, Persönlichkeit. Stuttgart: Klett.

Leontjew, A. (1982): Tätigkeit, Bewusstsein, Persönlichkeit. Berlin: Volk und Wissen.

Leuders, T. (2001): Qualität im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen.

Leuders, T. (2003): Mathematikunterricht. In: Leuders, T. (Hrsg.): Mathematikdidaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen, S. 9-58.

Leuders, T. (2003b): Mathematikunterricht auswerten. In: Leuders, T. (Hrsg.): Mathematikdidaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen, S. 300-322.

Leuders, T. (2004): Selbständiges Lernen und Leistungsbewertung. In: Der Mathematikunterricht, Jg. 50, Heft 3, S. 63-79.

Leuders, T. (2006): „Erläutere an einem Beispiel ... ." Mathematische Kompetenzen erkennen und fördern – mit offenen Augen. In: Friedrich Jahresheft XXIV, S. 78-83.

Lindemann, H. (1999): Die Behinderung liegt im Auge des Betrachters: konstruktivistisches Denken für die pädagogische Praxis. Neuwied, Kriftel: Luchterhand.

Lompscher, J. (1972): Unterrichtliche Bedingungen zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten. In: Lompscher, J. (Hrsg.): Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten. Berlin: Volk und Wissen, S. 73-128.

Lompscher, J. (1989): Aktuelle Probleme der pädagogisch-psychologischen Analyse der Lerntätigkeit. In: Lompscher, J. (Hrsg.): Psychologische Analysen der Lerntätigkeit. Berlin: Volk und Wissen, S. 21-38.

Malle, G. (2002) Begründen. Eine vernachlässigte Tätigkeit im Mathematikunterricht. In: mathematik lehren, Heft 110, S. 4-8.

McCray, B./Stacey, K.: Testing problem solving in a high-stakes environment. In: Pehkonen, E. (Hrsg.): Use of open-ended problems in mathematics classroom. Research Report 176, Department of Teacher Education, University of Helsinki, S. 34-48.

Meinefeld, W. (2003): Hypothesen und Vorwissen in der qualitativen Sozialforschung. In Flick, U./Kardorff, E. v./Steinke, I. (Hrsg.): Qualitative Forschung. Ein Handbuch. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt , S. 264-275.

Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur Mecklenburg-Vorpommern (2002): Rahmenplan Mathematik. Gymnasium, integrierte Gesamtschule. Jahrgangsstufen 7-10 (Erprobungsfassung).

National Council for Teacher of Mathematics (NCTM)(1995): Assessment Standards for School Mathematics. http://standards.nctm.org.

Neubrand, J. (2002): Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Neubrand, M./Klieme, E./Lüdke, O./Neubrand, J. (2002): Kompetenzstufen und Schwierigkeitsmodelle für den PISA-Test zur mathematischen Grundbildung. In: Unterrichtswissenschaft, Jg. 30, Heft 1, S. 100-119.

OECD (2003): The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and problem Solving Knowledge and Skills. Paris: OECD Publication Service, http://www.pisa.oecd.org (Stand 24.04.2007).

Padberg, F. (1996): Aus Fehlern lernen. In: Friedrich Jahresheft XIV, S. 56-59.

Paradies, L./Wester, F./Greving, J. (2005): Leistungsmessung und -bewertung. Berlin: Cornelsen.

Perlich, A. (2006): Bewertung offener Aufgaben. In: Praxis der Mathematik in der Schule, Jg. 48, Heft 10. S. 27-30.

Prengel, A. (2006): Jedes Kind ist auf seiner Stufe kompetent. Prinzipien pädagogischer Lernprozessanalyse. In: Friedrich Jahresheft XXIV. S. 26-28.

Rathgeber, C. (2006): Fehler im Unterricht – aus Fehlern lernen. Rückmeldungen, Erörterungen und Erkundungen zu Klausurbewertungen. In: Praxis der Mathematik in der Schule, Jg. 48, Heft 10, S. 20-26.

Rauschenberger, H. (1999): Umgang mit Schulzensuren. In: Grüning, B./Kaiser, G./Kreitz, R./Rauschenberger, H./Rinninsland, K. (Hrsg.): Leistung und Kontrolle. Weinheim, München: Juventa, S. 11-100.

Reiff, R. (2006): Selbst- und Partnerdiagnose im Mathematikunterricht. In: Friedrich Jahresheft XXIV, S. 68-72.

Reiss, K. (2002): Beweisen, Begründen und Argumentieren. Wege zu einem diskursiven Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, S. 39-46.

Renkl, A./Helmke, A. (1992): Discriminant Effects of Performance-Oriented and Structure-oriented Mathematics Task on Achievement Growth. In: Contemporary educational Psychology 17, S. 47-55.

Renkl, A. (1991): Die Bedeutung der Aufgaben- und Rückmeldungsgestaltung für die Leistungsentwicklung im Fach Mathematik. Inauguraldissertation an der Universität Heidelberg.

Resnick, L. B. (1976): Task analysis in instructional design: Some cases from mathematics. In: Klahr, D. (Hrsg.): Cognition and instruction. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum, S. 51-80.

Rheinberg, F. (1980): Leistungsbewertung und Motivation. Göttingen, Toronto, Zürich: Hogrefe.

Rheinberg, F. (1999): Motivation und Emotion im Lernprozeß: Aktuelle Befunde und Forschungsperspektiven. In: Jerusalem, M./Pekrun, R. (Hrsg.): Emotion, Motivation und Leistung. Bern, Toronto, Seattle: Hogrefe, S. 189-204.

Rheinberg, F. (2002): Bezugsnormen und schulische Leistungsbeurteilung. In Weinert, F. E. (Hrsg.): Leistungsmessungen in Schulen. Weinheim, Basel: Beltz, S. 59-72.

Risse, J. (2006): Stärken (und Schwächen) bewusst machen – mathematische Kompetenzen differenziert rückmelden. In: Praxis der Mathematik in der Schule, Jg. 48, Heft 10, S. 9-13.

Risse, J. (2006b): Aufgaben zur Illustration der KMK-Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss. Berlin: Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport.

Rubinstein, S. L. (1969): Prinzipien und Wege der Entwicklung der Psychologie. Berlin: Akademie-Verlag.

Ruf, U./Ruf-Bräker, R. (2002): Von Ort zu Ort - Dialogisches Lernen durch fachliche Herausforderungen und durch Austausch mit anderen. In: Winter, F./Groeben, A. v. d./ Lenzen, K.-D. (Hrsg.): Leistung sehen, fördern, werten. Neue Wege für die Schule. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt, S. 67-90.

Ruf, U./Winter, F. (2006): Qualitäten finden. Der Blick auf die Defizite hilft nicht weiter. In: Friedrichjahresheft XXIV, S. 56-59.

Rustemeyer, D. (1999): Stichwort: Konstruktivismus in der Erziehungswissenschaft. In: Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, Jg. 2, Heft 4, S. 467-482.

Sacher, W. (2001): Leistungen entwickeln, überprüfen und beurteilen: Grundlagen, Hilfen und Denkanstöße für alle Schularten. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt.

Sacher, W. (2002): Die Notengebung ist unzureichend. In: Winter, F./Groeben, A. v. d./ Lenzen, K.-D. (Hrsg.): Leistung sehen, fördern, werten. Neue Wege für die Schule. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt, S. 20-27.

Saint-George, G.. von (2003): Eigenverantwortliche Lernorganisation. In: Leuders, T.: Mathematikdidaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen, S. 288-291.

Saldern, M. v. (1999): Schulleistung in Diskussion. Hohengehren: Schneider.

Scheibe, I.-P. (1989): Entwicklung kognitiver Lernmotive. In: Lompscher, J. (Hrsg.): Psychologische Analysen der Lerntätigkeit. Berlin: Volk und Wissen, S. 182-230.

Schipper, W. (1998): Prozessorientierte Leistungsbewertung im Mathematikunterricht. In: Grundschulunterricht, Heft 11, S. 21-24.

Schrader, F.-W. (1998): Diagnostische Kompetenz von Lehrern und Schülern. In: Rost, D. H. (Hrsg.): Handwörterbuch der Pädagogischen Psychologie. Weinheim, Basel: Beltz, S. 68-71.

Schrader, F.-W./Helmke, A. (2002): Alltägliche Leistungsbeurteilung durch Lehrer. In Weinert, F. E. (Hrsg.): Leistungsmessungen in Schulen. Weinheim, Basel: Beltz, S. 45-58.

Schulz, W. (2000): Innermathematisches Problemlösen mithilfe offener Aufgaben. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 567-570.

Schümer, G. (1997): Mathematics Education in Japan, the United States and Germany. In: Buer, J. van/Lehmann, R./Venter, G./Peek, R./Seeber, S. (Hrsg.): Erweiterte Autonomie für Schule. Qualität für Schule und Unterricht. Studien zur Wirtschaft- und Erwachsenenpädagogik aus der Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, Nyiregyhàza, S. 57-76.

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK) (2002): Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 1.12.1989, i. d. F. vom 24.05.2002). http://www.kmk.org/schul/home1.htm (Stand vom 22.05.2007).

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK) (2003): Entwicklung und Implementation von Bildungsstandards. Bonn.

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK) (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10). München, Neuwied: Wolters Kluwer, www.kmk.org (Stand vom 24.04.2007).

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK) (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für Hauptschulabschluss (Jahrgangsstufe 9). München, Neuwied: Wolters Kluwer, www.kmk.org (Stand vom 24.04.2007).

Siewert, J. (2004): Steigert Leistungsvergleich die Unterrichtsqualität? In: Erfahrungen mit vergleichenden Arbeiten in Mathematik. In: Pädagogik, Jg. 56, Heft 6, S. 19-22.

Sikora, C. (2007): Leistungserhebungen und didaktische Forschung. In: Sill, H.-D./Sikora, C.: Leistungserhebungen im Mathematikunterricht. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 143-199.

Sill, H.-D. (2007): Merkmale und Funktionen von Leistungserhebungen. In: Sill, H.-D./Sikora, C. (2007): Leistungserhebungen im Mathematikunterricht. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 48-142.

Sjuts, J. (2006): Unterrichtliche Gestaltung und Nutzung kompetenzorientierter Aufgaben in diagnostischer Hinsicht. In: Blum, W./Drüke-Noe, C./Hartung, R./Köller, O. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Berlin: Cornelsen, S. 96-112.

Spinner, K. H. (1994): Neue und alte Bilder von Lernenden. Deutschdidaktik im Zeichen der kognitiven Wende. In: Beiträge zur Lehrerbildung, Heft 2, Bern, S. 146-158.

Stein, M. K./Grover, B. W./Henningsen, M. (1996): Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical task used in reform classes. In: American Educational Research Journal 33, S. 455-488.

Steinke, I. (2003): Gütekriterien qualitativer Forschung. In: Flick, U/ Kardorff, E. v./ Steinke, I. (Hrsg.): Qualitative Forschung. Ein Handbuch. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt, S. 319-331.

Stengel, A. (2002): Die Raumvorstellung mathematisch interessierter und begabter Schülerinnen und Schüler. In: mathematik lehren, Heft 115, S. 63-65.

Stern, E./Hardy, I. (2002): Schulleistungen im Bereich der mathematischen Bildung. In: Weinert, F. E. (Hrsg.): Leistungsmessungen in Schulen. Weinheim, Basel: Beltz, S. 152-168.

Stewart, I. (2001): Die Zahlen der Natur. Mathematik als Fenster zur Welt. Heidelberg, Berlin: Spektrum.

Sundermann, B./Selter, C. (2006): Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen.

Tarnai, C. (2001): Verbale Schulleistungsbeurteilung. In: Rost, D. H. (Hrsg.): Handwörterbuch Pädagogische Psychologie. Weinheim, Basel: Beltz. S. 756-760.

Tent, L. (2001): Zensuren. In: Rost, D. H. (2001): Handwörterbuch Pädagogische Psychologie. Weinheim, Basel: Beltz, S. 805-811.

Thonhauser, J. (2002): Bewusstsein der eigenen Fähigkeit statt Rückblick auf übersprungene Hürden – die Portfolio-Idee in der Lehrerbildung. In: Winter, F./Groeben, A. v. d./ Lenzen, K.-D. (Hrsg.): Leistung sehen, fördern, werten. Neue Wege für die Schule. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt, S. 184-191.

Thurn, S. (1996): Ermutigungen – Lernen ohne Noten. Lernberichte in der Sekundarstufe 1. In: Friedrich Jahresheft XIV, S. 86-90.

Tietze, U.-P./Klika, M./Wolpers, H. (2000): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Tulodziecki, G./Herzig, B./Blömeke, S. (2004): Gestaltung von Unterricht. Eine Einführung in die Didaktik. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt.

Valtin, R./Schmude, C. (2000): Noten- oder Verbalbeurteilung: Was ist ein gutes Zeugnis? In: Verband Bildung und Erziehung (Hrsg.): Schule und Leistung. VBE-Dokumentationen, S. 142-151.

Vierlinger, R. (1999): Leistung spricht für sich. „Direkte Leistungsvorlage“ (Portfolio) statt Ziffernzensuren und Notenfetischismus. Heinsberg: Dieck.

Vierlinger, R. (2002): Das Konzept der „Direkten Leistungsvorlage“. In: Winter, F./Groeben, A. v. d. /Lenzen, K.-D. (Hrsg.): Leistung sehen, fördern, werten. Neue Wege für die Schule. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt, S. 28-38.

Walsch, W. (1972): Zum Beweisen im Mathematikunterricht. Berlin: Volk und Wissen.

Walsch, W. (1985): Gedanken zur Realisierung des „Tätigkeitskonzeptes“ im Mathematikunterricht. In: Journal für Mathematikdidaktik, Jg. 6, Heft 1, S. 3-14.

Walsch, W. (1992): Beweisen im Mathematikunterricht – logische, psychologische und didaktische Aspekte. In: Mathematikunterricht, Jg. 38, Heft 6, S. 23-32.

Walsch, W. (2000): Zum Beweisen im Mathematikunterricht (Interview von L. Flade). In: Flade, L./Herget, W. (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen nach TIMSS: Anregungen für die Sekundarstufen. Berlin: Volk und Wissen, S. 25-30.

Walther, G. (1985): Zur Rolle von Aufgaben im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, S. 28-42.

Weinert, F. E. (2002): Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In: Weinert, F. E. (Hrsg.): Leistungsmessungen in Schulen. Weinheim, Basel: Beltz, S. 17-32.

Weinert, F. E. (2001): Concept of competence: a conceptual clarification. In: Rychen, D. S. (Hrsg.): Defining and selecting key competencies. Seattle: Hogrefe & Huber, S. 45-65.

Weinert, F. E. (1999): Bedingungen für mathematisch-naturwissenschaftliche Leistungen in der Schule und die Möglichkeiten ihrer Verbesserung. In: Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.): Weiterentwicklung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts, S. 21-32.

Werning, R (1998): Konstruktivismus – Eine Anregung für die Pädagogik? In: Pädagogik, Heft 7-8, S. 39-41.

Westermann, B. (2003): Anwendungen und Modellbildung. In: Leuders, T. (Hrsg.): Mathematikdidaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen, S. 148-162.

Wiegand, B./Blum, W. (1999): Offene Probleme für den Mathematikunterricht – Kann man Schulbücher dafür nutzen? In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 590-593.

Williams, G./Clarke, D. (1997): Complexity of mathematical task. In Scott, N./Hollingsworth, H. (Hrsg.): Mathematics: Creating the future, Adelaide: Australian Association of Mathematics Teachers, S. 451-455.

Williams, G./Clarke, D. (1997b): Mathematical task complexity and task selection. In: Clarke, D. J. et al. (Eds.): Mathematics: Imagine the possibilities. Brunswick, Victoria: Mathematics Association of Victoria, S. 406-415.

Winter, F. (1996): Schülerselbstbewertung. Die Kommunikation über Leistung verbessern. In: Friedrich Jahresheft XIV, S. 34-37.

Winter, F. (2002): Chancen für pädagogische Reformen? Oder: Wie es sein könnte mit der Leistungsbewertung. In: Winter, F./Groeben, A. v. d. /Lenzen, K.-D. (Hrsg.): Leistung sehen, fördern, werten. Neue Wege für die Schule. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt, S. 49-58.

Winter, F. (2002b): Ein Instrument mit vielen Möglichkeiten – Leistungsbewertung anhand von Portfolios. In: Winter, F./Groeben, A. v. d. /Lenzen, K.-D. (Hrsg.): Leistung sehen, fördern, werten. Neue Wege für die Schule. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt, S. 175-183.

Winter, H. (1975): Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Jg. 7, Heft 3, S. 106-116.

Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Nr. 61. S. 37-46.

Wittmann, E. C. (1981): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. C. (2001): Wider die Flut der „bunten Hunde“ und „grauen Päckchen“: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In: Wittmann, E. C./Müller, G. N.: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1. Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig: Klett.

Wittmann, E. Ch. (2003): Was ist Mathematik und welche Bedeutung hat das wohlverstandene Fach für den Mathematikunterricht auch in der Grundschule? In: Baum, M./Wielpitz, H. (Hrsg.): Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch. Seelze: Kallmeyer, S. 18-46.

Wollring, B. (2006): „Welche Zeit zeigt deine Uhr?“ Handlungsleitende Diagnostik für den Mathematikunterricht der Grundschule. Friedrich Jahresheft XXIV, S. 64-67.

Wunder, D. (2002): Wie kann man eine Änderung der Leistungsbeurteilung durchsetzen? In: Winter, F./Groeben, A. v. d. /Lenzen, K.-D. (Hrsg.): Leistung sehen, fördern, werten. Neue Wege für die Schule. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt, S. 59-66.

Wuschansky, E. (1989): Beitrag zum Fach Mathematik. In: Bartnizky, H. (Hrsg.): Umgang mit Zensuren in allen Fächern. Frankfurt am Main: Cornelsen, S. 66-77.

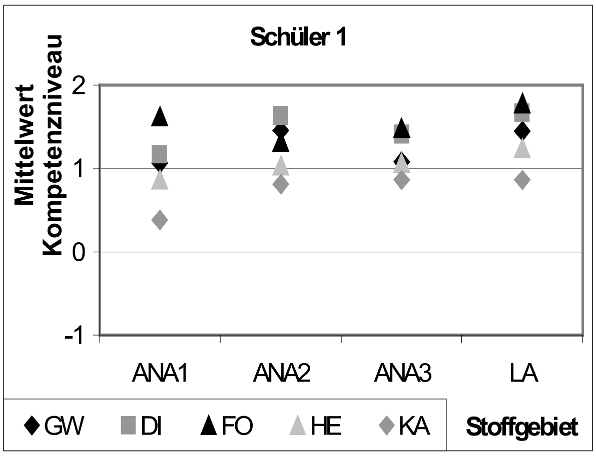
Zech, F. (1996): Grundkurs Mathematikdidaktik. Weinheim, Basel: Beltz.

# Anhang 1 Ergänzende Materialien zu den in Kapitel 4 beschriebenen schulpraktischen Untersuchungen

## Anhang 1.1 Kompetenzniveaus in Abhängigkeit vom Stoffgebiet und vom Kompetenzbereich (zu Abschnitt 4.1.3)

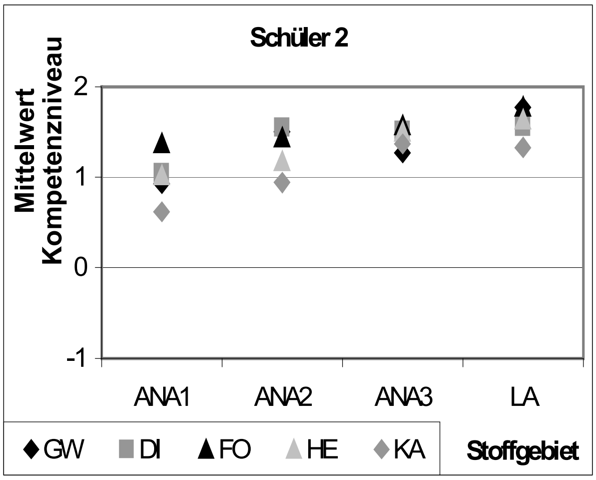
Um Unterschiede in den Ausprägungen der Kompetenzen in den einzelnen Stoffeinheiten und in der Entwicklung der Kompetenzen aufzudecken, können die durchschnittlichen Leistungsniveaus eines Schülers in den vier Aktivitätsbereichen und Stoffabschnitten vergleichend graphisch dargestellt werden.

Schüler 1



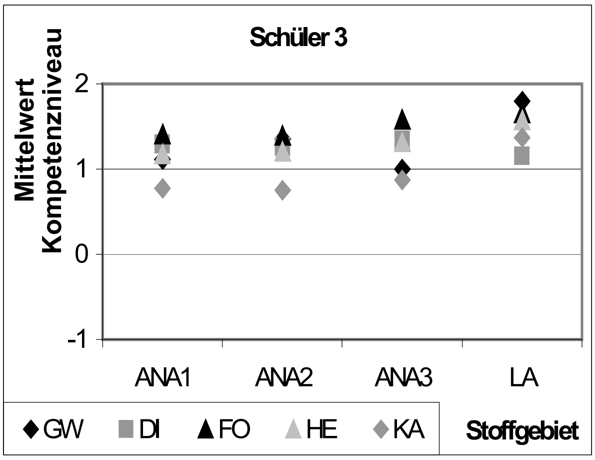

Die Stärken von Schüler 1 liegen im darstellend-interpretativen und formal-operativen Bereich. Die Grundkenntnisse sind abhängig vom Stoffgebiet. Ökonomische Funktionen stellen eine Schwierigkeit dar und führen zum Absinken der Leistungen in der Anwendung der Differenzialrechnung (ANA3). Die Kompetenzen im heuristisch-experimentellen Bereich liegen auf einem guten Niveau. Der kritisch-argumentative Bereich kann als Schwäche des Schülers betrachtet werden. Formale Beweise (ANA3) werden jedoch gut bewältigt.

Schüler 2



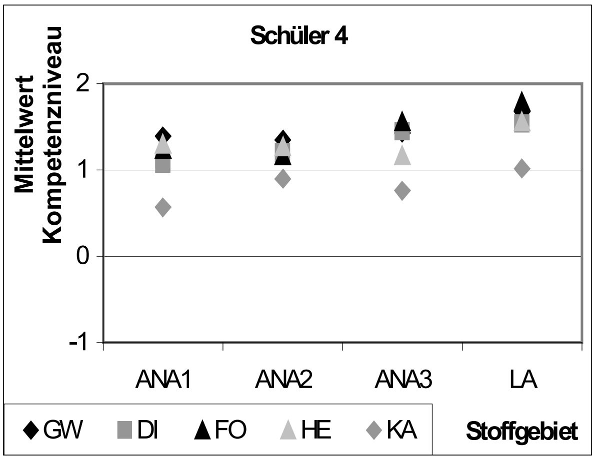

Auch bei Schüler 2 liegen Stärken im formal-operativen und darstellend-interpretativen Bereich. Im heuristisch-experimentellen Bereich findet eine kontinuierliche Leistungssteigerung statt, so dass auch diese Kompetenzgruppe im zweiten Schulhalbjahr zu den Stärken des Schülers zählt. Ebenso konnten die Kompetenzen im kritisch-argumentativen Bereich kontinuierlich gesteigert werden. Insgesamt profitierte dieser Schüler am stärksten von der Förderung in der mathematisch profilierten Klasse und steigerte seine Leistungen am deutlichsten. Die Unterschiede zwischen den Leistungen in den verschiedenen Kompetenzbereichen sind gering.

Schüler 3



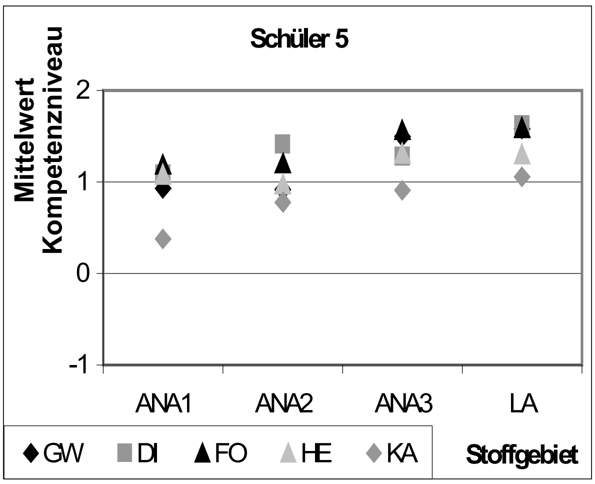

Auch bei Schüler 3 zählen die formal-operativen Kompetenzen zu den individuellen Stärken. Die Grundkenntnisse sind abhängig vom Stoffgebiet, z. B. gibt es diesbezüglich deutliche Unterschiede zwischen der Anwendung der Differenzialrechung (ANA3) und der Linearen Algebra (LA). Die Leistungen im darstellend-interpretativen Bereich können in der Linearen Algebra nicht gehalten werden. Im heuristisch-experimentellen Bereich ist eine Steigerung erkennbar. In der Linearen Algebra ist die Verbesserung im kritisch-argumentativen Bereich deutlich.

Schüler 4




Die mathematischen Grundkenntnisse dieses Schülers liegen stabil auf hohem Niveau. Zu den Stärken zählen aber auch die heuristisch-experimentellen, formal-operativen und darstellend-interpretativen Kompetenzen. Lediglich bei den Aufgaben zur Anwendung der Differenzialrechnung (ANA3) fielen dem Schüler die Ansätze etwas schwerer. Die Leistungen im kritisch-argumentativen Bereich sind geringer als in den anderen Bereichen.

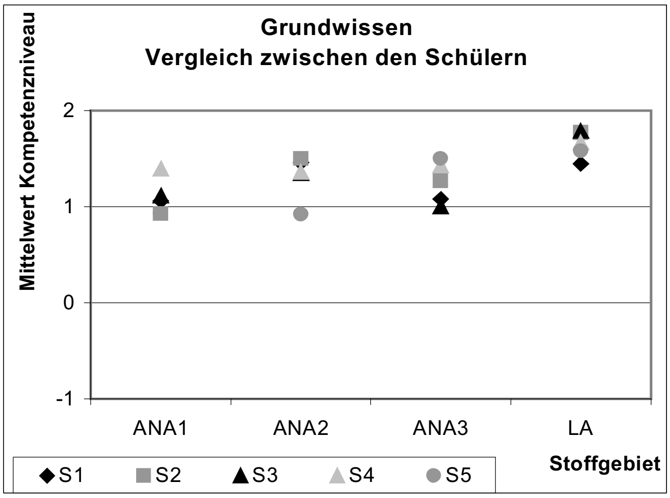
Schüler 5



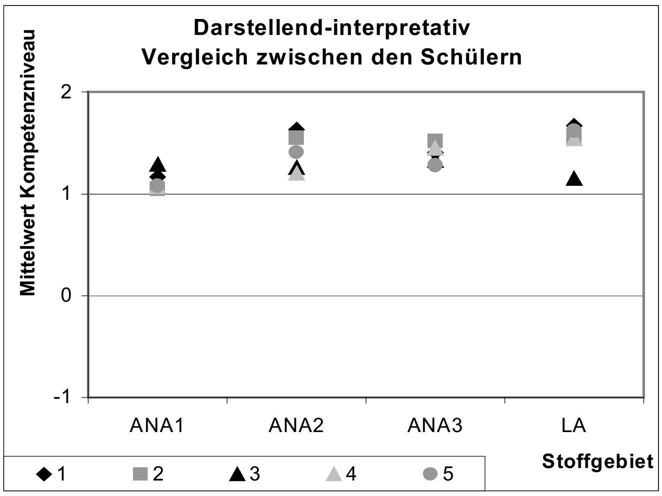

Auch bei diesem Schüler haben die Leistungen im formal-operativen und darstellend-interpretativen Bereich die individuell höchsten Niveaus. Das Grundwissen des Schülers und die Leistungen im heuristisch-experimentellen Bereich sind in den Stoffgebieten Reelle Zahlenfolgen (ANA1) und Einführung in die Differenzialrechnung (ANA2) etwas niedriger als in der Anwendung der Differenzialrechnung (ANA3) und in der Linearen Algebra (LA). Im kritisch-argumentativen Bereich konnte von einem niedrigen Niveau ausgehend ein gutes Endniveau erreicht werden.

## Anhang 1.2 Vergleich individueller Kompetenzniveaus (zu Abschnitt 4.1.4)

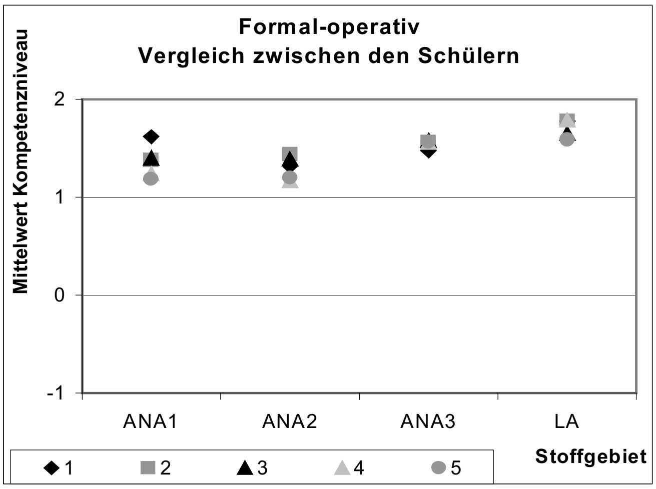
Um Unterschiede in den Ausprägungen der Kompetenzen zwischen den Schülern aufzudecken, werden die durchschnittlichen Leistungsniveaus der fünf Schüler jeweils für einen Aktivitätsbereich in den einzelnen Stoffgebieten verglichen. Möglicherweise ergeben sich so Hinweise für notwendige individuelle Fördermaßnahmen.



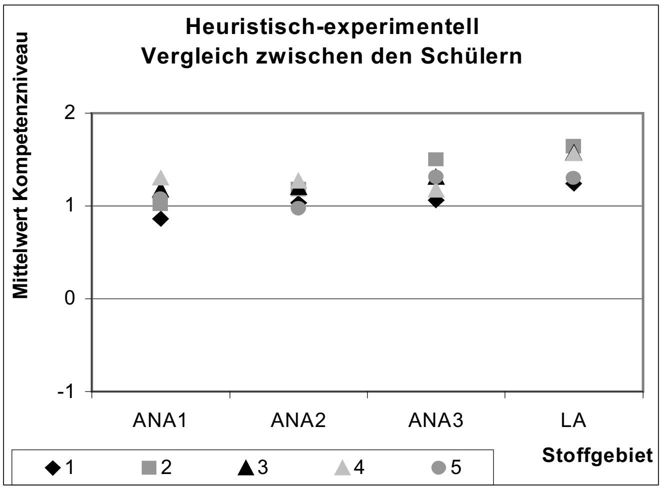

Die Stellung eines Schülers in der Lerngruppe bezüglich seines Grundwissens kann vom Stoffgebiet abhängen. Das Grundwissen von Schüler 5 ist im Stoffgebiet Einführung in die Differenzialrechnung (ANA2) geringer im Stoffgebiet Anwendung der Differenzialrechnung (ANA3) etwas höher als das seiner Mitschüler. Insgesamt sind die Unterschiede im Grundwissen der fünf Schüler jedoch gering.



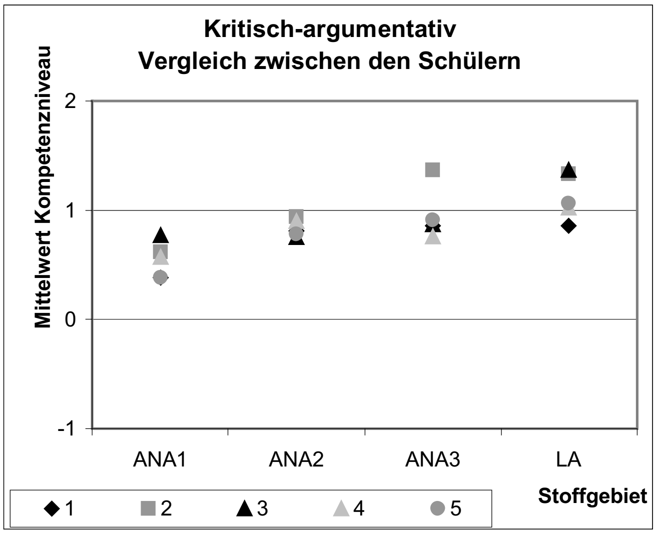

Zwischen den darstellend-interpretativen Kompetenzen der Schüler gibt es keine deutlichen Unterschiede. In den Stoffgebieten Reelle Zahlenfolgen (ANA1) und Anwendung der Differenzialrechnung (ANA3) liegen sie sogar sehr eng beieinander. Im Stoffgebiet Lineare Algebra (LA) sind die darstellend-interpretativen Kompetenzen von Schüler 3 niedriger als die seiner Mitschüler.




Auch bezüglich der formal-operativen Kompetenzen der Schüler zeigen sich keine deutlichen Unterschiede. Da hier auch die aufgabenabhängigen Schwankungen der Kompetenzen eines Schülers gering sind (vgl. 4.1.3) werden individuell differenzierte Fördermaßnahmen in diesem Bereich nicht für notwendig gehalten.




Im heuristisch-experimentellen Bereich sind die interindividuellen Unterschiede ebenfalls gering. Ob eine geeignete Lösungsstrategie gefunden werden kann ist jedoch deutlich von der Aufgabe bzw. vom speziellen angesprochenen Inhalt abhängig (vgl. 4.1.3). Deshalb können konkrete individuelle lernfördernde Hinweise oder Maßnahmen durchaus sinnvoll sein.




Auch im kritisch-argumentativen Bereich liegen die Leistungen der Schüler erstaunlich nahe beieinander. Im Stoffgebiet Anwendung der Differenzialrechnung übersteigen die Leistungen von Schüler 2 deutlich die Leistungen der anderen Schüler. Für alle Schüler zeigt sich ein steigender Trend, der jedoch unterschiedlich ausgeprägt ist.

Da im kritisch-argumentativen Bereich alle Schüler ihre individuell niedrigsten mittleren Kompetenzniveaus haben, ist eine verstärkte Förderung für diesen Bereich sinnvoll. Die Bedeutung von Argumentationen im Unterricht der profilierten Klasse hat bereits Wirkung gezeigt,

# Anhang 1.3 Aufgabenanalyse und Beurteilungskriterien für zwei Aufgaben der in 4.2 beschriebenen Fallstudie

### Aufgabe 11B1.1 Schneeflockenkurve

Aufgabenstellung

Der Umfang eines gleichseitigen Dreiecks (Figur 1) sei 3. Jede der drei Seiten wird gedrittelt und über dem mittleren Drittel wird nach außen ein gleichseitiges Dreieck errichtet, d. h. zur vorhandenen Figur nach außen hinzugefügt. Das mittlere Drittel wird entfernt. Es entsteht Figur 2. Das Verfahren wird fortgesetzt, indem in Figur 2 jede Seite gedrittelt und über dem mittleren Drittel ein gleichseitiges Dreieck nach außen errichtet wird und das mittlere Drittel entfernt wird. Es entsteht Figur 3 usw.

a) Konstruieren Sie die erste, zweite und dritte Figur.

b) Es seien $U_n$ der Umfang und $A_n$ der Flächeninhalt der $n$-ten Figur.
   Berechnen Sie $U_1$, $U_2$, $U_3$, $A_1$, $A_2$, $A_3$.
   Was passiert mit $U_n$ bzw. $A_n$, wenn $n$ sehr groß wird?
   Legen Sie Ihre Analyse ausführlich dar und begründen Sie Ihre Vermutung.

Charakterisierung der Aufgabe

Diese komplexe Aufgabe fordert von den Schülern ein breites Kompetenzspektrum und die Vernetzung verschiedener mathematischer Inhalte. Das ermöglicht zu Beginn der elften Klasse einen Eindruck über die in der Sekundarstufe I von den Schülern erworbenen mathematischen Kompetenzen und Kenntnisse.
In Teilaufgabe a) sind Kenntnisse aus der Geometrie, insbesondere zur Dreieckskonstruktion notwendig, wobei eine komplizierte Konstruktionsanweisung verstanden und umgesetzt werden muss. Im Teil b) sind Kenntnisse zur Umfangs- und Flächenberechnung von gleichseitigen Dreiecken erforderlich. Die eigentliche Anforderung besteht jedoch in der Verallgemeinerung der Formeln ($U_n$, $A_n$) und in der Abschätzung für große $n$. Dafür sind selbständig heuristische Strategien und schlüssige Argumente zu finden und anzuwenden.
Auf Grund der interessanten Thematik (fraktale Geometrie) ermöglicht die Aufgabe einen motivierenden Einstieg in das Stoffgebiet der Reellen Zahlenfolgen. Der Begriff der Zahlenfolge, Darstellungsmöglichkeiten und Eigenschaften von Zahlenfolgen bis hin zur Grenzwertbetrachtung können so problemorientiert erarbeitet werden. Auf die Aufgabe

kann zu einem späteren Zeitpunkten zurückgegriffen werden, z. B. um den exakten Nachweis der Begrenztheit des Flächeninhaltes für $n \to \infty$ zu erbringen.

<u>Mögliche Lösung</u>

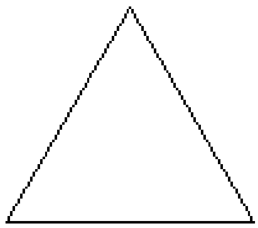
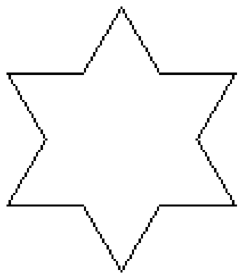
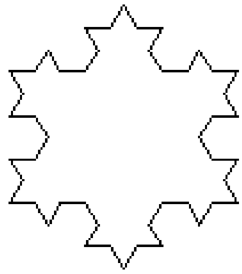
| Figur 1 | Figur 2 | Figur 3 |
|---|---|---|
|  |  |  |

Abb.: Darstellung der drei Figuren (schematisch, keine Konstruktion) aus:
http://www.learn-line.nrw.de/angebote/neuemedien/medio/mathe/geometrie/schnee/ablatt2.htm

a)

Figur 1: Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks, z. B. mit Seitenlänge $s$ = 6 cm (Maßstab 6:1), mit Zirkel und Lineal

Figur 2: Wiederholung von Figur 1,
Teilen der Seiten durch 3 $\to$ neue Seite $s$ = 2 cm,
Über dem mittleren Stück aller drei Seiten wird ein gleichseitiges Dreieck mit $s$ = 2 cm konstruiert und das mittlere Stück des großen Dreiecks ausradiert.

Figur 3: Wiederholung von Figur 2, erneutes Teilen aller Seitenstücke durch 3,
Errichten kleiner gleichseitiger Dreiecke ($s$ ca. 0,7 cm) über dem mittleren Stück,
Ausradieren der Begrenzungen, so dass ein Stern entsteht (Siehe Abbildung)

b)

Betrachtung des Umfangs:

$U_1 = 3 \to s_1 = 1$ : Seitenlänge des Dreiecks

$$U_2 = U_1 + \frac{6}{3} - \frac{3}{3} = \frac{9}{3} + \frac{3}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$U_3 = U_2 + \frac{24}{9} - \frac{12}{9} = U_2 + \frac{12}{9} = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

Mit zunehmendem $n$ wird der Umfang immer größer.

Gibt es einen konstanten Vergrößerungsfaktor?

$$f = \frac{U_2}{U_1} = \frac{4}{3},\ f = \frac{U_3}{U_2} = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$$

Es scheint einen solchen Faktor $n = 4/3$ zu geben.

Verallgemeinerung (Vermutung)[112]: $U_{n+1} = U_n \cdot \frac{4}{3}$ bzw. $U_n = U_1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

Da $n > 1$, wird der Umfang bei jeder „Zackengeneration" gleichmäßig größer und schließlich unendlich groß.

Betrachtung des Flächeninhalts:

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s_1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks: Teilung in zwei rechtwinklige Dreiecke, Bestimmung der fehlenden Seite mit dem Satz des Pythagoras)

$$A_2 = A_1 + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s_2^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3}$$

$$A_3 = A_2 + 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s_3^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 12 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{9}\right)$$

Die Fläche wird also ebenfalls immer größer. Sie kann aber nicht unendlich groß werden. Beispielsweise kann um die Schneeflocke ein Kreis gelegt werden, so dass die großen Spitzen auf dem Radius liegen. Auch wenn $n$ noch so steigt, wird dieser Kreis nicht überschritten und der Flächeninhalt wird immer kleiner als der des Kreises bleiben.

Um eine allgemeine Vorschrift zu erkennen, wird zusätzlich $A_4$ berechnet.

$$A_4 = A_3 + 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s_4^2 = A_3 + 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2\right)$$

Verallgemeinerung: $A_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$

Mit der Summenformel[113] $x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x},\ x \neq 1$ folgt

---

[112] Beweis z. B. mit vollständiger Induktion.

[113] Diese Summenformel kann den Schülern bekannt sein oder kann ihnen gegeben werden. Viele Schüler werden an dieser Stelle aber eher anschaulich verbal argumentieren.

$$A_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3} \left( \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{\frac{5}{9}} \right)$$

Mit $n \to \infty$ geht $x^n$ für $0 \leq x < 1$ gegen Null und es ergibt sich

$A_{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{3}$. Somit nähert sich der Flächeninhalt der Schneeflockenkurve tatsächlich einem konstanten Wert.

Kompetenzspektrum

Grundwissen: Dreieckskonstruktion, Umfang/Fläche gleichseitiger Dreiecke, Satz d. Pythagoras (GW)
Graphisch Darstellen (DI)
Übersetzen (DI)
Formal Darstellen (DI)
Ausführen algebraischer Operationen, Umformungen, Berechnungen (FO)
Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)
Analysieren (HE)
Mathematisch Argumentieren (KA)

**Analyse der Aufgabe nach den Kriterien an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen**

Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

*Bedingungen auf Grund der Beurteilungssituation*

Validität

Die Aufgabenstellung enthält einen längeren Text, der zu verstehen und zu übersetzen ist. Die notwendige fachliche Lesekompetenz ist Voraussetzung für die Bearbeitung der Aufgabe. Sie überdeckt jedoch nicht die zu beurteilenden Kompetenzen, sondern die Übersetzung wurde explizit als Beurteilungsanlass benannt. Die anderen Kompetenzen können von der Übersetzung isoliert werden und sind auch bei falscher Übersetzung (wenigstens teilweise) beurteilbar. Der Text sollte für Schüler der gymnasialen Oberstufe gut verständlich sein, so dass keine Schwierigkeiten mit dem Textverständnis erwartet werden. Die Aufgabe spricht wichtige mathematische Kompetenzen wie Formalisieren, Analysieren, Verallgemeinern, Aufstellen und Begründen von Vermutungen an.

Gerechtigkeit

Verständlichkeit: Die fachsprachlichen Begriffe der Konstruktionsbeschreibung und Aufgabenstellung werden im Regelfall in der Sekundarstufe I verinnerlicht. Der umfangreiche Text ist für Schüler der Sekundarstufe II sprachlich und fachsprachlich angemessen.

Erwartungstransparenz: Es wird deutlich formuliert, was eine Aufgabenbearbeitung einschließt. Die Schüler werden explizit zur ausführlichen Darlegung und Begründung aufgefordert. Dies ist notwendig, um die Analyse und Verallgemeinerung beurteilen zu können.

Ergebnisorientierung: Durch zahlreiche (explizite und implizite) Teilaufgaben ist gewährleistet, dass mit der aufzubringenden Zeit adäquate Bewertungsanlässe einhergehen.

Schwierigkeit: Die Aufgabe hat für den Beginn der elften Klasse eine angemessene Schwierigkeit, da alle Wissenselemente Inhalte der Sekundarstufe I sind. Auch über die methodischen Mittel (z. B. Darstellen durch Variablen, Begründen) verfügen Schüler in der Regel beim Übergang in die gymnasiale Oberstufe.

Möglichkeit individueller Wege (Offenheit)

Die Aufgabe ist methodisch offen und auf unterschiedlichen Wegen lösbar, z. B. die folgenden Aufgabenteile: Konstruktion, Bestimmung der Fläche, Untersuchung des Grenzverhaltens.

*Bedingungen durch Anspruch an Aufgabenqualität*

Individuelle und gesellschaftliche Bedeutung der Aufgabe: Die Kochkurve bietet Einblick in die interessante Thematik der fraktalen Geometrie. Die plakative Überschrift und der handlungsorientierte Zugang können Neugier wecken. Gesellschaftliche und individuelle Bedeutung hat die Aufgabe durch die Anwendung der induktiven Methode: Ausgehend von Spezialfällen werden allgemeine Zusammenhänge entdeckt (wie oft in der experimentellen Forschung). Auch das Abschätzen von Termen für große Zahlen hat praktische Bedeutung.

Kognitive Forderung: Die Aufgabe knüpft an Inhalte der Sekundarstufe I an, um auf die Oberstufenthemen (Zahlenfolgen, Grenzverhalten von Folgen) überzuleiten. Sie erlaubt vielen Schülern einen Zugang, genauso aber auch über ihr derzeitiges Wissen hinauszugehen und selbständig Zusammenhänge zu finden. Die Lösbarkeit mit unterschiedlichen Darstellungsmitteln und auf unterschiedlichen Formalisierungsniveaus und kognitiven

Ebenen erlaubt es, die Schüler differenziert zu fördern und zu fordern (z. B. kann die Analyse und Verallgemeinerung sowohl anschaulich als auch formal vollzogen werden).

*Kriterien verbunden mit dem Ziel des Ansprechens vielseitiger mathematischer Kompetenzen*

Darstellend-interpretative Aktivitäten: graphisch darstellen, übersetzen, formal darstellen

Heuristisch-experimentelle Aktivitäten: geeignete Lösungsstrategien finden, analysieren, verallgemeinern

Formal-operative Aktivitäten: Dreieckskonstruktionen ausführen, algebraische Operationen und Umformungen ausführen

Kritisch-argumentative Aktivitäten: Schlussfolgerungen ziehen, mathematisch argumentieren

**Fazit der Analyse der entscheidenden Kriterien: Die Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen werden erfüllt, wenn die Schüler darin geübt sind, komplexe Gedankengänge nachvollziehbar darzulegen.**

<u>Komplexitätsbeschreibende Merkmale von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen</u>

Komplexität der einbezogenen mathematischen Inhalte

Wissenseinheit/Stoffgebiet und curriculare Wissensstufe: Es werden die Wissenseinheiten „Dreieckskonstruktionen", „Fläche und Umfang von Dreiecken" sowie „Termumformungen" notwendig, die üblicherweise in Klasse 7 und 8 thematisiert werden. Zusätzlich kann der Satz des Pythagoras hilfreich sein. Es sind mehrere Wissenseinheiten aus Geometrie und Algebra der Sekundarstufe I zu verbinden.

Art des Wissens: Faktenwissen (Formeln für Umfang, Fläche von Dreiecken), prozedurales Wissen (Dreieckskonstruktionen), konzeptuelles Wissen (Zulässigkeit von Verallgemeinerungen, Angemessenheit von Begründungen)

Es liegt eine neuartige und komplexe Verknüpfung bekannter Wissenselemente vor: Anforderungsbereich 3.

Komplexität bezüglich spezifischer Aktivitätsbereiche

Anforderungen im heuristisch-experimentellen Bereich: Die kontextuelle Komplexität entspricht Stufe 2: Die notwendigen mathematischen Operationen bleiben hinter dem

Kontext verborgen, eine innermathematische Modellierung ist notwendig. Die Aufgabe ist methodisch offen, es wird kein Lösungsverfahren vorgegeben, sondern dieses ist von den Schülern selbst zu entwickeln. Heuristische Aktivitäten wie Analysieren/Vergleichen von Termen und (schlüssig) Verallgemeinern sind für Schüler zu Beginn der elften Klasse anspruchsvolle Tätigkeiten: Anforderungsbereich 3.

Anforderungen im formal-operativen Bereich: Es sind algebraische Operationen und Umformungen der Sekundarstufe 1 anzuwenden, die selbständig auszuwählen, anzuordnen und auszuführen sind: Anforderungsbereich 2.

Anforderungen im darstellend-interpretativen Bereich: Es sind vielfältige Darstellungsformen einzusetzen (formal, graphisch, verbal) und zwischen diesen zu übersetzen. Geeignete Darstellungen sind selbst zu wählen. Diese können die Verallgemeinerung und die Analyse des Grenzverhaltens wesentlich unterstützen. Die Aufgabenstellung ist verbal formuliert. Es werden jedoch bereits Variablen definiert, was bei der Übersetzung in die symbolische Darstellung helfen kann. Je nach individuellem Lösungsweg entsprechen die ausgeführten darstellend-interpretativen Aktivitäten Anforderungsniveau 2 oder 3.

Anforderungen im kritisch-argumentativen Bereich: Es ist eine Begründung anhand mathematischer Argumente zu formulieren. Die Argumente sind selbständig auszuwählen und anzuordnen. Graphische Mittel und formale Berechnungen können unterstützend wirken. Hinsichtlich der Formalisierung der Argumentation sind Differenzierungen zu erwarten. Die schlüssige Begründung oder Herleitung einer Vermutung, z. B. einer Verallgemeinerung oder einer Approximation, kann für Schüler zu Beginn der elften Klasse eine neuartige Anforderung sein: Anforderungsbereich 3.

**Aufgabenspezifische Beurteilungskriterien**

Das Grundwissen und die bereichspezifischen Kompetenzen der Schüler können nicht abgelesen werden, sondern sind interpretativ aus den schriftlichen Bearbeitungen zu erschließen. Die Abstufung der Kompetenzniveaus zwischen dem höchsten Niveau (4 Punkte) und dem niedrigsten Niveau (0 Punkte) unternimmt der Beurteilende in eigenem Ermessen. Im Folgenden wird ein Vorschlag[114] für kompetenzbezogene Beurteilungskriterien vorgelegt, der in der Erprobung verwendet wurde. Dieser ist dem Unterrichtskonzept und dem Leistungsniveau der Klasse anzupassen. Es wird dabei versucht, das Kompetenzspektrum der Aufgabe abzudecken. Bei einer Schülerlösung kann möglicherweise nur eine Auswahl davon berücksichtigt werden. Welche Kompetenzen beurteilt werden können, hängt vom individuellen Lösungsweg und der Darstellung der Lösungsfindung ab.

1. Grundwissen (GW)

Für die Lösung der Aufgabe ist Grundwissen aus dem Bereich der Geometrie, insbesondere zu Dreieckskonstruktionen und zu Umfang und Fläche von (gleichseitigen) Dreiecken, aber auch aus dem Bereich der Algebra zu Termumformungen und zur Potenzrechnung notwendig. Je nach Lösungsweg können weitere Inhalte wichtig werden, wie der Satz des Pythagoras oder die Formel für die Kreisfläche.[115] Faktenwissen allein ist nicht ausreichend, es wird auch prozedurales und konzeptuelles Wissen notwendig (vgl. Aufgabenanalyse).

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Das zur Lösung der Aufgabe notwendige Grundwissen wird korrekt dargelegt und angewendet. Der Lösungsweg enthält keine Fehler oder Lücken/Abbrüche, die offensichtlich fehlendem Grundwissen zuzuschreiben sind. |
| 3 Punkte | Faktenwissen und prozedurales Wissen zu den angesprochenen Inhalten der Sekundarstufe I wird fehlerfrei dargelegt. Beim konzeptuellen Wissen zu komplexeren Zusammenhängen treten (wenige, kleinere) Fehler auf, z. B. bzgl. des Verhaltens von variablen Termen in Grenzfällen. |
| 2 Punkte | Grundlegende Kenntnisse sind vorhanden, aber ein wichtiges Wissenselement der Sekundarstufe I ist nicht anwendbar, z. B. Satz des Pythagoras. |
| 1 Punkt | Einige elementare Kenntnisse werden gezeigt, aber ebenso werden deutliche Lücken zu Standardinhalten der Sekundarstufe I sichtbar. |
| 0 Punkte | Das für die Aufgabe typische Grundwissen wird nicht gezeigt, z. B. sind die Formeln für Umfang und Flächeninhalt von Dreiecken nicht anwendungsbereit. |

[114] Sinnvoll wäre es, wenn sich Lehrer einer Schule gemeinsam auf derartige Beurteilungskriterien einigen. Zur Begründung und Entwicklung konkreter Beurteilungskriterien siehe Kapitel 3.

[115] Die in der Beispiellösung verwendete Summenformel kann nicht zum üblichen Grundwissen der Schüler gezählt werden. Sie sollte den Schülern zur Verfügung gestellt werden.

2. Graphisch Darstellen (DI)

Die verbal gegebene Konstruktionsbeschreibung ist in eine graphische Darstellung zu übersetzen. Die Besonderheit ist dabei eine Kombination von Dreieckskonstruktionen, als formalen Verfahren mit vorgegebener Schrittfolge, und eigenständigen Gestaltungen. Beide Aspekte sind im Regelfall im zur Verfügung stehenden Produkt nicht mehr zu trennen.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Die verbal gegebene Aufgabenstellung bzw. Konstruktionsanweisung wird korrekt in die graphische Darstellung übersetzt. Es wird unter Beachtung der Komplexität ein geeigneter Maßstab/eine geeignete Größe der Darstellung gewählt. Die Dreieckskonstruktionen werden korrekt, vollständig und exakt ausgeführt. Es wird eine geeignete Darstellungsweise gewählt, z. B. drei einzelne Figuren oder farbliche Unterscheidungen innerhalb einer Figur. |
| 3 Punkte | Die Übersetzung ist korrekt, die Darstellung enthält kleine Mängel, wie vergessene Ausradierungen. Die Konstruktionen sind korrekt, zeigen aber kleine Unsauberkeiten. |
| 2 Punkte | Die Übersetzung ist überwiegend korrekt. Es gibt jedoch kleine Übertragungsfehler, z. B. fehlende Zacken in Figur 3, Unexaktheiten, z. B. in den Maßen, oder die Darstellung ist unübersichtlich, z. B. unnötige Hilfslinien, ungünstige Beschriftung, ungeeignete Größe. Es gibt Unsauberkeiten/Fehler bei einer Teilkonstruktion oder die Konstruktion ist unvollständig. |
| 1 Punkt | Die Darstellung zeigt deutliche Übertragungsfehler. Es wurde eine Skizze angefertigt, keine Konstruktion. Die graphische Darstellung ist unvollständig, z. B. Figur 3 fehlt, oder sehr unsauber. |
| 0 Punkte | Es wurde keine graphische Darstellung angefertigt. |

3. Übersetzen (DI)

Das Übersetzen der verbalen Informationen der Aufgabendarstellung in die mathematische Sprache betrifft hier die Übersetzung in die formale Darstellung im Aufgabenteil b). Dafür ist ein geeignetes mathematisches Konzept zu finden und mit den verbalen Informationen der Aufgabenstellung zu verbinden. Der Übersetzungsprozess sollte nachvollziehbar sein. Problematisch bei der Beurteilung der Übersetzung ist die Abgrenzung vom Grundwissen und der Wahl geeigneter Lösungswege. So kann eine falsche Gleichung durch fehlendes Grundwissen oder durch eine falsche Übersetzung oder durch das Herstellen falscher Zusammenhänge entstehen, was im Einzelfall zu prüfen wäre.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Das gewählte Modell ist geeignet, das Problem mathematisch darzustellen: Es werden Gleichungen zur Berechnung von Umfang und Fläche aller Figuren aufgestellt. Die Übersetzung der verbalen Informationen der Aufgabenstellung in das mathematische Modell erfolgt formal und mathematisch korrekt und vollständig (äquivalente Darstellungen). Die Darstellungen sind gut lesbar und geeignet das Problem in der mathematisch-formalen Sprache weiter zu verarbeiten. Die Übersetzung ist nachvollziehbar: Beschreibung/Zuordnung der Variablen (z. B. an der Skizze). |
| 3 Punkte | Die formale Darstellung ist korrekt, enthält jedoch kleine „Unschönheiten“, wie Zahlen anstelle von Variablen, ungeeignete Variablen oder es findet keine Darstellung der Übersetzung/Erläuterung der Variablen statt. |
| 2 Punkte | Die Übersetzung gelingt im Wesentlichen, es gibt jedoch Mängel in der gewählten Darstellung, sie ist z. B. nicht für die Verallgemeinerung geeignet oder es liegt ein Übersetzungsfehler, z. B. falsche Seitenlängen, vor. |
| 1 Punkt | Nur ein Teil der Eigenschaften kann richtig übertragen werden. Es gibt mehrere Übersetzungsfehler, grobe Mängel in der Darstellung, das verwendete Modell ist ungeeignet, z. B. Formel für den Flächeninhalt falsch angewendet, oder die Übersetzung ist unvollständig, z. B. nur ein Ansatz oder $U_3$, $A_3$ fehlen. |
| 0 Punkte | Die Übersetzung gelingt nicht, obwohl das notwendige Grundwissen dargelegt wird (z. B. nur Formeln aufgeschrieben, nicht auf das spezielle Problem übertragen). |

4. Formal Darstellen (DI)

Die Analyse der Kompetenz des formalen und symbolischen Darstellens beginnt nach dem Übersetzungsprozess und umfasst die gesamte Darstellung des Lösungsweges. Die Schüler sollen zeigen, dass sie mit fachwissenschaftlichen Symbolen und standardisierten Notationen umgehen können. Dies beginnt bei der Aufstellung von Gleichungen unter Verwendung der üblichen Symbole für Rechenoperationen und endet bei der korrekten Verwendung logischer Symbole. Bei dieser Aufgabe kommen formale Darstellungsmittel zum Einsatz, die bis Ende der Sekundarstufe I erworben werden. Notationen der Algebra werden eingesetzt, um vollzogene Umformungen und Rechenschritte nachvollziehbar darzulegen. Werden Verallgemeinerung und Begründung auf symbolischer Ebene ausgeführt, sind eigenständige, auch anspruchsvolle Darstellungen vorzunehmen. Findet die Darstellung überwiegend nicht auf symbolischer Ebene statt, entfällt die Einschätzung dieser Kompetenz.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Es werden geeignete formale Darstellungsmittel (z. B. Gleichungen, Terme) und geeignete Symbole (z. B. für die einzelnen Flächen und Umfänge) ausgewählt. Der Lösungsweg wird formal exakt dargelegt (keine Flüchtigkeiten, wie fehlende Klammern, Indizes). Die verwendete Symbolik ist eindeutig und wird konsistent beibehalten. Die symbolische Darstellung des Lösungsweges ist angemessen ausführlich, gut lesbar, übersichtlich. Logische Symbole werden korrekt und sinnvoll verwendet. |
| 3 Punkte | Die formale Darstellung des Lösungsweges ist bis auf einzelne Flüchtigkeitsfehler richtig, aber nicht immer effektiv und der Lösungsfindung dienlich, z. B. umständliche, nicht zielorientierte Umformungen. |
| 2 Punkte | Die formale Darstellung ist korrekt, beschränkt sich aber auf Standarddarstellungen der Sekundarstufe I, z. B. die üblichen algebraischen Darstellungen. Ein selbständiger, kreativer Einsatz formaler Schreibweisen und Notationen z. B. bei der Verallgemeinerung oder bei Schlussfolgerungen, ist nicht möglich. |
| 1 Punkt | Es gibt formale Fehler und Unexaktheiten, auch bei standardisierten Darstellungen. Die formalen Darlegungen sind schlecht lesbar. |
| 0 Punkte | Der Lösungsweg kann nicht formal dargelegt werden, z. B. nur Ergebnisse oder verbale Schlüsse ohne formale Untermauerung (obwohl dies notwendig wäre). |

5. Ausführen algebraischer Operationen, Umformungen, Berechnungen (FO)

Folgende kalkülhafte Grundfertigkeiten werden bei dieser Aufgabe (mindestens) notwendig: Erweitern/Kürzen, Addieren/Subtrahieren/Multiplizieren von Brüchen, Potenzieren von Brüchen, Umstellen von Gleichungen und Wurzeltermen. Insgesamt können sieben Teilergebnisse bestimmt werden ($U_2$, $U_3$, $U_n$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_n$). Wie bei vielen Kompetenzen ist zur objektiven und genauen Einschätzung die ausführliche, gut nachvollziehbare Darlegung des Lösungsweges notwendig. Eine ergebniszentrierte Darstellung wirkt sich nachteilig für einen Schüler aus, wenn korrekte Teilergebnisse nicht sichtbar sind.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Es treten keine (Rechen-)Fehler auf, alle Umformungen/Teilergebnisse sind korrekt. |
| 3 Punkte | Es liegen seltene Rechenfehler vor, die aber die Problemlösung im Wesentlichen nicht beeinträchtigen. |
| 2 Punkte | Es zeigen sich erkennbare Unsicherheiten bezüglich der kalkülhaften Fertigkeiten. Die Fehler betreffen komplexere algebraische Umformungen, z. B. bei der (algebraischen) Verallgemeinerung von $A_n$. |
| 1 Punkt | Es treten gehäuft Fehler auf, auch bei einfachen algebraischen Operationen der Sekundarstufe I und der Primarstufe. |
| 0 Punkte | Die Aufgabe bzw. die betreffenden Teilaufgaben können auf Grund fehlender formaler Fertigkeiten nicht gelöst werden. |

6. Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)

Um geeignete Lösungsstrategien zu finden ist es notwendig, Zusammenhänge zwischen mathematischen Elementen herzustellen und geeignete heuristische Strategien zu erkennen. Beide Aspekte, der inhaltliche und der heuristische, sind in der Beurteilung in der Regel nicht zu trennen und werden gemeinsam erfasst.

Heuristische Strategien und kreative Denkprozesse werden vor allem im letzten Teil der Aufgabe, beim Abschätzen des Verhaltens von Umfang und Fläche für große *n* wichtig. Folgende heuristische Grundstrategien können dabei eine Rolle spielen: Abstrahieren, Spezial- und Grenzfälle betrachten, Wechseln der Darstellung, Verallgemeinern, Aufstellen und Prüfen von Vermutungen. Die Beurteilung sollte ein vielseitiges heuristisches Repertoire würdigen. Das Herstellen von Zusammenhängen bezieht sich auf die gesamte Aufgabe. Hier sollten alle sinnvollen, mathematisch korrekten selbständig gezogenen Vernetzungen gewürdigt werden. Dennoch steht bei beiden Aspekten die Lösung der Aufgabe im Vordergrund. Das divergente Denken sollte in eine geeignete Lösungsstrategie münden.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Die Wahl der Konzepte, Methoden, Darstellungen und mathematischen Operationen ist als Lösungsweg geeignet: Die gesuchten Umfänge und Flächen können berechnet werden und eine allgemeine Darstellung wird entwickelt, die eine Abschätzung für große *n* zulässt. Die gewählten heuristischen Strategien und mathematischen Vernetzungen passen in den Lösungsprozess und sind zielorientiert. Ein eigenständiger, kreativer Denkprozess ist erkennbar. Das Vorgehen ist mathematisch korrekt; Verständnis mathematischer Zusammenhänge wird eingebracht. |
| 3 Punkte | Eine Lösung wird erbracht, der Weg ist jedoch umständlich, wenig elegant, z. B. Berechnen vieler Beispiele ohne entsprechende algebraische Darstellung, die eine Verallgemeinerung ermöglicht. |
| 2 Punkte | Die Herangehensweise ist sinnvoll. Der Lösungsweg ist jedoch unvollständig, z. B. kann die Verallgemeinerung des Flächeninhaltes nicht vorgenommen werden, da eine Idee zur Abstraktion fehlt. |
| 1 Punkt | Es können nur Bruchstücke zur Lösung beigetragen werden oder auf Grund fehlender Methoden und Ideen werden Behelfsmethoden eingesetzt, wie Raten oder grobes Abschätzen. |
| 0 Punkte | Der korrekte Ansatz kann auf Grund fehlender heuristischer Strategien nicht über Standardrechnungen hinaus fortgeführt werden. |

7. Analysieren (HE)

In dieser Aufgabe sind die Umfänge und Flächeninhalte der Figuren für $n$=1 bis $n$=3 zu analysieren, um eine Vermutung für große *n* aufzustellen. Die Analyse kann separat beurteilt werden, wenn erkennbar ist, dass sowohl die einzelnen Umfänge als auch die einzelnen Flächeninhalte miteinander verglichen und analysiert wurden. Dazu müssen sie wenigstens aufgelistet und in einer für die Analyse geeigneten Form dargestellt werden (formale Darstellung, aus der die Vermutung abgelesen werden kann). Wird die Analyse nicht hinreichend ausführlich dargestellt, kann eine Bewertung nur indirekt über die formulierte Vermutung erfolgen, was zu unsicher ist.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Sinnvolle Methoden der Analyse bzw. des Vergleichs sind erkennbar, wie z. B. die Ermittlung des Wachstumsfaktors oder der Vergleich von Termen und das Herausstellen gemeinsamer Strukturen. Die Analyse bezieht sich auf die wichtigen Komponenten, z. B. Abstraktion auf dominierende Terme und deren Abschätzung. |
| 3 Punkte | Die Analyse wird für Umfang und Fläche durchgeführt, enthält aber intuitive Vergleiche, z. B. „Wachstum wird immer kleiner“ - ohne geeigneten Nachweis. |
| 2 Punkte | Die Darstellung der Analyse ist nicht geeignet, z. B. finden sich zu verbalen Beschreibungen keine entsprechenden algebraischen Betrachtungen, obwohl diese für fundierte Schlussfolgerungen notwendig wären. Entweder werden nur die Flächeninhalte oder nur die Umfänge analysiert oder beides nicht vollständig. |
| 1 Punkt | Nur oberflächliche Betrachtung, z. B. Vergleich von Dezimalzahlen, unbegründete intuitive Vermutungen, z. B. „$A_n$ wird nur noch geringfügig größer“. |
| 0 Punkte | Eine Analyse der aufgestellten Terme wurde nicht durchgeführt. |

8. Mathematisch Argumentieren (KA)

Mathematisch argumentiert werden kann bei dieser Aufgabe innerhalb einer ausführlichen Begründung der gezogenen Schlüsse bzw. bei einer ausführlichen Herleitung der Abschätzung. Einfache Schlussfolgerungen sollten bei der Verallgemeinerung und als Ergebnis der Analyse für das Verhalten der Umfänge und Flächeninhalte für große $n$ auftreten. Dabei ist nicht die Analyse an sich von Bedeutung, sondern, ob die Schlussfolgerung mit der Analyse stimmig ist und durch sie fundiert wird. Die Form der Argumentation kann unterschiedlich sein. So kann eine umfassende Analyse mit logischen Schlussweisen in symbolisch-formaler Form eine ebenso gute Argumentation sein wie eine umfassende verbale Betrachtung.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Die Argumentation ist mathematisch korrekt, logisch schlüssig und fundiert. Die Argumentationsbasis ist sinnvoll gewählt, sachlich, logisch und formal korrekt. Die Argumentationskette ist vollständig, gut nachvollziehbar, zusammenhängend und schlüssig. Die Argumentation ist sprachlich und fachsprachlich korrekt und exakt.<br>Schlussfolgerungen werden explizit formuliert, sind mathematisch korrekt und durch eine Analyse oder algebraische Vorbereitungen fundiert/gesichert. Sie ergeben sich schlüssig aus den bisherigen Betrachtungen. |
| 3 Punkte | Die Argumentation enthält kleine Sprünge, ist nicht ganz schlüssig, z. B. keine direkte Verbindung formale Darstellung - verbale Schlussfolgerung oder etwas ungenau.<br>Schlussfolgerungen werden explizit gezogen, sind mathematisch korrekt, aber in der Formulierung nicht ganz exakt, nicht ganz schlüssig, nicht vollständig fundiert. |
| 2 Punkte | Die Argumentation ist in groben Zügen schlüssig, die Argumentationsbasis geeignet. Es treten jedoch kleinere logische oder mathematische Fehler auf, die Argumentation ist teilweise schwer nachvollziehbar, enthält Sprünge/Lücken. Folgerungen werden z. T. voreilig oder ohne Untermauerung/algebraische Gegenüberstellung der Terme formuliert, z. B. „Im Verhältnis wird U viel größer als A." |
| 1 Punkt | Es gibt mehrfach unbegründete Aussagen, die Argumente sind z. T. nicht angemessen. Es treten mathematische und logische Fehler auf oder die Argumentation ist oberflächlich, voreilig, bruchstückhaft, z. B. „Je größer $n$ wird, desto größer wird $U_n$", ohne dass dies aus den Termen zu sehen ist.<br>Mehrere Schlussfolgerungen sind mathematisch nicht korrekt, z. B. „$U$ und $A$ wachsen gleichermaßen.", werden überwiegend intuitiv und oberflächlich gezogen. |
| 0 Punkte | Es findet keine angemessene Argumentation/Begründung statt. Es werden keine expliziten Schlüsse gezogen, obwohl das die Lösung zulässt. |

Beurteilungsbogen

Einschätzung der Bearbeitung der Aufgabe 11B1.1 Schneeflockenkurve

Name:

| **Mathematische Kompetenz** | **Einschätzung** | **Bemerkung** |
|---|---|---|
| Grundwissen (GW) | | |
| Graphisch Darstellen (DI) | | |
| Übersetzen (DI) | | |
| Formal Darstellen (DI) | | |
| Ausführen algebraischer Operationen, Umformungen, Berechnungen (FO) | | |
| Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE) | | |
| Analysieren (HE) | | |
| Mathematisch Argumentieren (KA) | | |
| Weitere Benmerkungen/ besondere Leistungen | | |

**Aufgabe 11B4.2: Zwischenwertsatz**

Aufgabenstellung

Folgender Satz wird Zwischenwertsatz genannt:
Sei $f$ eine Funktion, $[a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Ist $f$ stetig in $[a,b]$ und $f(a) \neq f(b)$, so nimmt $f$ im Intervall $[a,b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

a) Begründen Sie, dass der Nullstellensatz ein Sonderfall des Zwischenwertsatzes ist.
b) Beweisen Sie den Zwischenwertsatz (z. B. durch Rückführung auf den Nullstellensatz).
c) Veranschaulichen Sie den Zusammenhang zwischen diesen beiden Sätzen durch eine Skizze.

Charakterisierung der Aufgabe

Die Aufgabe bietet eine Möglichkeit, den Zwischenwertsatz zu thematisieren, ohne ihn direkt im Unterricht herzuleiten. Kennen die Schüler den Nullstellensatz, dürfte es für sie kein Problem sein, die Parallelen zu erkennen und beim Beweis zu nutzen. Wichtig ist, dass die Schüler sichere Kenntnisse zum Begriff der Stetigkeit und zum Nullstellensatz mit seinen Voraussetzungen haben und diese übertragen können.
In dieser Aufgabe werden alle Aktivitätsbereiche berücksichtigt. Der Schwerpunkt liegt auf dem kritisch-argumentativen Bereich. Den Zwischenwertsatz zu beweisen, dürfte auch für Schüler mathematisch profilierter Klassen anspruchsvoll sein. Deshalb wird der Hinweis auf die mögliche Rückführung auf den Nullstellensatz gegeben. Durch Vergleich der Bedingungen von Nullstellen- und Zwischenwertsatz können die Schüler selbst auf die Idee der Differenzfunktion kommen und sich so die Strategie des Beweisens mit Hilfsfunktionen erarbeiten. Eine Reflexion im Unterricht ist wichtig, um das neue heuristische Mittel herauszustellen und allen Schülern zugänglich zu machen.

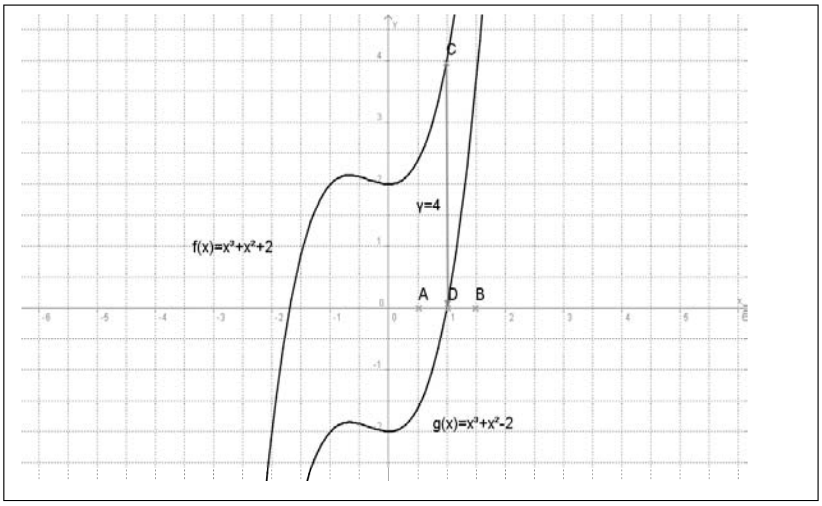
Mögliche Lösung

Der Nullstellensatz erfüllt die Voraussetzungen des Zwischenwertsatzes: $f$ ist stetig in $[a,b]$ und $f(a) \neq f(b)$. Die Bedingung $f(a) < 0 < f(b)$ bzw. $f(b) < 0 < f(a)$, ist ein Spezialfall von $f(a) \neq f(b)$. Laut Zwischenwertsatz wird jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ angenommen, also in diesem Spezialfall auch die Null.

Behauptung: Sei $\gamma$ ein Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$: $f(a) < \gamma < f(b)$ oder $f(b) < \gamma < f(a)$, dann nimmt $f$ diesen Wert an, d. h. es existiert $c \in [a,b]$ mit $f(c) = \gamma$.

Beweis: Es wird o. B. d. A. der Fall $f(a) < \gamma < f(b)$ betrachtet. Für die Differenzfunktion $g(x) = f(x) - \gamma$ gilt $g(a) = f(a) - \gamma < 0$, da $f(a) < \gamma$ nach Voraussetzung. Weiterhin gilt $g(b) = f(b) - \gamma > 0$, da $f(b) > \gamma$ nach Voraussetzung. Da $g(x)$ als Differenz aus einer stetigen und einer konstanten, also ebenfalls stetigen Funktion stetig auf $[a,b]$ ist, erfüllt $g(x)$ den Nullstellensatz. Damit folgt, dass in $[a,b]$ ein $c$ existiert mit $g(c) = 0$. Daraus folgt $f(c) - \gamma = 0$ und schließlich $f(c) = \gamma$. Da $\gamma$ ein beliebiger Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ist, nimmt $f(x)$ somit jeden Wert zwischen und $f(a)$ und $f(b)$ an.

Die nachfolgende Darstellung veranschaulicht den Sachverhalt für $f(x) = x^3+x^2+2$ und $\gamma = 4$ (Intervall z. B. $a$ = 0,5 ($A(0{,}5;0)$) und $b$ = 1,5 ($B(1{,}5;0)$)). Dazu wird die Funktion um 4 Einheiten nach unten verschoben. Die entstandene Funktion $g(x) = x^3+x^2-2$ hat bei 1 eine Nullstelle. Deshalb nimmt $f(x)$ bei $c$ = 1 ($D(1;0)$) den Wert $f(c)$ = 4 an.




<u>Kompetenzspektrum</u>

Grundkenntnisse zu stetigen Funktionen, Nullstellensatz (GW)

Mathematisch Argumentieren, Begründen (KA)

Finden geeigneter Beweisstrategien (HE)

Beweisen (KA)

Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (DI)

Graphisch Darstellen (DI)

**Analyse der Aufgabe nach den Kriterien für Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen**

<u>Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen</u>

*Bedingungen auf Grund der Beurteilungssituation*

Validität

Die im Kompetenzspektrum aufgeführten Kompetenzen können nur beurteilt werden, wenn die zur Bearbeitung der Aufgabe notwendigen Kenntnisse zum Nullstellensatz und zur Stetigkeit (siehe unten) beherrscht werden. Außerdem ist es wichtig, dass sich die Schüler neue mathematische Zusammenhänge erschließen können, insbesondere fachsprachlich verbal formulierte mathematische Aussagen verstehen. Ist dies der Fall, sollten die genannten Kompetenzen gut beurteilbar sein, nicht von anderen Kompetenzen überlagert werden. Die Aufgabe spricht wichtige mathematische Kompetenzen, wie Herstellen und Veranschaulichen von Zusammenhängen, Argumentieren und Beweisen, an.

Gerechtigkeit

Verständlichkeit: Innerhalb der Aufgabenstellung wird ein neuer mathematischer Satz formuliert. Die dabei verwendeten fachsprachlichen Begriffe und formalen Notationen sind den Schülern jedoch im Regelfall aus dem bisherigen Analysisunterricht der elften Klasse bekannt. Gleiches gilt für die in den Aufträgen enthaltenen Fachbegriffe.

Erwartungstransparenz: Die Schüler können die Aufgabe nur angemessen bearbeiten, wenn sie wissen, was bei den Aufforderungen „Begründen Sie ... “, „Beweisen Sie ...“, „Veranschaulichen Sie ...“ erwartet wird, was in Klasse 11 in der Regel der Fall ist.

Ergebnisorientierung: Die Aufgabe ist in drei Teilaufgaben gegliedert, die wiederum in beurteilbare Teilergebnisse und notwendige Teilkompetenzen aufgespalten werden können.

Schwierigkeit: Alle für die Lösung der Aufgabe erforderlichen Wissenselemente werden innerhalb der Stoffeinheit Einführung in die Differenzialrechnung der Klasse 11 erworben. Sind die Schüler mit diesen (Stetigkeit, Nullstellensatz) vertraut und haben sie bereits selbständig Beweise geführt, hat die Aufgabe inhaltlich und methodisch eine angemessene Schwierigkeit. Zu beachten ist jedoch der heuristische Anspruch, denn es sind selbständig Zusammenhänge zwischen Nullstellensatz und Zwischenwertsatz herzustellen und zu analysieren.

Möglichkeit individueller Wege (Offenheit)

Die Aufgabe ist in den drei Teilaufgaben methodisch offen, kein Lösungsverfahren ist vorgegeben. Zwar wird in b) ein möglicher Beweisansatz benannt, dennoch ist der Zusammenhang zwischen Nullstellensatz und Zwischenwertsatz selbständig zu finden, zu formulieren und für die Beweisführung nutzbar zu machen. Für alle drei Teilaufgaben gibt es naheliegende Strategien, die jedoch individuell umgesetzt und dargestellt werden können.

*Bedingungen durch Anspruch an Aufgabenqualität*

Individuelle und gesellschaftliche Bedeutung der Aufgabe: Die Aufgabe hat inhaltlich keine direkte gesellschaftliche Bedeutung, jedoch auf methodischer Ebene. Das fachwissenschaftliche Begründen und Beweisen kann als Merkmal für das mathematische Niveau des Unterrichts in profilierten Klassen gesehen werden. Auch das selbständige Veranschaulichen mathematischer Sachverhalte zählt zu den wichtigen methodischen Mitteln. Inhaltlich sind Zwischenwertsatz und Nullstellensatz auch in der Hochschulmathematik von Bedeutung. Für leistungsorientierte Schüler kann es durchaus eine Herausforderung und Motivierung sein, sich neue mathematische Sätze selbständig anzueignen, sie zu durchdringen, zu beweisen und Zusammenhänge zu bekannten Aussagen herzustellen.

Kognitive Forderung: Die Schüler werden mit der Aufgabe inhaltlich und methodisch gefördert: Zum einen werden neue Inhalte erworben und eingeordnet und das anspruchsvolle Konzept der Stetigkeit umgesetzt. Zum anderen stellen Beweise und Begründungen für viele Schüler eine erhöhte Anforderung dar, sind insbesondere auch mit anspruchsvollen kognitiven Kompetenzen, wie Analysieren, Synthetisieren, manchmal auch Evaluieren verbunden. Die mathematischen und methodischen Mittel haben die Schüler im Unterricht erworben und sind nun gefordert, sie selbständig umzusetzen.

*Kriterien verbunden mit dem Ziel des Ansprechens vielseitiger mathematischer Kompetenzen*

Darstellend-interpretative Aktivitäten: formal darstellen, graphisch darstellen/veranschaulichen, verbal beschreiben

Heuristisch-experimentelle Aktivitäten: geeignete Argumente und Beweisstrategien finden, Zusammenhänge herstellen, analysieren

Formal-operative Aktivitäten: evtl. algebraische Operationen/Berechnungen ausführen

Kritisch-argumentative Aktivitäten: Schlussfolgerungen ziehen, mathematisch argumentieren, beweisen

**Fazit der Analyse der entscheidenden Kriterien: Die Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen werden erfüllt, wenn die Schüler mit dem Konzept der Stetigkeit und dem Nullstellensatz vertraut sind und bereits selbständig bewiesen haben.**

<u>Komplexitätsbeschreibende Merkmale von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen</u>

Komplexität der einbezogenen mathematischen Inhalte

Wissenseinheit/Stoffgebiet und curriculare Wissensstufe: Es werden aus der Stoffeinheit Einführung in die Differenzialrechnung die Wissenseinheiten „Stetigkeit" und „Nullstellensatz" angesprochen und somit ausschließlich Inhalte der Analysis der Sekundarstufe II verbunden.

Art des Wissens: Faktenwissen (Nullstellensatz, einschließlich Voraussetzungen), prozedurales Wissen (graphisches Darstellen von Funktionen), konzeptuelles Wissen (Analyse von Funktionsgraphen, Anforderungen an Beweise und fachliche Argumentationen)

Es liegt eine selbständige Verknüpfung neu erlernter, anspruchsvoller Wissenselemente aus einem abgegrenzten Bereich der Sekundarstufe II vor: Anforderungsbereich 2.

Komplexität bezüglich spezifischer Aktivitätsbereiche

Anforderungen im heuristischen Bereich: Die Anforderungen im heuristischen Bereich ergeben sich vor allem aus dem zielgerichteten Herstellen und Analysieren der Zusammenhänge zwischen den beiden Sätzen. Alle Teilaufgaben sind methodisch offen. Für den Beweis in b) wird ein möglicher Ansatz benannt. Auswahl und Anordnung der Argumente haben die Schüler selbst vorzunehmen. Da die zu findende Idee der Differenzfunktion eine neuartige Beweisstrategie sein sollte, werden die Anforderungen Bereich 3 zugeordnet.

Anforderungen im formal-operativen Bereich: Es handelt sich um begriffliche Argumentationen, die z. T. auf formale Darstellungen zurückgreifen. Formale Operationen und Verfahren sind in der Regel nicht erforderlich.

Anforderungen im darstellend-interpretativen Bereich: Es sind selbständig formale Darstellungen auszuwählen und gemeinsam mit verbalen Analysen und Argumentationen anzuordnen. Anspruchsvoll ist die graphische Veranschaulichung der Zusammenhänge zwischen beiden Sätzen, die über das Übersetzen formaler in graphische Darstellungen deutlich hinausgeht. Die Schüler müssen zunächst Funktionen finden, welche zur Veranschaulichung der Zusammenhänge geeignet sind, diese darstellen und schließlich die Zusammenhänge in der Grafik kenntlich machen oder verbal erläutern. Diese Anforderungen sind komplex und neuartig: Anforderungsbereich 3.

Anforderungen im kritisch-argumentativen Bereich: Die Argumentationen sollten sich sowohl bei der Begründung in a) als auch beim Beweis in b) aus verbalen Argumentationen und formalen Darstellungen zusammensetzen, wobei die formalen Darstellungen vor allem Mittel der Präzisierung sind. Die Argumentation ist nicht sehr komplex, da nur wenige Wissenselemente zu verbinden sind, stellt jedoch Anforderungen an die mathematische Stringenz. So ist die Differenzfunktion ein Mittel, die Zusammenhänge zwischen den Funktionen präzise darzustellen und den Beweis mathematisch exakt und logisch schlüssig zu führen. Die formalen, allgemeinen Beweise der Analysis stellen für die Schüler zu diesem Zeitpunkt in der Regel eine neuartige Anforderung dar: Anforderungsbereich 3.

**Aufgabenspezifische Beurteilungskriterien**

1. Grundwissen (GW)

Folgende Wissensinhalte sind zur Lösung der Aufgabe (voraussichtlich) notwendig:

- Nullstellensatz für stetige Funktionen,
- Stetigkeit, stetige Funktionen,
- Nullstellen von Funktionen.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Das aufgelistete zur Lösung der Aufgabe notwendige Grundwissen wird korrekt dargelegt und angewendet. Der Lösungsweg enthält keine Fehler oder Lücken/Abbrüche, die offensichtlich fehlendem Grundwissen zuzuschreiben sind. |
| 3 Punkte | Alle Wissensinhalte werden beherrscht, aber ein Wissenselement ist nicht exakt abrufbar, z. B. Nullstellensatz nicht exakt dargelegt/nicht alle Voraussetzungen benannt. |
| 2 Punkte | Wichtige Kenntnisse werden dargelegt, aber ein wesentlicher Inhalt des aktuellen Stoffes, z. B. die Stetigkeit, ist nicht oder nicht richtig anwendungsbereit. |
| 1 Punkt | Elementare Kenntnisse werden gezeigt, aber es werden auch deutliche Unsicherheiten/Fehler/Lücken im aktuellen Grundwissen sichtbar, z. B. nur grobe Vorstellungen zum Nullstellensatz. |
| 0 Punkte | Die Aufgabe kann auf Grund fehlender Grundkenntnisse nicht gelöst werden, z. B. wenn der Nullstellensatz nicht zur Verfügung steht. |

2. Finden geeigneter Beweisstrategien (HE)

Die Schüler müssen einen Weg finden, den Zwischenwertsatz nachzuweisen. Dazu wurde ein Hinweis, eine Idee gegeben. Das genaue Verfahren bzw. die genaue Argumentationsbasis müssen die Schüler selbst entwickeln. Der nahe liegende, in der Beispiellösung skizzierte Weg bezieht verschiedene heuristische Strategien ein: Betrachten einer konkreten Stelle, Bilden und Analysieren der Differenzfunktion etc.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Beweisstrategie und Argumentationsbasis passen zur Behauptung und den Voraussetzungen. Die Argumentationsbasis ist mathematisch exakt, lässt eindeutige, fundierte logische Schlüsse zu. Der Nachweis erfolgt vollständig, z. B. exakte Rückführung auf den Nullstellensatz und Prüfen aller Voraussetzungen. Es ist ein eigenständiger Denkprozess erkennbar. Die gewählten Argumente sind zielorientiert. |
| 3 Punkte | Die Beweisstrategie ist geeignet, enthält jedoch leichte Unexaktheiten, nicht alle Argumente sind ausreichend fundiert oder die Strategie ist umständlich. |
| 2 Punkte | Die Anforderungen werden im Wesentlichen erfüllt, die Strategien sind jedoch nur teilweise angemessen, teilweise wird intuitiv begründet oder die Argumentation ist unvollständig, z. B. werden nicht alle Voraussetzungen des Nullstellensatzes geprüft. |
| 1 Punkt | Das Verfahren entspricht nicht den wissenschaftlichen Anforderungen an mathematische Beweise, z. B. nur Skizze (graphische Plausibilisierung). |
| 0 Punkte | Es wurde kein angemessenes Beweisverfahren gefunden. |

3. Mathematisch argumentieren (KA)

In Teilaufgabe a) ist zunächst zu begründen, warum der Nullstellensatz ein Spezialfall des Zwischenwertsatzes ist, z. B. indem dargestellt wird, dass die Bedingung $f(a) < 0 < f(b)$ ein Spezialfall der Bedingung $f(a) \neq f(b)$ ist. Da $f$ stetig ist, sind dann mit den Voraussetzungen des Nullstellensatzes auch die des Zwischenwertsatzes erfüllt. In b) kann der Zwischenwertsatz mit einer geeigneten Differenzfunktion auf den Nullstellensatz zurückgeführt werden. Die Rückführung ist exakt darzustellen und es ist zu zeigen, dass die Differenzfunktion die Voraussetzungen des Nullstellensatzes erfüllt.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Die Argumentationsbasis ist sinnvoll gewählt. Die Argumentation ist sachlich, logisch und formal korrekt bzw. widerspruchsfrei und vollständig, enthält aber auch keine nicht-relevanten Schritte bzw. Wiederholungen. Sie ist gut nachvollziehbar und schlüssig, sprachlich und fachsprachlich korrekt formuliert. |
| 3 Punkte | Die Argumentationskette enthält kleine Sprünge. Die Argumentation ist zu einem geringen Teil ungenau oder nicht ausreichend fundiert, z. B. wird nicht gezeigt, dass beide Bedingungen des Nullstellensatzes erfüllt sind. |
| 2 Punkte | Es gibt (kleine) logische oder mathematische Fehler, die Argumentation ist schlecht nachvollziehbar, enthält Lücken. Die Argumente sind z. T. nicht angemessen, die Folgerungen nicht ausreichend abgesichert, z. B. Folgern mittels Nullstellensatz ohne Prüfen der Voraussetzungen oder nur anschauliche Begründung anhand der Stetigkeit (b). |
| 1 Punkt | Die Argumentation enthält mehrfach Aussagen ohne Begründung und Absicherung, mathematische und logische Fehler, ist insgesamt oberflächlich, voreilig. |
| 0 Punkte | Jegliche Argumentation/Begründung fehlt. |

4. Beweisen (KA)

Innerhalb dieser Kompetenz wird die Gestaltung des gesamten Beweises in b) betrachtet. Teilaspekte sind dabei die Argumentation, die Auswahl und Ausführung des Beweisverfahrens und ein unter fachwissenschaftlichen Maßstäben geeigneter Beweisaufbau.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Das Beweisverfahren bzw. die Argumentationsbasis passt zur Behauptung. Die Argumentation ist mathematisch exakt, sachlich und logisch korrekt. Die Argumentation ist vollständig, enthält aber auch keine überflüssigen Schritte. Der Beweis ist schlüssig und gut nachvollziehbar, verständlich und effektiv. Der Beweis entspricht auch formal, z. B. im Aufbau, fachwissenschaftlichen Anforderungen. |
| 3 Punkte | Der Beweis ist korrekt, enthält aber formale Fehler, z. B. fehlt der Beweisschluss. Die Argumentation ist formal fundiert und vollständig, aber nicht ganz schlüssig aufgebaut, z. B. wenig Kommentierung, einzelne Argumente werden nicht aufeinander bezogen. |
| 2 Punkte | Der Beweis ist nur schwer nachvollziehbar/verständlich (schlechte Darlegung), nicht angemessen aufgebaut. Die Argumentation ist nur z. T. fundiert (siehe oben). |
| 1 Punkt | Das Verfahren entspricht nicht den wissenschaftlichen Anforderungen an mathematische Beweise, z. B. Betrachtung von Beispielen/Spezialfällen oder (nur) graphische Plausibilisierung. Die Argumentation ist oberflächlich oder nur ein kleiner Teil der gesamten Beweisführung wird angemessen vollzogen. |
| 0 Punkte | Es wurde kein angemessener Beweis geführt, z. B. kein sinnvoller Zusammenhang mit der Aufgabenstellung. |

5. Graphisch Darstellen (DI)

Von den Schülern sind anhand selbstgewählter Funktionen die in a) und b) verwendeten Zusammenhänge zwischen Nullstellensatz und Zwischenwertsatz zu veranschaulichen. Die Grafik sollte die mit dem Zwischenwertsatz zu betrachtende Funktion sowie deren Modifikation (Verschiebung) zur Anwendung des Nullstellensatzes enthalten. Die Stelle, die konkret betrachtet wird, sollte hervorgehoben oder in einer Beschreibung benannt werden. Die Verschiebung sollte erkennbar und die Funktionen sollten geeignet bezeichnet sein.

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Die graphische Darstellung ist in der Übersetzung der Inhalte der Sätze und der Zusammenhänge zwischen ihnen korrekt. Die Darstellung ist übersichtlich (geeignete Größe und Intervall) und exakt. Die Auswahl der Funktionen ist korrekt (z. B. stetige Funktionen) und zur Veranschaulichung geeignet. |
| 3 Punkte | Die graphische Darstellung ist korrekt, aber unübersichtlich, z. B. Intervall/Größe ungünstig oder ungenau. Die Veranschaulichung der Zusammenhänge ist nicht optimal, z. B. Verschiebung nicht gekennzeichnet/beschrieben. |
| 2 Punkte | Die Grafik enthält mathematische Fehler, z. B. sind die gewählten Funktionen nicht stetig oder nicht wirklich nur verschoben, oder sie ist unvollständig, z. B. nur Nullstellensatz dargestellt, oder sehr unsauber. |
| 1 Punkt | Mehrere der oben genannten Fehler treten auf oder die Grafik ist sehr oberflächlich. |
| 0 Punkte | Eine graphische Veranschaulichung fehlt. |

6. Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (DI)

Die formale Fachsprache kann innerhalb der verbalen Argumentationen eingeschätzt werden. Mögliche auftretende Fachbegriffe sind: „Nullstelle“, „Nullstellensatz“, „stetig“, „Differenzfunktion“, „Intervall“, „Spezialfall“, „Bedingungen“, „Voraussetzungen“ oder ähnliche/äquivalente fachsprachliche Begriffe. Außerdem kann der selbständige Einsatz mathematischer Symbole und Notationen eingeschätzt werden (korrekte, exakte funktionale Darstellungen, logische Symbole, Angaben von Intervallen etc.).

| | |
|---|---|
| 4 Punkte | Alle in der Bearbeitung auftretenden Begriffe, Formulierungen, Notationen und Symbole entsprechen den Normen der wissenschaftlichen mathematischen Fachsprache. Die Auswahl der Begriffe und Notationen ist mathematisch korrekt. Alle Formulierungen sind präzise und eindeutig und auch sprachlich korrekt. Die gewählten Notationen sind aussagekräftig, exakt, eindeutig und nachvollziehbar. Die symbolische und verbale Darlegung ist angemessen ausführlich und der Lösungsfindung dienlich. |
| 3 Punkte | Die Verwendung der mathematischen Notationen und Begriffe ist sparsam, unsicher, insbesondere beim kreativen Einsatz innerhalb der Argumentation. Zu einem geringen Teil fließen umgangssprachliche Redewendungen ein. Es gibt einzelne Flüchtigkeitsfehler in der formalen Darstellung. |
| 2 Punkte | Ausdrucksfehler treten auf, teilweise wird umgangssprachlich argumentiert oder es gibt einzelne mathematische Fehler, z. B. falsche Fachbegriffe. Die formale Darstellung ist z. T. ungeeignet oder eingeschränkt lesbar, flüchtig, nicht eindeutig oder unexakt, z. B. ungenaue Angabe der Intervalle, Fehler bei der Angabe der Intervalle. |
| 1 Punkt | Fehler und Umgangssprache treten auch bei Standardformulierungen auf. |
| 0 Punkte | Die verbale Darstellung ist gänzlich umgangssprachlich, die Notationen sind intuitiv. |

**Beurteilungsbogen**

Einschätzung der Bearbeitung der Aufgabe Zwischenwertsatz (11B4.2)

Name:

| Mathematische Kompetenz | Einschätzung | Bemerkung |
|---|---|---|
| Grundwissen (GW) | | |
| Finden geeigneter Beweisstrategien (HE) | | |
| Mathematisch Argumentieren (KA) | | |
| Beweisen (KA) | | |
| Graphisch Darstellen (DI) | | |
| Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (DI) | | |
| weitere Bemerkungen/<br>besondere Leistungen | | |

## Anhang 1.4: Aufgaben der differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen für das Stoffgebiet Analysis in Klasse 12 (zu Abschnitt 4.2.8)

| **Aufgabe** | **Kompetenzspektrum** |
|---|---|
| **Aufgabe 12B1.1: Beleuchtungsminimum**<br><br>Auf der geradlinigen Verbindung zweier Lichtquellen mit den Lichtstärken $I_1$ bzw. $I_2$ soll derjenige Punkt $X$ zwischen den Lichtquellen bestimmt werden, in dem die schwächste Beleuchtung stattfindet. Dabei ist die Beleuchtungsstärke zur Lichtstärke einer Lichtquelle direkt und zum Quadrat der Entfernung von der Lichtquelle indirekt proportional.<br><br>a) Stellen Sie den Sachverhalt graphisch dar.<br>b) In welchem Verhältnis teilt $X$ die Verbindungsstrecke der beiden Lichtquellen?<br>c) Bestimmen Sie den Punkt $X$ der schwächsten Beleuchtung.<br>d) Begründen Sie, dass das aufgestellte mathematische Modell physikalischen Vorstellungen gerecht wird, indem Sie einige interessante Spezialfälle betrachten und interpretieren. | Graphisch Darstellen (DI)<br>Übersetzen (DI)<br>Zusammenhänge herstellen (HE)<br>Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)<br>Ausführen formaler Verfahren (FO)<br>Ausführen algebraischer Operationen (FO)<br>Umformungen, Berechnungen (FO)<br>Schlussfolgerungen ziehen (KA)<br>Mathematisch Argumentieren (KA)<br>Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (DI) |
| **Aufgabe 12B1.2: Newtonverfahren und Modifiziertes Newtonverfahren**<br><br>Im sogenannten Modifizierten Newtonverfahren (MNV) wird der Näherungswert $x_{n+1}$ aus $x_n$ berechnet, indem anstelle der Tangente von $f(x)$ in $(x_n; f(x_n))$ die Parallele zur Tangente von $f(x)$ in $(x_0;f(x_0))$ durch den Punkt $P(x_n; f(x_n))$ betrachtet wird.<br><br>a) Stellen Sie das Verfahren für die Berechnung der Nullstelle einer geeigneten Funktion graphisch dar. | Grundwissen: Newtonverfahren, Tangente in einem Punkt, Konvergenz (GW)<br>Graphisch Darstellen (DI)<br>Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)<br>Nutzen heuristischer Strategien (HE)<br>Ausführen algebraischer Operationen (FO)<br>Vergleichen, Diskutieren, Werten (KA)<br>Mathematisch Argumentieren (KA)<br>Fachsprachlich verbal und formal Darstellen |

| | |
|---|---|
| b) Leiten Sie die allgemeine Iterationsvorschrift für die Berechnung von $x_{n+1}$ aus $x_n$ her.<br>c) Welche Vorteile und welche Nachteile gegenüber dem Newtonverfahren (NV) erkennen Sie? Vergleichen und werten Sie beide Verfahren anhand der graphischen Darstellung und der Iterationsvorschrift.<br>d) Berechnen Sie mittels NV und MNV die Nullstelle der Funktion $f(x)=x^3-0{,}1x-2$ auf 3 Nachkommastellen genau (Anfangswert $x_0=1$).<br>e) Das MNV konvergiert nicht für beliebige Funktionen $f(x)$ und Startwerte $x_0$. Stellen Sie einen solchen Fall graphisch dar und begründen Sie die vermutete Divergenz anhand der Zeichnung. | (DI)<br>Ausführen formaler Verfahren (FO) |
| **Aufgabe 12B2.1: Funktionenschar**<br>Die Funktion $f(x)$ sei der Quotient zweier Polynome $Z(x)$ und $N(x)$ wobei $N(x)=x+4$.<br>a) Geben Sie alle Polynome $Z(x)$ an, so dass die Funktion $g$ mit $g(x)=x$ Asymptote von $f(x)$ ist. Begründen Sie ihre Auswahl.<br>b) Bestimmen Sie Nullstellen, Polstellen und Extremstellen für die in a) gefundene Funktionenschar und legen Sie deren Abhängigkeit vom freien Parameter dar.<br>c) Zeichnen Sie vier Funktionen der Schar, die besondere Fälle charakterisieren.<br>d) Finden Sie drei weitere Funktionen für $Z(x)$, die keine Polynome sind, aber sonst die in a) geforderte Eigenschaft besitzen. Begründen Sie, dass die von Ihnen gefundenen Funktionen diese Eigenschaft besitzen. | Grundwissen: Polynome, Polynomdivision, Kurvendiskussion (GW)<br>Geeignete Lösungsstrategien finden (HE)<br>Ausführen formaler Verfahren (FO)<br>Analysieren (HE)<br>Graphisch Darstellen (DI)<br>Kreatives mathematisches Denken und Nutzen heuristischer Strategien (HE)<br>Mathematisch Argumentieren (KA)<br>Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (FO) |

| **Aufgabe 12B3.1: „Integral der Wurzelfunktion"** | |
|---|---|
| Gesucht ist das Integral der Funktion $f(x)=\sqrt{x}$ über dem Intervall $[0;b]$.<br>a) Warum ist die Funktion $f(x)=\sqrt{x}$ über $[0;b]$ integrierbar?<br>b) Berechnen Sie das untere und das obere Integral der Funktion $f(x)=\sqrt{x}$ über dem Intervall $[0;1]$. Warum ist die Zerlegung des Intervalls in $n$ gleichlange Teilintervalle durch $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}=1$ hier nicht günstig? Wählen Sie dafür die Zerlegung durch $0, \left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \dots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2, \left(\frac{n}{n}\right)^2=1$. Begründen Sie, warum diese Zerlegungsfolge gewählt werden kann, um das bestimmte Intergral der Funktion $f(x)=\sqrt{x}$ über dem Intervall $[0;1]$ zu ermitteln.<br>c) Stellen Sie die Funktion, die Zerlegung in Teilintervalle (2. Zerlegung) sowie die Approximation der Fläche durch Unter- und Obersumme in geeigneter Form grafisch dar.<br>d) Übertragen Sie die Rechnung auf ein Intervall $[0;b]$ und geben Sie das bestimmte Integral von $f(x)=\sqrt{x}$ über dem Intervall $[0;b]$ an. | Grundwissen: bestimmtes Integral, Ober- und Untersumme, Integrierbarkeit (GW)<br>Übersetzen (DI)<br>Ausführen formaler Verfahren (FO)<br>Ausführen formaler Operationen (FO)<br>Analysieren (HE)<br>Graphisch Darstellen (DI)<br>Mathematisch Argumentieren (KA)<br>Formal und fachsprachlich verbal Darstellen (FO) |

| | |
|---|---|
| **Aufgabe 12B3.2: Analyse und Flächenbestimmung von $f_t(x)$**<br><br>Für jedes ganzzahlige $t \neq 0$ sei die Funktion $f_t : IR \to IR$ mit $f_t(x) = x^3 - 3t^2x + 2t^3$ gegeben.<br><br>a) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f_t$, den Schnittpunkt mit der $y$-Achse und das Verhalten im Unendlichen.<br>b) Skizzieren Sie den prinzipiellen Verlauf des Graphen von $f_t$ für $t$>0 und für $t$<0.<br>c) Geben Sie zwei verschiedene Stammfunktionen von $f$ an.<br>d) Es sei nun $t$=-1 und $A$ der Flächeninhalt der Punktmenge, die der Graph von $f_{-1}$ mit der $x$-Achse und der Geraden $x$=3 vollständig einschließt. Beschreiben und begründen Sie einen Weg zur Berechnung von $A$. Berechnen Sie $A$. | <br><br>Grundwissen: bestimmtes Integral, Ober- und Untersumme, Integrierbarkeit (GW)<br>Übersetzen (DI)<br>Ausführen formaler Verfahren (FO)<br>Ausführen formaler Operationen (FO)<br>Analysieren (HE)<br>Graphisch Darstellen (DI)<br>Mathematisch Argumentieren (KA)<br>Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (DI) |
| **Aufgabe 12B4.1: Kontraktion und Fixpunkt**<br><br>Gegeben sei die Funktion $f$ durch $f(x) = 1-\mu x^2$,<br>($x \in [-1,1]$, $\mu \in IR$).<br><br>a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f$ für $0 \leq \mu \leq 2$ das Intervall $I$=[-1,1] in sich abbildet.<br>b) Zeigen Sie, dass es für $0 \leq \mu < 2$ genau einen positiven Fixpunkt gibt und dass für $\mu$=2 ein weiterer Fixpunkt, nämlich -1, existiert.<br>c) Zeigen Sie, dass $f$ für $0 \leq \mu < \frac{1}{2}$ eine Kontraktion in $I$ ist.<br>d) Es sei $\mu$ = 0,6. Bestimmen Sie den Fixpunkt und geben Sie ein Intervall $J$ um diesen Fixpunkt an, das durch $f$ auf sich abgebildet wird und in dem $f$ eine Kontraktion ist. | <br><br>Grundwissen: Abbildung in sich, Kontraktion, Fixpunkt etc. (GW)<br>Finden geeigneter Lösungs- und Nachweisverfahren (HE)<br>Übersetzen (DI)<br>Ausführen formaler Operationen (FO)<br>Analysieren (HE)<br>Mathematisch Argumentieren (KA)<br>Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (FO) |

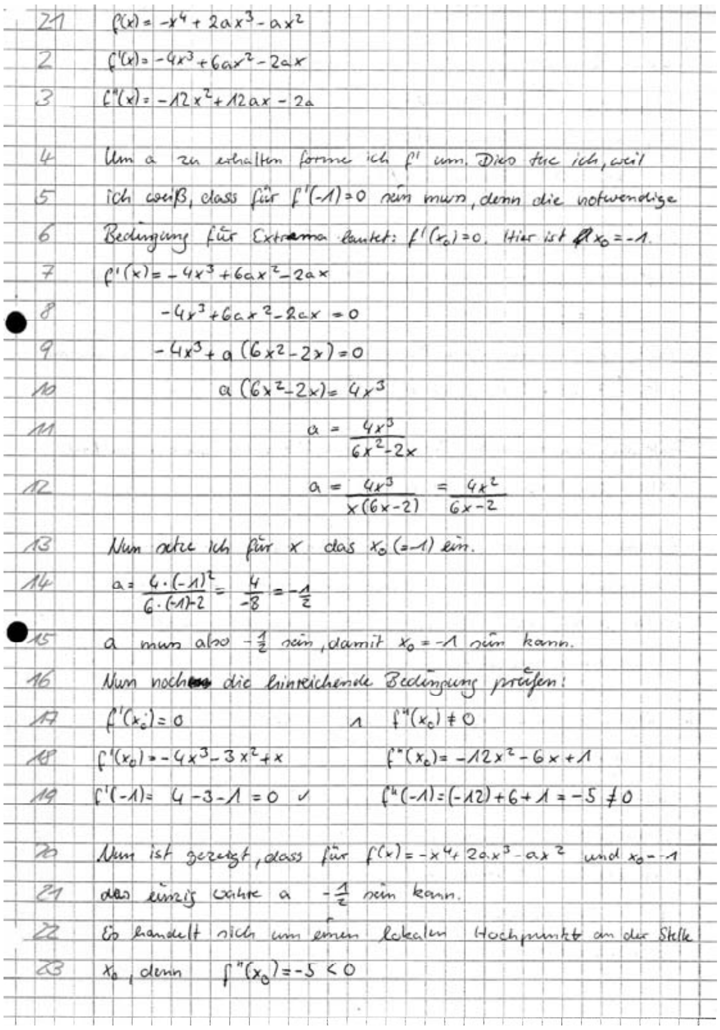
| | |
|---|---|
| **Aufgabe 12B5.1: Berechnung komplexer Integrale**<br>Berechnen Sie folgende Integrale<br>a) $\int \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx$, b) $\int e^{x^2}\,dx$<br>c) $\int \sin^3 x \cos x\,dx$, d) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{(\tan x)}}{\cos^2 x}\,dx$<br>Legen Sie Ihren Lösungsweg ausführlich dar und begründen Sie Ihr Vorgehen.<br>Prüfen Sie jeweils durch Differenzieren, ob die gefundenen Stammfunktionen tatsächlich welche sind. | Finden geeigneter Lösungsstrategien HE<br>Ausführen formaler Verfahren (FO)<br>Ausführen formaler Operationen (FO)<br>Mathematisch Argumentieren (KA) |
| **Aufgabe 12B6.1 Induktionsbeweis zur Ableitung der Logarithmusfunktion**<br>Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die $n$-te Ableitung, $n \geq 1$, der Funktion $f(x) = \ln x$ gilt<br>$f^{(n)}(x) = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{x^{(n)}}$. | Grundwissen: vollständige Induktion, Ableitungsregeln (GW)<br>Ausführen formaler Verfahren (FO)<br>Ausführen formaler Operationen (FO)<br>Mathematisch Argumentieren, Beweisen (KA) |
| **Aufgabe 12B7.1: Allgemeine Exponentialfunktion**<br>Die Exponentialfunktion $f(x) = b^x$, $x \in IR$, ($b$>0), heißt allgemeine Exponentialfunktion.<br>a) Zeigen Sie, dass die allgemeine Exponentialfunktion auf die natürliche Exponentialfunktion zurückgeführt werden kann, in dem Sie die Darstellung $b^x = e^{x \cdot \ln b}$ beweisen.<br>b) Bestimmen Sie die Ableitung und eine Stammfunktion von $f(x) = b^x$.<br>c) Folgern Sie aus b) die Grenzwertdarstellung $\ln b = \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$ des natürlichen Logarithmus. | Grundwissen: Logarithmengesetze, Ableitungsregeln, Integrationsregeln, Differenzialquotient (GW)<br>Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)<br>Ausführen formaler Operationen (FO)<br>Mathematisch Argumentieren, Beweisen (KA)<br>Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (DI) |

| | |
|---|---|
| **Aufgabe 12B8.1: „Abschätzung der Logarithmusfunktion“**<br>Es sei $x > 1$. Leiten Sie aus der Integraldarstellung der ln-Funktion die Abschätzung<br>$2\frac{x-1}{x+1} \leq \ln x \leq \frac{x^2-1}{2x}$<br>her, indem Sie den Integranden $\frac{1}{t}$ im Integrationsintervall von unten durch die Tangente angelegt im Intervallmittelpunkt und von oben durch die Sekante abschätzen.<br>Beweisen Sie, dass der Graph von $\frac{1}{t}$ tatsächlich zwischen der Tangente und der Sekante liegt.<br>Vergleichen Sie für $x > 1$ die obige Abschätzung mit der im Unterricht behandelten Abschätzung<br>$1-\frac{1}{x} \leq \ln x \leq x-1$.<br>Welche Abschätzung ist schärfer? | Übersetzen, Veranschaulichen (DI)<br>Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)<br>Finden geeigneter Nachweisstrategien (HE)<br>Ausführen formaler Operationen (FO)<br>Mathematisch Argumentieren, Beweisen (KA)<br>Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (DI) |

# Anhang 2 Ergänzende Materialien zu der in Kapitel 5 beschriebenen schulpraktischen Untersuchung

## Anhang 2.1 Beispiel für eine Schülerlösung und deren aktivitätenbezogene Analyse zur Aufgabe Extrema einer Funktion mit Parameter

Die Analyse der Aufgabe 11B6.1 Extrema einer Funktion mit Parameter und deren Umsetzung wird in Kapitel 5 dargestellt.



Z1 $f(x) = -x^4 + 2ax^3 - ax^2$
2 $f'(x) = -4x^3 + 6ax^2 - 2ax$
3 $f''(x) = -12x^2 + 12ax - 2a$

4 Um a zu erhalten forme ich f' um. Dies tue ich, weil
5 ich weiß, dass für $f'(-1)=0$ sein muss, denn die notwendige
6 Bedingung für Extrema lautet: $f'(x_0)=0$. Hier ist $x_0=-1$.
7 $f'(x) = -4x^3 + 6ax^2 - 2ax$
8 $-4x^3 + 6ax^2 - 2ax = 0$
9 $-4x^3 + a(6x^2 - 2x) = 0$
10 $a(6x^2 - 2x) = 4x^3$
11 $a = \frac{4x^3}{6x^2 - 2x}$
12 $a = \frac{4x^3}{x(6x-2)} = \frac{4x^2}{6x-2}$
13 Nun setze ich für x das $x_0$ (=-1) ein.
14 $a = \frac{4\cdot(-1)^2}{6\cdot(-1)-2} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$
15 a muss also $-\frac{1}{2}$ sein, damit $x_0 = -1$ sein kann.
16 Nun noch die hinreichende Bedingung prüfen:
17 $f'(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_0) \neq 0$
18 $f'(x_0) = -4x^3 - 3x^2 + x \qquad f''(x_0) = -12x^2 - 6x + 1$
19 $f'(-1) = 4 - 3 - 1 = 0$ ✓ $\qquad f''(-1) = (-12) + 6 + 1 = -5 \neq 0$

20 Nun ist gezeigt, dass für $f(x) = -x^4 + 2ax^3 - ax^2$ und $x_0 = -1$
21 das einzig wahre a $-\frac{1}{2}$ sein kann.
22 Es handelt sich um einen lokalen Hochpunkt an der Stelle
23 $x_0$, denn $f''(x_0) = -5 < 0$

Aktivitätenbezogene Analyse der Schülerarbeit:

Z1-2: die Funktion notieren und die erste Ableitung bilden (FO)

Z3: die zweite Ableitung bilden FO)

Z4-7: einen Lösungsansatzes finden, das weitere Vorgehens beschreiben und begründen (DI, KA, HE, GW)

Z8-14: die Funktionsgleichung umformen und den Parameter *a* bestimmen (FO)

Z15: das Ergebnis verbal formulieren (DI)

Z16-19: die hinreichende Bedingung formal prüfen (FO)

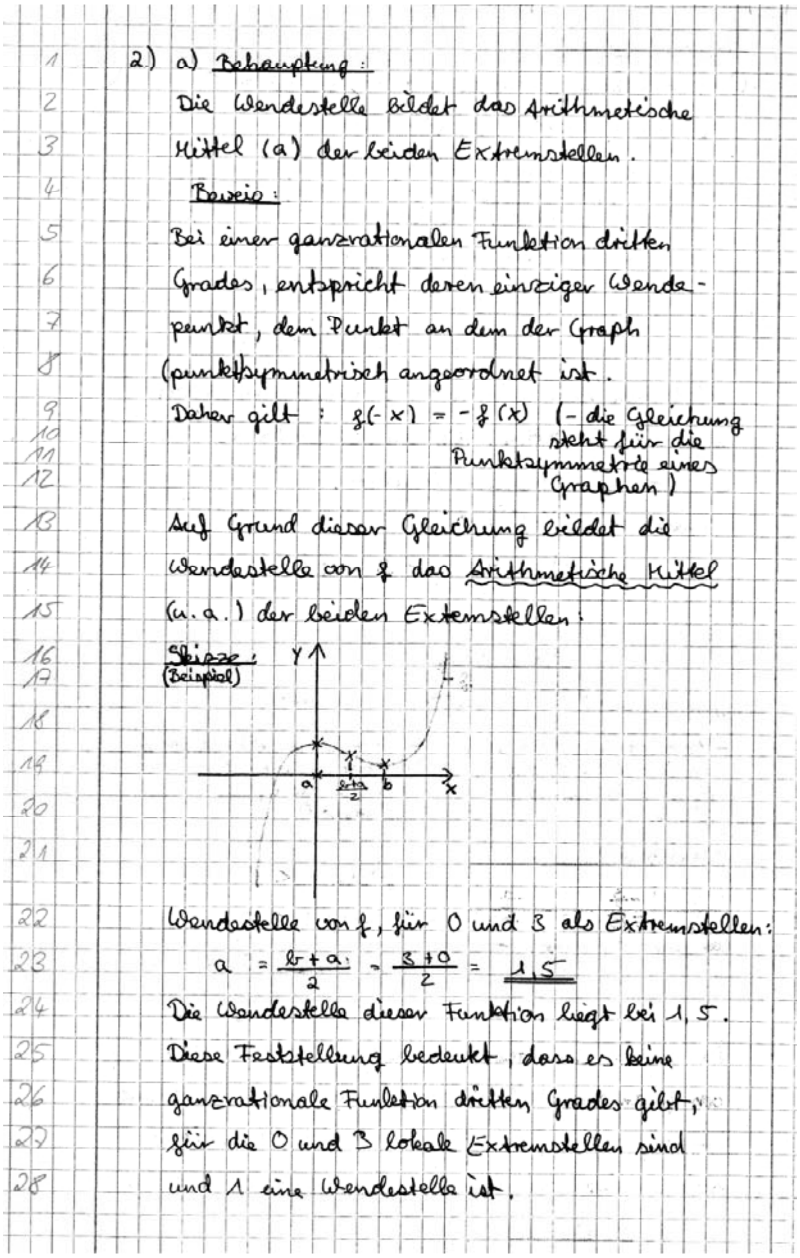
Z20-23: verbal zusammenfassen und eine Schlussfolgerung formulieren (KA, DI)

Die Schülerlösung ist ein typisches Beispiel für den von allen Schülern bei dieser Aufgabe bevorzugten formalen Lösungsweg. Der Schwerpunkt der Aktivitäten des Schülers liegt im formal-operativen Bereich.

# Anhang 2.2 Beispiele für Schülerlösungen und deren aktivitätenbezogene Analysen zur Aufgabe Beweis zum Thema Kurvendiskussion

Die Analyse der Aufgabe 11B6.2 Beweis zum Thema Kurvendiskussion und deren Umsetzungen wird in Kapitel 5 dargestellt.

*LW I: Wendestelle als arithmetisches Mittel der Extrema, Begründung mit der Punktsymmetrie der Funktion*

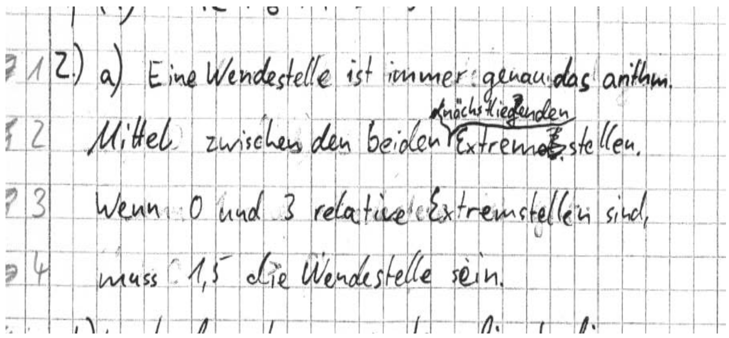

2) a) Behauptung:
Die Wendestelle bildet das Arithmetische Mittel (a) der beiden Extremstellen.
Beweis:
Bei einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, entspricht deren einziger Wendepunkt, dem Punkt an dem der Graph (punktsymmetrisch angeordnet ist.
Daher gilt: $f(-x) = -f(x)$ (- die Gleichung steht für die Punktsymmetrie eines Graphen)
Auf Grund dieser Gleichung bildet die Wendestelle von f das Arithmetische Mittel (a.a.) der beiden Extemstellen:
Skizze: (Beispiel)

Wendestelle von f, für 0 und 3 als Extremstellen:
$a = \frac{b+a}{2} = \frac{3+0}{2} = 1{,}5$
Die Wendestelle dieser Funktion liegt bei 1,5.
Diese Feststellung bedeutet, dass es keine ganzrationale Funktion dritten Grades gibt, für die 0 und 3 lokale Extremstellen sind und 1 eine Wendestelle ist.

Aktivitätenbezogene Analyse der Schülerarbeit:

Z1-3: eine Behauptung aufstellen (KA)
Z4-8: Zusammenhänge zwischen dem Wendepunkt und der Symmetrie des Graphen herstellen und formulieren (HE, DI, GW)
Z9-12: in eine formale Darstellung für die Punktsymmetrie übersetzen (DI)
Z13-15: schließen, dass die Wendestelle von f das arithmetische Mittel der beiden Extremstellen ist (KA)
Z16-21: die Situation graphisch veranschaulichen (DI)
Z22-23: das arithmetische Mittel aus 0 und 3 bestimmen (FO)
Z24: das Ergebnis verbal formulieren (DI)
Z25-28: einen Beweisschluss formulieren (KA)

*LW II: Wendestelle ist arithmetisches Mittel der Extrema*

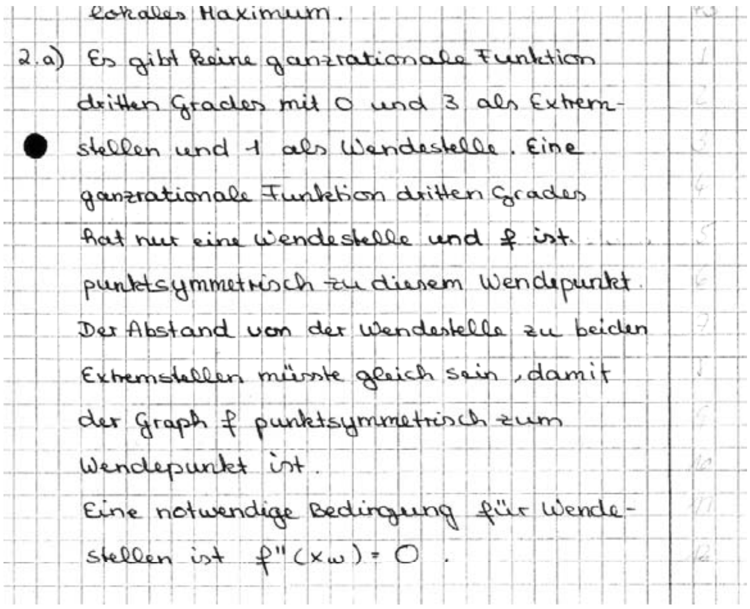

2) a) Eine Wendestelle ist immer genau das arithm.
Mittel zwischen den beiden nächstliegenden Extremstellen.
Wenn 0 und 3 relative Extremstellen sind,
muss 1,5 die Wendestelle sein.

Aktivitätenbezogene Analyse der Schülerarbeit:

Z1-2: Zusammenhänge zwischen dem Wendepunkt und dem arithmetischen Mittel der beiden Extremstellen herstellen und formulieren (HE, DI, GW)

Z3-4: arithmetisches Mittel von 0 und 3 bestimmen, auf die Wendestelle schließen (FO, KA)

*LW III: Nachweis, dass die Wendestelle eines Polynoms dritten Grades immer mittig zwischen den beiden Extrema liegt, anhand der Achsensymmetrie der ersten Ableitung*


lokales Maximum.
2.a) Es gibt keine ganzrationale Funktion
dritten Grades mit 0 und 3 als Extrem-
stellen und 1 als Wendestelle. Eine
ganzrationale Funktion dritten Grades
hat nur eine Wendestelle und f ist
punktsymmetrisch zu diesem Wendepunkt.
Der Abstand von der Wendestelle zu beiden
Extremstellen müsste gleich sein, damit
der Graph f punktsymmetrisch zum
Wendepunkt ist.
Eine notwendige Bedingung für Wende-
stellen ist $f''(x_w) = 0$.

Aktivitätenbezogene Analyse der Schülerarbeit:

Z1-3:eine Behauptung aufstellen (KA)

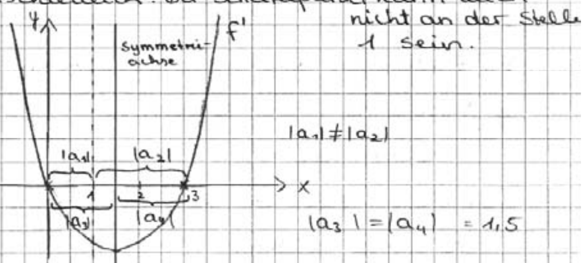
Z3-6: Zusammenhänge zwischen dem Wendepunkt und der Symmetrie des Graphen her stellen und formulieren (HE, DI, GW)

Z7-10: auf Abstandsgleichheit zwischen beiden Extremstellen und der Wendestelle schließen (KA, HE)

Z11-12: die notwendige Bedingung für Extrema notieren (GW)

Z13: konkretisieren (HE)

Also muss gelten $f''(1) = 0$. Das bedeutet, dass $f'$ ein Extremum an der Stelle 1 besitzt.
Die Ableitungsfunktion $f'$ von einer ganzrationalen Funktion dritten Grades ist eine Parabel. Das Extremum ist der Scheitelpunkt von $f'$.
Die Parabel $f'$ hat ein Extremum an der Stelle 1, deswegen ist $f'$ symmetrisch zu der Achse, die durch 1 geht und parallel zu der y-Achse.
Da f 0 und 3 als Extremstellen haben soll, müssen 0 und 3 Nullstellen von $f'$ sein.
Doch wenn dies zutrifft, kann die Symmetrieachse nicht durch 1 verlaufen. Der Abstand von 1 zu den Nullstellen 0 und 3 wären unterschiedlich. Der Scheitelpunkt kann auch nicht an der Stelle 1 sein.




Wenn 0 und 3 Nullstellen von $f'$ sind, muss die Symmetrieachse durch 1,5 verlaufen. Die Parabel hat an der Stelle 1,5 ein Extremum, deswegen muss an der Stelle 1,5 der Wendepunkt liegen.
Somit ist es bewiesen, dass es keine ganzrationale Funktion dritten Grades gibt, die 3 bei 0 und 3 eine Extremstelle und bei 1 eine Wendestelle hat.

Z13-14: Zusammenhänge herstellen und auf die Extremstelle der ersten Ableitung schließen (HE, KA)

Z15-18: Zusammenhänge zu Parabel und Scheitelpunkt herstellen (GW, HE)

Z19-22: konkretisieren und die Parabel der Ableitungsfunktion beschreiben (HE, DI)

Z23-24: auf die Nullstellen der ersten Ableitung schließen (KA, HE)

Z25-29: auf den Ort der Symmetrieachse schließen (KA, HE)

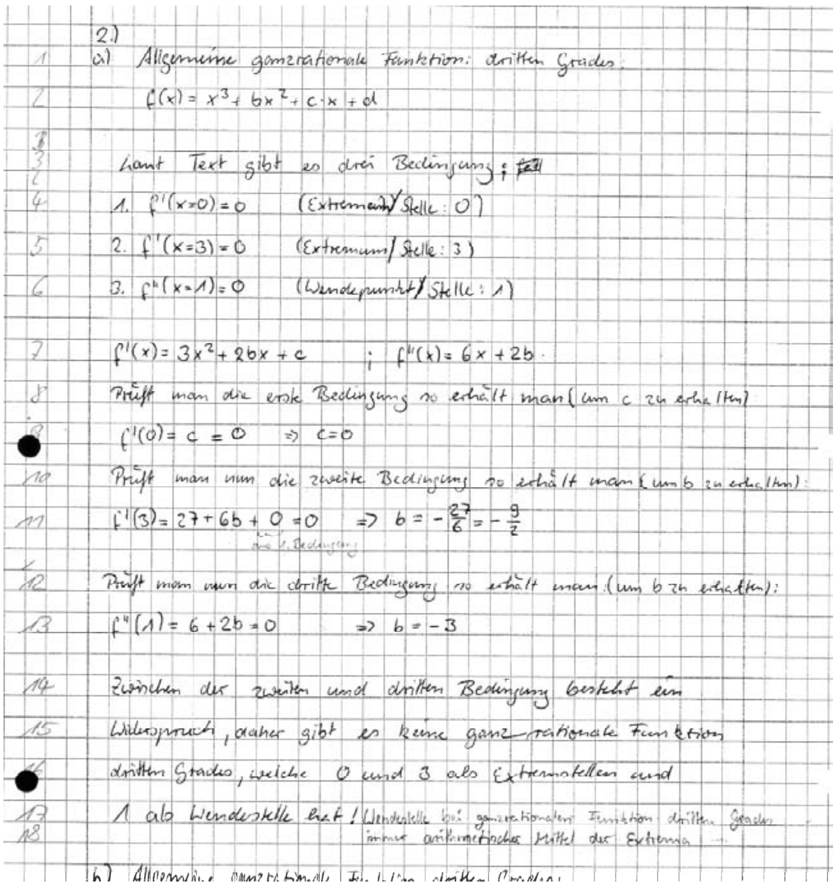
Skizze 1: graphische Veranschaulichung der Situation (DI)

Z30-32: berechnen des arithmetischen Mittels aus 0 und 3 und folgern, dass die Symmetrieachse bei 1,5 liegen muss (FO, KA)

Z32-34: auf die Wendestelle schließen (KA)

Z35-38: Beweisschluss formulieren (KA)

*LW IV: Formaler Weg: Die notwendigen Bedingungen an Extrem- und Wendestellen führen zu einem Widerspruch.*


2.)
1 a) Allgemeine ganzrationale Funktion: dritten Grades:
2 $f(x) = x^3 + bx^2 + c \cdot x + d$
3 Laut Text gibt es drei Bedingungen:
4 1. $f'(x=0)=0$ (Extremum/Stelle: 0)
5 2. $f'(x=3)=0$ (Extremum/Stelle: 3)
6 3. $f''(x=1)=0$ (Wendepunkt/Stelle: 1)
7 $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$ ; $f''(x) = 6x + 2b$
8 Prüft man die erste Bedingung so erhält man (um c zu erhalten)
9 $f'(0) = c = 0 \Rightarrow c = 0$
10 Prüft man nun die zweite Bedingung so erhält man (um b zu erhalten):
11 $f'(3) = 27 + 6b + 0 = 0 \Rightarrow b = -\frac{27}{6} = -\frac{9}{2}$
aus 1. Bedingung
12 Prüft man nun die dritte Bedingung so erhält man (um b zu erhalten):
13 $f''(1) = 6 + 2b = 0 \Rightarrow b = -3$
14 Zwischen der zweiten und dritten Bedingung besteht ein
15 Widerspruch, daher gibt es keine ganz-rationale Funktion
16 dritten Grades, welche 0 und 3 als Extremstellen und
17 1 als Wendestelle hat! (Wendestelle bei ganzrationalen Funktion dritten Grades
18 immer arithmetisches Mittel der Extrema)
b) Allgemeine ganzrationale Funktion dritten Grades:

Aktivitätenbezogene Analyse der Schülerarbeit:

Z1-2: die allgemeine Funktionsgleichung für ganzrationale Funktionen dritten Grades notieren (GW, DI)

Z3-6: die Aufgabenstellung analysieren, Bedingungen ableiten und formal darstellen (HE, DI, GW)

Z7: die erste und zweite Ableitung für die allgemeine Darstellung bilden (FO)

Z8-9: die erste Bedingung formal prüfen und auf den ersten Parameter schließen (FO, KA)

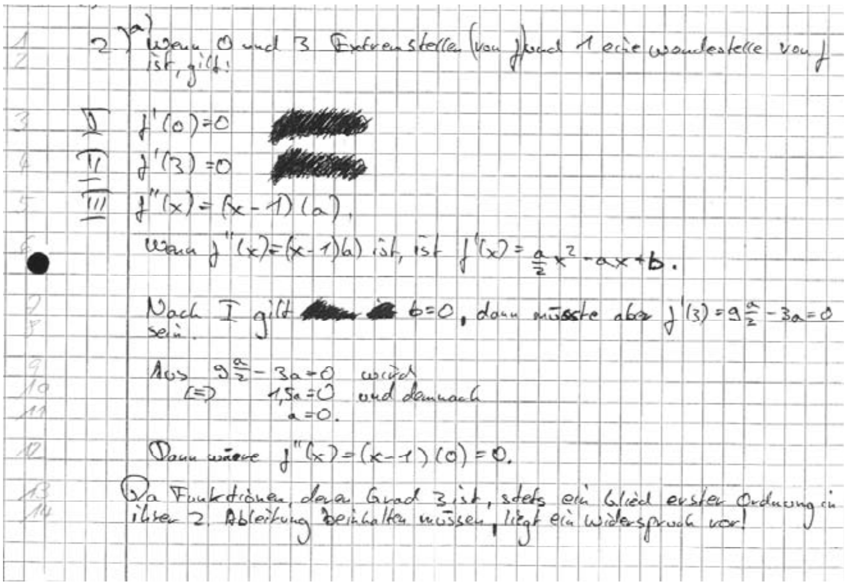
Z10-11:die zweite Bedingung ausführen und auf den zweiten Parameter schließen (FO, KA)

Z12-13:die dritte Bedingung ausführen und auf den dritten Parameter schließen (FO, KA)

Z14-17:die Ergebnisse analysieren und auf einen Widerspruch schließen (FO, KA)

(Z17-18: zusätzliches überflüssiges Notieren von Grundwissen)

*LW V: ‚Aufleiten' der zweiten Ableitung, die mit den notwendigen Bedingungen an Wendestellen gegeben ist. Notwendige Bedingungen für Extrema führen zum Widerspruch.*


2) a) Wenn 0 und 3 Extremstelle von f und 1 eine Wendestelle von f ist, gilt:

I $f'(0)=0$ [redacted]

II $f'(3)=0$ [redacted]

III $f''(x)=(x-1)(a)$.

Wenn $f''(x)=(x-1)(a)$ ist, ist $f'(x)=\frac{a}{2}x^2-ax+b$.

Nach I gilt [redacted] $b=0$, dann müsste aber $f'(3)=9\frac{a}{2}-3a=0$ sein.

Aus $9\frac{a}{2}-3a=0$ würde
$\Leftrightarrow 1{,}5a=0$ und danach
$a=0$.

Dann wäre $f''(x)=(x-1)(0)=0$.

Da Funktionen, deren Grad 3 ist, stets ein Glied erster Ordnung in ihrer 2. Ableitung beinhalten müssen, liegt ein Widerspruch vor!

Aktivitätenbezogene Analyse der Schülerarbeit:

Z1-5: die Aufgabenstellung analysieren, auf Bedingungen schließen und diese formal darstellen (HE, FO, DI, GW)

Z6: auf eine Darstellung für die erste und zweite Ableitung schließen (HE, KA, DI)

Z7-8: aus der ersten Bedingung auf den ersten Parameter schließen und diesen in die zweite Bedingung einsetzen (FO, KA)

Z9-11: berechnen und formal auf den dritten Parameter schließen (FO, KA)

Z12: die zweite Ableitung formal darstellen (DI)

Z13-14: einen Beweisschluss formulieren (KA)

## Anhang 2.3 Analyse der Aufgabe Flächenmaximum unter der Wurzelfunktion

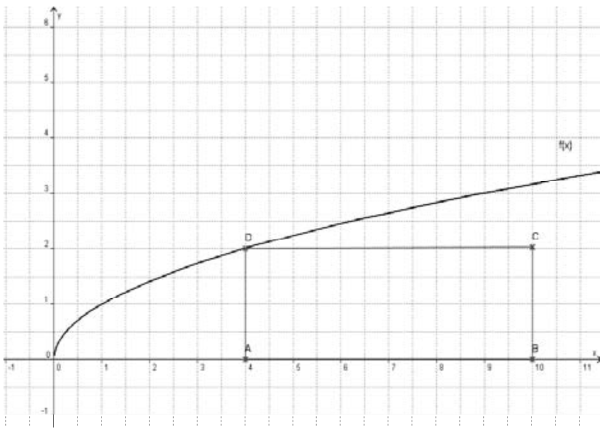
Aufgabenstellung

Es sei $0 < x < 10$. Die Punkte $A(x \mid 0)$, $B(10 \mid 0)$, $C\left(10 \mid \sqrt{x}\right)$ und $D\left(x \mid \sqrt{x}\right)$ bilden ein Rechteck. Veranschaulichen Sie diese Situation graphisch.

Für welches $x$ ist der Flächeninhalt dieses Rechtecks maximal? Nehmen Sie eine begründete Vermutung vor. Bestimmen Sie das gesuchte $x$ exakt.

Wie groß ist der maximale Flächeninhalt?

Mögliche Lösung




Kommentar zur Skizze: Der Punkt *B* ist fest. *A, C* und *D* sind dagegen abhängig von *x*. *D* wandert entlangt des Graphen der Wurzelfunktion, *A* wandert auf der *x*-Achse. C wandert vertikal. *x* beeinflusst damit Breite und Höhe und somit (vermutlich) auch den Flächeninhalt des Rechtecks *ABCD*.

Aufstellen einer Vermutung:
Es könnte vermutet werden, dass das flächengrößte Rechteck das Quadrat ist, d. h. das Rechteck, für das gilt $10 - x = \sqrt{x}$ . Die sinnvolle Lösung der entstehenden quadratischen Gleichung ist 7,3. Der zugehörige Flächeninhalt würde (ebenfalls) 7,3 betragen. Die Extremwertbetrachtung zeigt, dass dies nicht die maximale Fläche ist, die Vermutung hier also nicht stimmt. Ursache ist, dass zwar für Rechtecke mit dem gleichen Umfang das Quadrat das flächengrößte ist, hier aber eine andere Nebenbedingung gilt.

Aufstellen der Zielfunktion:

Die Zielfunktion ist die Funktion der Fläche *A* in Abhängigkeit von *x*. Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist das Produkt aus Breite und Höhe. Wie an der Skizze deutlich wird, ist die Breite des Rechteckes $10-x$ und die Höhe $\sqrt{x}$. Somit gilt $A(x)=(10-x)\sqrt{x}$.

Bestimmung der Extremwerte:

Dies erfolgt mit dem notwendigen Kriterium $A'(x_E)=0$ und dem hinreichenden Kriterium $A''(x_E)\neq 0$ und $A'(x_E)=0$. Zunächst wird *A*(*x*) umgeformt, um die bereits bekannte Potenzregel für Ableitungen anwenden zu können: $A(x)=(10-x)\sqrt{x}=10x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}$.

Nun erfolgt die Bestimmung der Nullstelle der ersten Ableitung.

$$A'(x_E)=5x_E^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}x_E^{\frac{1}{2}}=0 \Rightarrow \quad 5x_E^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}x_E^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow 5=\frac{3}{2}x_E \quad \Rightarrow x_E=\frac{10}{3}$$

Eine Extremstelle kann somit nur bei $x_E=\frac{10}{3}$ vorliegen. Es bleibt nun zu prüfen, ob die hinreichende Bedingung dort erfüllt ist und tatsächlich ein Maximum vorliegt. Es gilt $A''(x_E)=-\frac{5}{2}x_E^{-\frac{3}{2}}-\frac{3}{4}x_E^{-\frac{1}{2}}<0$ auf Grund der Voraussetzung $0<x<10$. Somit liegt bei $x_E=\frac{10}{3}$ tatsächlich ein Maximum für den Flächeninhalt des Rechteckes *ABCD* vor.

Abschließend ist zu untersuchen, ob das lokale Maximum auch das globale ist. Da die erste Ableitung der Zielfunktion nur eine Nullstelle hat, kann es innerhalb des Intervalls keine weitere Extremstelle geben. Maxima auf den Intervallrändern kann es nicht geben, da dort der Flächeninhalt null wird. Somit liegt bei $x_E=\frac{10}{3}$ auch das globale Maximum (betrachtet für das gegebene Intervall).

Der maximale Flächeninhalt beträgt: $A_{\max}=\left(10-\frac{10}{3}\right)\sqrt{\frac{10}{3}}=\frac{20}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}\approx 12{,}17$.

Kompetenzspektrum:

Grundkenntnisse: Bestimmung von Extrema, Ableitungsregeln (GW)
Graphisch Darstellen (DI)
Mathematisch Argumentieren (KA)
Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)
Ausführen formaler Verfahren (FO)
Ausführen formaler Operationen und Umformungen (FO)
Formal und fachsprachlich verbal Darstellen (DI)

**Analyse der Aufgabe nach den Kriterien an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen**

Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

*Bedingungen auf Grund der Beurteilungssituation*

Validität

Voraussetzung für die Bearbeitung der Aufgabe und somit auch für die Beurteilung der im Kompetenzspektrum genannten Kompetenzen ist, dass der Schüler aus den ihm gegebenen Punkten eine Funktion für den Flächeninhalt des eingeschlossenen Rechtecks in Abhängigkeit vom freien Parameter $x$ entwickeln kann. Dafür ist die geometrische Darstellung der Situation (wenigstens im Kopf) notwendig. Gelingt dies nicht, sollten die genannten Kompetenzen dennoch, möglicherweise eingeschränkt, beurteilt werden können, wenn der Schüler mit einer falschen Zielfunktion weiterarbeitet. Voraussetzung ist die Kenntnis der notwendigen und hinreichenden Bedingung für Extremwerte bzw. das Verfahren zur Extremwertbestimmung. Diese haben die Schüler im Unterricht erworben. Die Aktivitäten des Kompetenzspektrums dieser Aufgabe gehören zu den wichtigen in den EPA (KMK 2002) und den Bildungsstandards für das Fach Mathematik (KMK 2004) festgehaltenen mathematischen Kompetenzen.

Gerechtigkeit

Verständlichkeit: Die Aufgabenstellung ist verbal fachsprachlich formuliert. Definitionsbereich und Punkte sind symbolisch gegeben. Die in der Aufgabenstellung verwendeten fachsprachlichen Begriffe sind den Schülern vertraut, so dass die Aufgabenstellung von ihnen verstanden werden kann. Die Angabe von Punkten mit einer freien Variablen ist den Schülern wahrscheinlich neu.

Erwartungstransparenz: Die Anweisungen entsprechen nicht unbedingt Standardanweisungen, vermitteln aber, was zu tun ist und machen deutlich, welche Kompetenzen erwartet werden (z. B. „begründete Vermutung“).

Ergebnisorientierung: Die Aufgabe ist durch Teilaufgaben gegliedert, die sich wiederum aus separaten Lösungsschritten zusammensetzen, welche zu entsprechenden Beurteilungen und Rückmeldungen führen können.

Schwierigkeit: Im Kern der Aufgabe liegt die den Schülern durch ein Beispiel bekannte Extremwertaufgabe. Diese wird umrahmt von zusätzlichen Aufgaben, die den Anspruch erhöhen: Die Zielfunktion ist erst zu modellieren, eine geeignete Ableitungsregel ist zu finden, eine Vermutung ist aufzustellen und zu begründen. Die Grundlagen dafür wurden im bisherigen Unterricht der elften Klasse, z. T. schon in der Sekundarstufe I erarbeitet.

Möglichkeit individueller Wege (Offenheit)

Da nach einem Maximum gefragt ist, liegt das Verfahren der Extremwertbestimmung als möglicher Lösungsweg nahe. Hinter den Teilaufgaben verbergen sich jedoch Problemstellungen, für die selbst ein Ansatz zu finden ist: Die graphische Darstellung kann unterschiedlich gestaltet werden, die Modellierung der Zielfunktion, die Ableitung der Funktion erfolgt durch selbst gewählte Schritte und vor allem die Vermutung macht eigenständiges Denken notwendig. Die gewählten Strategien können sich im Detail unterscheiden. Zugänge auf unterschiedlichen kognitiven Niveaus sind begrenzt möglich.

*Bedingungen durch Anspruch an Aufgabenqualität*

Individuelle und gesellschaftliche Bedeutung der Aufgabe: Extremwertaufgaben haben innerhalb der Optimierung überall dort Bedeutung, wo funktionale Zusammenhänge untersucht werden, auch in ganz alltäglichen Zusammenhängen (vgl. Aufgabe 11B7.2). Die Aufgabe beschränkt sich auf innermathematische Zusammenhänge, ist aber gerade dadurch zum Kennenlernen von Extremwertproblemen geeignet. Neben dem Verfahren der exakten Bestimmung sind das Veranschaulichen der vorliegenden Situation als Unterstützung der Modellierung und das Abschätzen eines Extremwertes bzw. Aufstellen und Begründen einer Vermutung wichtige methodische Strategien. Außerdem kann Neugierde geweckt werden, ob die eigene Schätzung richtig lag.

Kognitive Forderung: Die Förderung liegt wie bereits angedeutet darin, das bekannte Konzept der Extremwertbetrachtung in einer neuen Situation anzuwenden. Hier werden dabei Inhalte der Geometrie und der Analysis und Inhalte unterschiedlicher Schuljahre verbunden, was das vernetzende mathematische Denken unterstützt und fordert. Dazu kommt, dass zwar ein Standardverfahren Anwendung findet, für die konkrete Umsetzung Routinen allein aber nicht reichen, da z. B. eine geeignete Ableitungsregel selbst zu finden ist. An mehreren Stellen der Aufgabe ist das eigenständige Herstellen von Zusammenhängen und kreatives mathematischen Denken notwendig. Kognitive Fähigkeiten bis zur (höchsten) Stufe des Evaluierens sind bei einer umfassenden Lösung, einschließlich der Selbstreflexion der eigenen Vermutung, möglich.

*Kriterien verbunden mit dem Ziel des Ansprechens vielseitiger mathematischer Kompetenzen*

Darstellend-interpretative Aktivitäten: graphisch, formal, verbal darstellen, zwischen unterschiedlichen Darstellungen übersetzen, Darstellungen interpretieren

Heuristisch-experimentelle Aktivitäten: Zusammenhänge herstellen, einen geeigneten Ansatz finden, analysieren, geeignete Darstellungsformen finden, Vermutungen aufstellen

Formal-operative Aktivitäten: algebraische Operationen und Berechnungen ausführen, formale Verfahren ausführen,

Kritisch-argumentative Aktivitäten: Schlussfolgerungen ziehen, Vermutungen begründen, Bedingungen prüfen

**Fazit der Analyse der entscheidenden Kriterien: Die Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen werden erfüllt, wenn die Schüler die Optimierung mittels Extremwertbestimmung (Extremwertaufgabe) wenigstens durch ein Beispiel kennen gelernt haben, was für die Untersuchungsklasse zutraf.**

<u>Komplexitätsbeschreibende Merkmale von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen</u>

Komplexität der einbezogenen mathematischen Inhalte

Wissenseinheit/Stoffgebiet und curriculare Wissensstufe: Neben der Wissenseinheit „Extremwertaufgabe“ sind die Wissenseinheiten „Wurzelfunktion“, „Extremwertbestimmung“ und „Flächeninhalt von Rechtecken“ notwendig. Die Inhalte „Extremwertaufgabe“ und „Extremwertbestimmung“ sind Teil der Differenzialrechnung der Sekundarstufe II. Wurzelfunktionen werden in der Sekundarstufe I eingeführt und der Flächeninhalt von Rechtecken wird oft schon in der Grundschule thematisiert. Bei dieser Aufgabe werden somit

Inhalte verschiedener Stoffeinheiten und Klassenstufen verknüpft. Alle Inhalte gehören zu den Standardthemen, die Schüler der elften Klasse beherrschen sollten.

Art des Wissens: Faktenwissen (z. B. Flächeninhalt von Rechtecken, notwendige und hinreichende Bedingung an Extrema, Potenzregel), prozedurales Wissen (Bestimmung von Extremstellen), konzeptuelles Wissen (Analysieren von Zusammenhängen (zwischen $x$ und der Fläche), Untersuchung hinsichtlich globalem Maximum).

Es liegt eine selbständige Verknüpfung von z. T. neuerlernten Wissenselementen der Sekundarstufe II und aus mehreren Stoffeinheiten der Sekundarstufe I vor: Anforderungsbereich 3.

Komplexität bezüglich spezifischer Aktivitätsbereiche

Anforderungen im heuristischen Bereich: Innerhalb der Aufgabenstellung wird kein Lösungsverfahren vorgegeben. Dennoch kann nicht von einer wirklich offenen Aufgabe gesprochen werden, weil für die Schüler zur exakten Bestimmung des $x$-Wertes im Prinzip nur ein Verfahren, das der Extremwertbetrachtung, in Frage kommt. Unterschiedliche Vorgehensweisen bei Optimierungen werden in der Regel nicht vor diesem Zeitpunkt thematisiert. Anders ist dies bezüglich der vorzunehmenden Abschätzung, hier gibt es mehrere mögliche und sinnvolle Herangehensweisen und eigene Überlegungen sind unabdingbar, da kein Standardverfahren einsetzbar ist. Durch den Ausdruck „maximal“ werden die Schüler darauf hingewiesen, dass eine Extremwertbestimmung auszuführen ist. Für das „Kernverfahren“ dieser Aufgabe finden die Schüler somit innerhalb der Aufgabenstellung das „Schlüsselkonzept“. Die zu maximierende Funktion ist jedoch nicht gegeben, sondern muss erst aus einem, hier innermathematischen, Zusammenhang heraus modelliert werden, wofür die graphische Darstellung hilfreich sein sollte. Die selbständige Anwendung bekannter Methoden entspricht Anforderungsbereich 2, bei umfassender Bearbeitung unter Herstellung komplexer Zusammenhänge Anforderungsbereich 3.

Anforderungen im formal-operativen Bereich: Die Aufgabe kann anhand des Verfahrens der Extremwertaufgabe bestimmt werden. Um die Anforderungen dieses Verfahrens beschreiben zu können, ist die Betrachtung der notwendigen mathematischen Operationen sinnvoll. Zunächst ist anhand der Formel für den Flächeninhalt die Zielfunktion zu bestimmen. Diese ist ein Produkt aus einer linearen Funktion und der Wurzelfunktion. Für die erste Ableitung können die Schüler evtl. die (wahrscheinlich neue) Produktregel oder nach geeigneter Umformung die Potenzregel für Ableitungen anwenden. Erfolgt das Prüfen der hinreichenden Bedingung anhand der zweiten Ableitung, stehen Quotientenregel oder Potenzregel (für Ableitungen) zur Auswahl. Weiterhin sind die Potenzgesetze und einfache algebraische Umformungen notwendig. Die Verwendung bekannter Operationen in neuartigen Zusammenhängen mittlerer Komplexität entspricht Anforderungsbereich 2.

Anforderungen im darstellend-interpretativen Bereich: Die geforderte graphische Veranschaulichung des „variablen Rechtecks“ ist weitaus anspruchsvoller als eine reine Übersetzung in eine graphische Darstellung, wie z. B. bei der Übertragung formaler Darstellungen von Funktionen in ein Koordinatenkreuz. Hier ist zunächst zu überlegen, wie eine solche Veranschaulichung vorgenommen werden kann. Eine Abstraktion ist nötig, da nicht das ganze Intervall der $x$-Werte dargestellt werden kann. Naheliegend ist es exemplarisch zu arbeiten, ein spezielles $x$ zu wählen. Um die möglichen Variationen des Flächeninhalts zu veranschaulichen können auch zwei, sich in ihrer Größe unterscheidende, Rechtecke gezeichnet werden. Der Graph der Wurzelfunktion verdeutlicht, wo Punkt $D$ des Rechtecks liegen kann. Um die Zielfunktion zu erhalten, muss die graphische Darstellung in eine formale übersetzt werden. In die Formel für den Flächeninhalt eines Rechtecks werden für die Seiten $a$, $b$ die von $x$ abhängigen algebraischen Ausdrücke eingesetzt, die in der Skizze abgelesen werden können ($a = 10 - x$, $b = \sqrt{x}$). Nun wird in der Regel auf formaler Ebene gearbeitet werden, wobei Übersetzungen zwischen formalen, insbesondere funktionalen Darstellungen auftreten können, z. B. muss eine Darstellung der Zielfunktion gefunden werden, die es erlaubt, bekannte Ableitungsregeln zu verwenden. Aber auch Übersetzungen in verbale Darstellungen sollten auftreten, z. B. bei der Abschätzung. Da die Darstellungsformen eigenständig auszuwählen oder zu entwickeln und in z. T. komplexen Situationen anzuwenden sind, entsprechen die Anforderungen dem Bereich 3.

Anforderungen im kritisch-argumentativen Bereich: Innerhalb der Aufgabenstellung wird nur für die Abschätzung explizit eine Begründung gefordert. Diese muss mit mathematischen Mitteln erfolgen, sollte logisch und inhaltlich korrekt sein. Sie kann formal oder verbal formuliert werden. Innerhalb der Extremwertaufgabe sind einfache Schlussfolgerungen zu ziehen. Diese können symbolisch formal oder verbal dargelegt werden. Auch Erläuterungen zum Vorgehen und Kommentare sollten auftreten. Je nach Komplexität der Argumentation innerhalb der Abschätzung sollten die (individuellen) Anforderungen dem Bereich 2 oder 3 entsprechen.

**Analyse der umgesetzten Schüleraktivitäten**

Die 17 Schüler, welche die Aufgabe bearbeiteten, nutzten zur exakten Bestimmung des Maximums die formale Extremwertbestimmung. Andere Möglichkeiten der Optimierung wurden nicht verwendet, waren den Schülern wahrscheinlich auch nicht bekannt. Eine Extremwertaufgabe wurde bereits im Unterricht ausgeführt. Das Vorgehen war den Schülern bekannt, ein Routineverfahren lag jedoch (noch) nicht vor.

Intendierte Aktivitäten (Aktivitätsbereich, Anzahl der Schüler, die die Aktivität ausführten):

- die Situation graphisch darstellen (DI, 17)
- die Skizze verbal erläutern (DI, 1)
- explizit eine Vermutung aufstellen (HE, 3)
- die Vermutung begründen (KA, 1)
- die Graphik bzw. Angaben der Aufgabenstellung in eine formale (funktionale) Darstellung für den Flächeninhalts des Rechtecks in Abhängigkeit von $x$ übersetzen (DI, 17)
- ein geeignetes Lösungsverfahrens finden (Extremwertaufgabe) (HE, 17)
- das Vorgehen verbal beschreiben (DI)
- eine geeignete Ableitungsregel finden (HE, 17)
- die erste Ableitung der Zielfunktion bilden (FO, 17)
- algebraische Umformungen ausführen, die mögliche Extremstelle bestimmen (FO, 17)
- Schlussfolgerungen ziehen/die formale Lösung verbal interpretieren (KA, DI, 12)
- die zweite Ableitung an der potenziellen Extremstelle bilden (FO, 6)
- den Funktionsterm analysieren (HE)
- auf ein lokales Maximum schließen (KA, 12)
- den Funktionsgraphen analysieren (HE, 4)
- Folgern, dass das lokale Maximum auch das globale ist (KA, 8)
- den maximalen Flächeninhalt bestimmen (FO, 17)

Mit fünf heuristisch-experimentellen, fünf darstellend-interpretativen, vier formal-operativen und vier kritisch-argumentativen Aktivitäten können mit der Aufgabe (potenziell) vielseitige Aktivitäten angeregt werden. Insbesondere wird deutlich, dass bei Extremwertaufgaben, die zu den Standardaufgaben der Oberstufe gezählt werden, keineswegs die formalen Aktivitäten dominieren müssen, wenn bei der Aufgabengestaltung versucht wird, unterschiedliche mathematische Aktivitäten einzubeziehen.

Von den intendierten Aktivitäten wurden die häufig umgesetzt, die zur (formalen) Lösung der Aufgabe (zwingend) notwendig sind sowie die Aktivitäten der Aufgabenteile, die wenig methodischen Spielraum zuließen. Wo es unterschiedliche Möglichkeiten gab, wurden diese auch genutzt.

Insgesamt wurden 55 darstellend-interpretative, 55 heuristisch-experimentelle, 72 formal-operative und 53 kritisch-argumentative Aktivitäten ausgeführt. Die Umsetzung entsprach in etwa den Intentionen.

**Vergleich unterschiedlicher Lösungswege**

Unterschiede zwischen den Lösungswegen der Schüler gab es bezüglich der Qualität und der Vollständigkeit der Bearbeitung und deren Darstellung:

- Die formale Extremwertbestimmung wurde ergänzt durch die geforderte graphische Veranschaulichung der gegebenen Situation, was der Modellierung der Zielfunktion dienen sollte und von 13 Schülern geeignet ausgeführt wurde.
- Eine geeignete Abschätzung durch Analyse der beiden Faktoren der Zielfunktion wurde nur von 6 Schülern[116] vorgenommen. Hierbei wurden vor allem heuristisch-experimentelle und kritisch-argumentative Aktivitäten ausgeführt.

Unterschiede innerhalb der Extremwertbestimmung gab es beim Prüfen des hinreichenden Kriteriums. Hier lag ein heuristischer Anspruch vor, da die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ den Schülern noch nicht bekannt war:

- 8 Schüler untersuchten, ob in einer Umgebung der potenziellen Extremstelle ein Vorzeichenwechsel der Ableitungsfunktion stattfindet bzw. die Steigung der Funktion ihr Vorzeichen ändert.
- 5 Schüler bestimmten auf formalem Weg die zweite Ableitung an der bestimmten potenziellen Extremstelle, indem sie eine passende Regel aus dem Tafelwerk, Schulbuch o. ä. oder die Potenzregel auf die umgeformte Funktion anwendeten.
- Ein Schüler hat den Limes des Differenzenquotienten der Ableitungsfunktion an der potentiellen Extremstelle untersucht.

[116] Dabei arbeiteten vier Schüler nach dem Prinzip Aufstellen von Vermutungen und Prüfen der Vermutungen, andere dagegen nach dem Prinzip Zusammenhänge analysieren und schlussfolgern und bei einigen traten beide Vorgehensweisen auf.

- Ein weiterer Schüler hat die erste Ableitung geplottet und so erkannt. dass die Steigung dieser Funktion an der möglichen Extremstelle negativ ist.

In allen Varianten dieses Lösungsschrittes wurden heuristische, formale und argumentative Aktivitäten ausgeführt.

Auf Grund der methodischen Offenheit mehrerer Teilaufgaben, wurden folgende Aktivitäten in den Schülerarbeiten beobachtet, die nicht in der Beispiellösung auftreten

- die erste Ableitung an zwei Stellen bestimmen (FO, 3)
- auf einen Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung schließen (KA, 5)
- verbal zusammenfassen (DI, 1)
- Auswirkung einer Variation von $x$ auf die Flächeninhaltsfunktion analysieren (HE, 6)
- geeignete Werte für $x$ ausprobieren (HE, FO, 4)
- auf eine Abschätzung folgern (KA, 7)
- den Vorzeichenwechsel formal überprüfen (FO, 5)
- formal mit Quantoren zusammenfassen (DI, 4)
- Differenzialquotient der ersten Ableitung an der Extremstelle bestimmen (HE, FO, 1)
- auf eine negative Steigung folgern (KA, 1)
- die Variation des Flächeninhaltes veranschaulichen (DI, 2)[117]
- den Definitionsbereich von $x$ begründet eingrenzen (KA, 2)
- die beiden Faktoren der Zielfunktion analysieren, auf den stärkeren Einfluss von (10-$x$) folgern und durch Beispiele quantifizieren (HE, KA, FO, 2)
- die vorgenommene Abschätzung anhand des formal bestimmten maximalen Flächeninhalts reflektieren (HE, KA, 1)
- die erste Ableitung plotten und deren Steigung an der Extremstelle bestimmen (DI, 1)
- die zweite Nullstelle der Ableitung der Zielfunktion als sinnvolle Extremstelle begründet ausschließen (KA, 2)

**Ausgeführte Schüleraktivitäten und objektive Aufgabenparameter**

Im ersten Überblick wurde die Aufgabe nach den Erwartungen ausgeführt. Die umgesetzten Aktivitäten waren ausgewogen auf die Aktivitätsbereiche verteilt. Vor allem die intendierten formal-operativen und kritisch-argumentativen Kompetenzen wurden gut umgesetzt. Von jeweils fünf heuristisch-experimentellen und darstellend-interpretativen Aktivi-

[117] Dies ist als zusätzliche Aktivität und Qualität innerhalb der graphischen Darstellung zu sehen.

täten fanden sich in den Schülerarbeiten durchschnittlich (nur) jeweils 3,2 wieder. Da nicht alle explizit geforderten Aktivitäten ausgeführt wurden, wird die Umsetzung einzelner Teilaufgaben betrachtet.

*Umsetzung der darstellend-interpretativen Aktivitäten – Abweichungen in Qualität und Quantität*

Alle Schüler führten die explizit geforderte graphische Darstellung aus. Von den 17 Darstellungen entsprachen 13 einer Veranschaulichung der Situation, welche der Modellierung der Zielfunktion dienlich ist. Drei Schüler konnten alle Informationen der Aufgabenstellung veranschaulichen, insbesondere auch den funktionalen Zusammenhang (vergleichbar der Skizze der Beispiellösung). Die eigenständige graphische Veranschaulichung der Situation entsprach einer neuartigen Anforderung, die sich in ihrem kognitiven Anspruch von Routinedarstellungen der Analysis (direktes Übertragen von Funktionen ins Koordinatensystem) unterscheidet. Hier mussten Informationen der Aufgabenstellung analysiert und Zusammenhänge hergestellt werden. Eine geeignete Darstellungsform war selbst zu finden oder zu entwickeln. Neben darstellenden sind dazu heuristische Aktivitäten erforderlich, eine Trennung ist jedoch auf Grundlage der fertigen Darstellung nicht möglich. Die Quantität der graphischen Darstellungen nicht aber die Qualität entsprach den Erwartungen.

Beschreibende, erläuternde und den Lösungsweg kommentierende Aktivitäten wurden selten ausgeführt.

*Unterschiedlich gute Umsetzung verschiedener heuristisch-experimenteller Aktivitäten*

Allen Schülern gelang es, die Zielfunktion korrekt aufzustellen. Dies kann zum einen daran liegen, dass die Formel für den Flächeninhalt von Rechtecken, die Grundlage der Modellierung, den Schülern seit dem Grundschulalter bekannt ist. Zum anderen kann die explizite Forderung einer Veranschaulichung als Unterstützung der Modellierung hilfreich gewesen sein. Allerdings konnten auch Schüler ohne geeignete graphische Veranschaulichung die Zielfunktion richtig angeben. Eine weitere Ursache kann die geringe Komplexität der Modellierung der Zielfunktion sein.

Die explizit geforderte Vermutung zur maximalen Fläche wurde nur von sechs Schülern vorgenommen, die damit verbundenen heuristisch-experimentellen und kritisch-argumentativen Kompetenzen entsprechend selten ausgeführt. Die Ursachen können vielfältig sein: Möglicherweise wurde die Aufgabenstellung „Vermutung“ von den Schülern nicht ernst genommen, da die Extremstelle genau bestimmt werden kann. Möglicherweise waren hier auch die heuristischen Anforderungen zu hoch und die Mehrzahl der Schüler hatte keine Idee, wie zu einer sinnvollen Vermutung gelangt werden kann. Der Aufgabenteil fordert anspruchsvolle kognitive Fähigkeiten: Zur Abschätzung ist sowohl eine Analyse der Auswirkungen der Variation von $x$ als auch eine Synthese zur Festlegung eines möglichen Intervalls oder Wertes notwendig. Außerdem ist zur Lösung dieser Teilaufgabe nicht nur Faktenwissen und prozedurales Wissen sondern auch konzeptuelles Wissen erforderlich. Schließlich kann sogar die Lage der Aufforderung innerhalb der Aufgabenstellung ungünstig gewesen sein - die Frage „Für welches $x$ ist der Flächeninhalt dieses Rechtecks maximal?“ (vor der Aufforderung zur Vermutung) verleitet evtl. dazu, gleich den genauen Wert zu bestimmen.

Für die zusammengesetzte Funktion der ersten Ableitung der Zielfunktion kennen die Schüler noch keine Ableitungsregel. Das Prüfen einer hinreichenden Bedingung für die Extremstelle anhand der zweiten Ableitung ist somit nicht „legal“, eine geeignete Möglichkeit des Prüfens des hinreichenden Kriteriums war selbst zu finden. Trotz des heuristischen Anspruches konnte die Mehrheit der Schüler diese Teilaufgabe lösen. Was könnten die Ursachen dafür sein, dass die Schüler diesen Aufgabenteil lösten, die Abschätzung dagegen nicht vornahmen? A) Der „Vorzeichenwechsel“ wurde von den Schülern als gängige Methode bei der Untersuchung eines hinreichenden Kriteriums bereits vor Einführung der zweiten Ableitung angewendet. Die Schüler verfügen somit über eine von ihnen sicher beherrschte Methode zur Lösung dieser Teilaufgabe. B) Prozedurales Wissen ist ausreichend, wenngleich auch konzeptuelles Wissen eingebracht werden kann. C) Die Untersuchung des Vorzeichenwechsels ist anhand der intellektuellen Fähigkeiten „Verstehen“ und „Anwenden“ durchführbar. Höhere Kategorien intellektueller Fähigkeiten sind nicht zwingend notwendig. Im Unterschied zu früheren Extremwertbestimmungen (vgl. 11B6.1 und 11B6.2) ist den Schülern bewusst geworden, dass ein Extremwert erst vorliegt, wenn auch die hinreichende Bedingung erfüllt wird.

## Anhang 2.4: Analyse der Aufgabe Optimaler Eintrittspreis

Aufgabenstellung

Ein Marktforschungsinstitut hat festgestellt, dass der höchste zu realisierende Eintrittspreis für ein Robbie-Williams-Konzert 80 Euro beträgt. Die Veranstalter des nächsten Konzertes erwarten bei einem solchen Eintrittspreis 60000 Besucher. Eine Preissenkung um je 4 Euro würde dagegen zu einer geschätzten Zunahme von jeweils 5000 Besuchern führen. Welchen Eintrittspreis sollten die Veranstalter festsetzen, wenn Sie den Erlös maximieren wollen?

Mögliche Lösung

Modellieren der Zielfunktion:

80 Euro (höchster zu realisierender Preis) $\rightarrow$ 60000 Besucher

Preissenkung um je 4 Euro $\rightarrow$ + 5000 Besucher

$x$: Eintrittspreis

$E(x)$: Erlös $E$ in Abhängigkeit vom Eintrittspreis $x$, $E(x)$ = Preis · Anzahl der Besucher

$k$: Anzahl der Preissenkungen um 4 Euro

Da $x$ eine Funktion von $k$ ist ( $x = 80 - 4k$ ) und über $k$ mehr bekannt ist, ist es zweckmäßiger $E$ als Funktion von $k$ darzustellen und zu ermitteln, bei welcher Anzahl von Preissenkungen der Erlös maximal wird.

$$E(k) = (80 - 4k)(60000 + 5000k),\ E(k) = 4800000 + 160000k - 20000k^2$$

Bestimmung der Extremwerte:

Die Bestimmung der Extremwerte der Funktion $E$ erfolgt mit dem notwendigen Kriterium, laut dem die erste Ableitung von $E$ nach $k$ an der Stelle $k_E$, an der ein Extremum liegen könnte, eine Nullstelle besitzen muss.

$$E'(k_E) = 160000 - 40000k_E = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k_E = 4$$

Da der Graph der Funktion $E$ eine nach unten geöffnete Parabel ist, ist es nicht notwendig, ein hinreichendes Kriterium zu prüfen, weil der Scheitelpunkt dieser Parabel das Maximum ist. Dieses ist das einzige Maximum, also auch das globale.

Wenn bei vier Preissenkungen von je 4 Euro ausgehend vom größtmöglichen Eintrittspreis von 80 Euro der maximale Erlös erzielt wird, dann ist der optimale Eintrittspreis für dieses

Konzert 64 Euro. Der maximale Erlös beträgt dann 5120000 Euro und die Anzahl der Besucher wäre bei diesem Preis 80000.

Kompetenzspektrum

Grundwissen: Bestimmung von Extrema, Ableitungsregeln (GW)
Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)
Übersetzen (DI)
Ausführen formaler Verfahren, Operationen und Umformungen (FO)
Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (DI)

**Analyse der Aufgabe nach den Kriterien an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen**

Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

*Bedingungen auf Grund der Beurteilungssituation*

Validität

Voraussetzung für die Bearbeitung der Aufgabe und somit auch für die Beurteilung der im Kompetenzspektrum genannten Kompetenzen ist, dass die Schüler aus den Angaben der Aufgabenstellung eine Zielfunktion, hier die Funktion für den Erlös in Abhängigkeit vom Eintrittspreis, entwickeln können. Die Beziehung Erlös = Eintrittspreis · Anzahl der Besucher ist außermathematischer Art. Für den Zugang zur Aufgabe ist das Verständnis außermathematischer Zusammenhänge notwendig. Dies wird für eine Aufgabe, bei der die Modellierung außermathematischer Situationen im Mittelpunkt steht, für legitim gehalten. Formale mathematische Kompetenzen können auch bei einer falschen Zielfunktion, wenigstens eingeschränkt, beurteilt werden. Die Aufgabe ist valide, wenn tatsächlich die Modellierung im Blickfeld steht. Soll hauptsächlich die formale Extremwertbetrachtung beurteilt werden, sind außermathematische Anwendungen nicht geeignet. Die Aktivitäten des Kompetenzspektrums dieser Aufgabe gehören zu den wichtigen in den EPA (KMK 2002) und den Bildungsstandards für das Fach Mathematik (KMK 2004) festgehaltenen mathematischen Kompetenzen.

Gerechtigkeit

Verständlichkeit: Die Aufgabenstellung ist eine verbale Beschreibung der außermathematischen Situation. Sie enthält keine fachsprachlichen, sondern lebensweltliche und ökonomische Begriffe, die Schülern dieser Alterstufe vertraut sind, so dass die Aufgabenstellung von den Schülern verstanden werden kann.

Erwartungstransparenz: Es ist keine explizite Anweisung formuliert, sondern die Aufforderung ergibt sich aus einer Fragestellung, welche in der Sprache des Kontextes formuliert ist. Das Verb „maximieren“ weist auf eine Extremwertbetrachtung hin. Dennoch bleibt offen, wie und in welchem Umfang die Aufgabe zu bearbeiten und die Bearbeitung darzulegen ist. Transparenz ist hier nur gegeben, wenn die Anforderungen an Bearbeitungen mathematischer Aufgaben mit außermathematischem Kontext und die Dokumentation des Lösungsweges aus dem Unterricht bekannt sind.

Ergebnisorientierung: Die Aufgabe ist nicht in Teilaufgaben gegliedert. Der übliche Aufbau von Extremwertaufgaben erlaubt jedoch eine Gliederung der Beurteilung in einzelne Teilleistungen.

Schwierigkeit: Da die Zielfunktion eine quadratische Funktion ist, ist der mathematische Anspruch der Aufgabe gering. Das Anliegen der Aufgabe besteht darin, außermathematische Anwendungen von Extremwertbetrachtungen vorzustellen und das Herstellen von Beziehungen zwischen mathematischen Konzepten und realen Situationen zu fördern, was schließlich auch der Festigung und Vertiefung der mathematischen Konzepte dienen kann.

Möglichkeit individueller Wege (Offenheit)

Obwohl im Wesentlichen keine völlig unterschiedlichen Lösungsstrategien erwartet werden, da das Verfahren der Extremwertaufgabe naheliegend ist, sind individuelle Zugänge zur Aufgabe bei der Modellierung der Zielfunktion möglich. Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten sich die Daten der Aufgabenstellung und vor allem die Zusammenhänge zwischen den gegebenen Größen zu verdeutlich, z. B. verbale Beschreibungen, Wortformeln, evtl. auch Grafiken. Da die Zielfunktion eine quadratische Funktion ist, ist zur Bestimmung des Extremwertes nicht zwingend das formale Verfahren der Differenzialrechnung notwendig, sondern es kann auch der Scheitelpunkt mit den aus der Sekundarstufe I bekannten Methoden bestimmt werden. Die Aufgabe erlaubt somit ein individuelles Herangehen und Bearbeiten.

*Bedingungen durch Anspruch an Aufgabenqualität*

Individuelle und gesellschaftliche Bedeutung der Aufgabe: Die Anwendungsaufgabe ist ein Beispiel für eine Anwendung von Extremwertuntersuchungen bei der Optimierung realer Situationen. Die Schüler können erfahren, dass Methoden der Differenzialrechnung in Fragestellungen dienlich sind, die ihre Interessen betreffen, wie hier ein Popkonzert. Allerdings wird durch die Aufgabe nur ein kleiner Ausschnitt einer realen Modellierung umgesetzt. Wirkliche ökonomische Optimierungen sind ungleich komplexer.

Kognitive Forderung: Die Herausforderung liegt hier nicht in der mathematischen Komplexität und Anforderung, sondern darin, eines der neuen Verfahren der Differenzialrechnung (erstmalig) in einer realitätsnahen Situation anzuwenden. Die Verbindung zwischen mathematischen und außermathematischen Konzepten kann zum Verständnis mathematischer Konzepte beitragen. Bei der Aufgabenstellung, wie vorgestellt, werden anspruchsvolle kognitive Kompetenzen, wie Anwenden, Analysieren, Synthetisieren, einbezogen. Evaluieren ist bei einer umfassenden Bearbeitung einschließlich einer Bewertung des erstellten Modells ebenfalls möglich, z. B. in einer gemeinsamen Reflexion.

*Kriterien verbunden mit dem Ziel des Ansprechens vielseitiger mathematischer Kompetenzen*

Darstellend-interpretative Aktivitäten: verbal beschreiben, formal darstellen, zwischen Darstellungen übersetzen, Darstellungen interpretieren

Heuristisch-experimentelle Aktivitäten: Zusammenhänge zwischen den gegebenen Daten analysieren, einen geeigneten Ansatz zur Modellierung der Zielfunktion finden

Formal-operative Aktivitäten: algebraische Operationen ausführen, formale Verfahren ausführen

Kritisch-argumentative Aktivitäten: begründen, Schlussfolgerungen ziehen[118]

**Fazit der Analyse der entscheidenden Kriterien: Die Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen werden erfüllt, wenn den Schülern Anforderungen an die Darstellung von Modellierungen bekannt sind.**

[118] Diese Aktivitäten sind bei einer umfassenden Bearbeitung der Aufgabe möglich, werden aber nicht explizit gefordert und somit nicht im Kompetenzspektrum, d. h. in den zu beurteilenden Kompetenzen, aufgeführt.

<u>Komplexitätsbeschreibende Merkmale von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen</u>

Komplexität der einbezogenen mathematischen Inhalte

Wissenseinheit/Stoffgebiet und curriculare Wissensstufe: Die Aufgabe ist eine typische Extremwertaufgabe mit außermathematischem Kontext. Als mathematische Wisseneinheit ist bei einer Lösung ähnlich der Musterlösung lediglich das Konzept der Extremwertbestimmung, Standardinhalt der Sekundarstufe II, notwendig. Die Zielfunktion muss auch hier modelliert werden, anders als bei Aufgabe 11B7.1 sind dazu jedoch nicht verschiedene mathematische Konzepte zu verknüpfen, sondern die mathematischen Kenntnisse sind mit einem Grundverständnis ökonomischer Zusammenhänge zu verbinden. Um zu erkennen, dass der Erlös bzw. die Einnahmen dem Produkt aus Eintrittspreis und Anzahl der Besucher entspricht, sollten Alltagsvorstellungen genügen, tiefere Kenntnisse zum Kontext sind nicht notwendig. Bei einer graphischen Analyse sind sogar Kenntnisse zu Parabeln aus der Sekundarstufe 1 ausreichend.

Art des Wissens: Faktenwissen (z. B. notwendige und hinreichende Bedingung für Extremstellen, Ableitungsregeln), prozedurales Wissen (Vorgehen bei Extremwertaufgaben), konzeptuelles Wissen (z. B. Möglichkeiten der Modellierung einer Zielfunktion).

Da Standardinhalte der Sekundarstufe I und/oder II in neuartigen, wenig komplexen Situationen angewendet werden, liegt, je nach Anzahl der verknüpften Wissenseinheiten, Anforderungsbereich 1 oder 2 vor.

Komplexität bezüglich spezifischer Aktivitätsbereiche

Anforderungen im heuristischen Bereich: Zur Einschätzung der Offenheit ist es sinnvoll, die Aufgabe in zwei Teilen zu betrachten. Aus dem speziellen Zusammenhang heraus ist zunächst die Zielfunktion, die Grundlage der formalen Extremwertbestimmung, zu modellieren. Der Anspruch dieser Modellierung entspricht der zweiten Stufe: das notwendige mathematische Konzept wird nicht durch „Schlüsselbegriffe“ spezifiziert. Die Schüler müssen mit eigenen Methoden analysieren, wie die Parameter des Kontextes zusammenhängen und selbst eine Zielfunktion entwickeln. Die Modellierung der Zielfunktion kann zum einen mehrere korrekte Lösungen haben, je nachdem ob der Eintrittspreis oder die Anzahl der Preissenkungen als Variable gewählt wird. Zum anderen ist die Modellierung methodenoffen: Für die Modellierung einer außermathematischen Situation ist den Schülern kein Vorgehen gegeben oder kann als für sie naheliegend bezeichnet werden.

Auch für den zweiten Teil, die mathematische Lösung nach erfolgter Übersetzung in die mathematische Sprache, ist kein Lösungsverfahren vorgegeben. Die Extremwertbestimmung auf formalem Wege ist hier jedoch naheliegend, vor allem weil sie von den Schülern in den letzten Unterrichtsstunden geübt wurde. Eine graphische Analyse und Argumentation ist bei der quadratischen Funktion als Zielfunktion ebenso effektiv. Der Scheitelpunkt und damit das Extremum ist durch Umstellung der Funktionsgleichung in die Scheitelpunktsform schnell gefunden. Die Anwendung bekannter Methoden in einem neuartigen Zusammenhang mittlerer Komplexität wird dem Anforderungsbereich 2 zugeordnet.

Anforderungen im formal-operativen Bereich: Das mathematische Verfahren, welches bei dieser Anwendungsaufgabe zum Einsatz kommen kann, ist die formale Extremwertbestimmung. Dieses Verfahren haben die Schüler inzwischen selbst ausgeführt. Die bei dieser Extremwertaufgabe notwendigen mathematischen Operationen entsprechen ebenfalls Standardanforderungen: erste und zweite Ableitung einer quadratischen Funktion, Nullstelle einer linearen Funktion bestimmen, einfache algebraische Umformungen. Der Anspruch dieser Aufgabe liegt nicht auf der formalen Seite: Anforderungsbereich 1.

Anforderungen im darstellend-interpretativen Bereich: Zum Aufstellen der Zielfunktion müssen die Angaben der Aufgabenstellung aus ihrer verbalen Darstellung heraus in die formale Darstellung und schließlich zur funktionalen Darstellung der Zielfunktion übersetzt werden, wobei Zwischenschritte z. B. in verbal-symbolischer Form denkbar sind. Anschließend wird das Problem auf formaler Ebene gelöst werden, wobei evtl. Übersetzungen zwischen verschiedenen formalen Darstellungen notwendig werden. Schließlich ist die formale Lösung wieder in den Ausgangskontext zu übersetzen, wofür die verbale Darstellung geeignet ist. Graphische Darstellungen können hilfreich sein, sind aber nicht gefordert. Anforderungsbereich: 2.

Anforderungen im kritisch-argumentativen Bereich: Innerhalb der Aufgabenstellung wird keine Begründung und sonstige Argumentation explizit gefordert. Wie auch sonst bei Extremwertbestimmungen sind einfache formale Schlussfolgerungen aus den formalen Ergebnissen für eine vollständige Bearbeitung notwendig. Diese können symbolisch oder verbal dargestellt werden und werden überwiegend knapp sein. Wird die Extremwertaufgabe vollständig gelöst, bleibt zu begründen, warum das lokale Maximum auch das globale ist. Diese Begründung ist nicht explizit gefordert, die Schüler müssen deren Notwendigkeit selbst erkennen. Weitere umfangreiche Begründungen sind nicht zu erwarten. Dies wäre der Fall, wenn eine Evaluation des verwendeten mathematischen Modells gefordert wird. Die einfachen Schlussfolgerungen und wenig komplexen Begründungen entsprechen dem Anforderungsbereich 2.

**Analyse der umgesetzten Schüleraktivitäten**

Alle[119] Schüler haben zur Lösung auf mathematischer Ebene eine formale Extremwertbetrachtung durchgeführt. Unterschiede gab es bei der Entwicklung der Zielfunktion.

Intendierte Aktivitäten (Aktivitätsbereich, Häufigkeit der Umsetzung):
- Angaben der Aufgabenstellung zusammenstellen (HE, 6)
- Abhängigkeiten zwischen den genannten Größen verdeutlichen (DI, 2)
- Variablen definieren (DI, 5)
- Zusammenhänge finden, darstellen: Erlös = Eintrittspreis · Besucherzahl (HE, DI, 10)
- die Auswahl der veränderlichen Größe begründen (HE, KA)
- die Zielfunktion aufstellen (Einsetzen von Funktionen für die Besucherzahl und den Eintrittspreis) (HE, DI, 16)
- die Zielfunktion in die Normalform quadratischer Funktionen umformen (DI, 4)
- die erste Ableitung bilden und deren Nullstelle bestimmen (FO, 16)
- auf die mögliche Extremstelle schließen (KA, 5)
- das Vorgehen kommentieren (Prüfen der hinreichenden Bedingung) (DI, 2)
- die zweite Ableitung am Ort der möglichen Extremstelle bestimmen (FO, 10)
- auf Maximum schließen (KA, 12)
- die Graphen von Zielfunktion und erster Ableitung analysieren (HE, 6)
- begründen, dass das lokale Maximum hier auch dem globalem entspricht (KA, 8)
- den optimalen Eintrittspreises und maximalen Erlös bestimmen (FO, 12)
- das Ergebnis interpretieren (DI, 11)

---

[119] Die große Übereinstimmung der Schülerlösungen ist erstaunlich, wenn die Aufgaben 11B6.2 und 11B7.2 verglichen werden. Die Zielfunktion von Aufgabe 11B7.2 ist eine quadratische Funktion, deren Eigenschaften den Schülern gut vertraut sind, wie sie in Aufgabe 11B6.1 zeigten. Auch hier hätten die Schüler deshalb den Scheitelpunkt der Parabel und damit das Extremum bestimmen können. Bei Aufgabe 11B6.2 hat ein Großteil der Schüler die graphische Analyse noch der formalen vorgezogen. Ist diese Alternative durch die fortgeschrittene Routine der Schüler mit Extremwertbetrachtungen verloren gegangen?

Mit einer mathematisch eher kompakten Aufgabe können auf Grund der Anwendungssituation eine ganze Reihe unterschiedlicher mathematischer Kompetenzen (zunächst potenziell) angeregt werden: vier heuristisch-experimentelle Aktivitäten, sieben darstellend-interpretative Aktivitäten, drei formal-operative Aktivitäten und vier kritisch-argumentative Aktivitäten.

Unter den von den Schülern häufig ausgeführten Aktivitäten finden sich alle Aktivitätsbereiche wieder. Allerdings wurden auch viele der intendierten Aktivitäten eher selten umgesetzt. Zum einen unterschieden sich die Lösungswege einiger Schüler im Detail von der Beispiellösung. Zum anderen hat ein Teil der Schüler die Aufgabe weniger umfassend ausgeführt und den Lösungsweg weniger ausführlich dargelegt.

Insgesamt übten die Schüler 47 darstellend-interpretative, 40 heuristisch-experimentelle, 47 formal-operative und 26 kritisch-argumentative Aktivitäten aus. Hier zeigt sich, wie vielfältig Modellierungsaufgaben sein können. Der kritisch-argumentative Bereich wurde in der Umsetzung allerdings vernachlässigt.

**Vergleich unterschiedlicher Lösungswege**

Differenzierungen in den Lösungswegen fanden sich vor allem bei der Modellierung der Zielfunktion. Hierbei war zunächst der Ansatz für den Erlöses als Produkt aus Besucherzahl und Eintrittpreis zu finden. Anschließend waren aus den Angaben der Aufgabenstellung Funktionen für Besucherzahl und Eintrittspreis zu entwickeln und in den Ansatz für den Erlös einzusetzen. Unterschiede zwischen den Lösungen gab es in der Wahl der zu variierenden Größe:

- Erlös in Abhängigkeit von der Anzahl der Preissenkungen (12 Schüler)
- Erlös in Abhängigkeit vom Eintrittspreis (3 Schüler)
- Erlös in Abhängigkeit vom Betrag der Preisminderung (1 Schüler).

Weitere Unterschiede gab es in der Darstellung der Modellierung:

- Angabe der formalen (End-)Darstellung der Zielfunktion (Modellierung nicht dargestellt) (2 Schüler)
- unvollständige Darstellung der Modellierung (Zusammentragen der Angaben der Aufgabenstellung, dann sofort Angabe der Zielfunktion) (2 Schüler)
- Beschreibung der Entstehung der Zielfunktion (Modellierung) (8 Schüler)
- Modellierung dargestellt und Erläuterung der Variablen (4 Schüler)

Neben den Differenzierungen bei der Modellierung gab es solche beim Prüfen einer hinreichenden Bedingung für Extrema:

- Berechnung der zweiten Ableitung an der potenziellen Extremstelle (10 Schüler)
- Analyse des Anstieges in einer Umgebung der möglichen Extremstelle (Prüfen eines Vorzeichenwechsels der ersten Ableitung) (2 Schüler)

Vier Schüler prüften die hinreichende Bedingung nicht.

Es gab sieben Aktivitäten, die nicht in der Beispiellösung wohl aber in Bearbeitungen der Schüler auftraten:

- die Angaben der Aufgabenstellung in lineare Funktionen für Preis und Besucherzahl übersetzen (DI, 7)
- den Vorzeichenwechsel formal prüfen (FO, 2)
- das Kriterium mittels Quantoren formal darstellen (DI, 9)
- den Definitionsbereich für $x$ analysieren und angeben (HE, 2)
- die Funktion für die Zuschauerzahl in die des Erlöses einsetzen (FO, 2)
- begründen, dass nur ein relatives Maximum vorliegt (KA, 1)
- beschreiben, wie die Steigung 1250 entsteht, Ableitung formal bestimmen (DI, FO, 1)

**Ausgeführte Schüleraktivitäten und objektive Aufgabenparameter**

Die Umsetzung der heuristisch-experimentellen und formal-operativen Aktivitäten entsprach den Erwartungen. Von sieben intendierten darstellend-interpretativen Aktivitäten wurden dagegen von den Schülern im Durchschnitt nur 4,2 umgesetzt. Von vier intendierten kritisch-argumentativen Aktivitäten wurden durchschnittlich nur 1,6 ausgeführt.

*Richtige Zielfunktionen, aber nur teilweise wurde die Modellierung dargestellt*

Alle Schüler fanden eine richtige Zielfunktion, aber nur ein Teil der Schüler stellte die Modellierung auch dar. So ist es sinnvoll zu Beginn der Bearbeitung die Angaben der Aufgabenstellung zusammenzustellen und Abhängigkeiten zwischen den Größen zu verdeutlichen und vor dem Aufstellen einer formalen mathematischen Darstellung die verwendeten Variablen zu erläutern bzw. zu definieren. Dass die Schüler derartige Aktivitäten in der Mehrheit nicht ausführten bzw. nicht nachvollziehbar darlegten, liegt vermutlich an ihrer Unerfahrenheit mit außermathematischen Modellierungen, insbesondere mit den Anforderungen an eine Darstellung der Modellierung von Anwendungsproblemen. Die Schüler haben dagegen keine Schwierigkeiten mit den heuristischen Anforderungen der Anwendungsaufgabe. Innerhalb der Aufgabenstellung gibt es keine explizite Aufforderung zu einer ausführlichen und nachvollziehbaren Darstellung der Modellierung. Dies könnte eine Alternative sein, um die Schüler zu einer verbesserten Darstellung zu bringen, bis sie die Anforderungen verinnerlicht haben. Explizite Anweisungen stehen im Widerspruch zur Zielstellung, realen Problemsituationen nahe zu kommen. An dieser Stelle hätten sie jedoch die Transparenz der Beurteilungskriterien erhöht. In Bezug auf den Lernprozess ist es wichtig, verstärkt Modellierungen realitätsnaher Problemstellungen in den Unterricht einzubeziehen, geeignete Lösungsdarstellungen von Schülern oder dem Lehrer zu demonstrieren und den Schülern differenzierte Rückmeldungen zu ihren eigenständigen Modellierungen zu geben.

*Geringe Umsetzung argumentativer Aktivitäten*

Von den Schülern wurden weniger argumentative Tätigkeiten ausgeführt, als es das Potenzial der Aufgabe erlaubt hätte. Lediglich einfache Schlussfolgerungen, wie die auf das Vorliegen eines Maximums nach formaler Ausführung der Extremwertbestimmung, wurden häufig gezogen. Begründungen des Vorgehens, beispielsweise bezüglich der Auswahl der veränderlichen Größe, wurden nicht formuliert. Auch eine Begründung dafür, dass das lokale Maximum dem globalen entspricht, erbrachte nur die Hälfte der Schüler. Eine mögliche Ursache für die geringe Ausführung argumentativer Tätigkeiten kann sein, dass die Aufgabe keine explizite Aufforderung zur Argumentation enthielt. Noch nicht alle Schüler erkennen, wann eigenständige Argumentationen und Erläuterungen wichtig sind. Das Anforderungsniveau der Argumentation war dagegen vergleichsweise niedrig.

*Hohe Lösungsquote*

Auch, wenn die Darstellung des Lösungsprozesses nicht immer zufriedenstellend war, konnten alle Schüler das richtige Ergebnis für den optimalen Eintrittspreis ermitteln. Ursache für diese hohe Lösungsquote könnte sein, dass nur eine mathematische Wissenseinheit angesprochen wurde, die Komplexität der einbezogenen mathematischen Inhalte und Konzepte somit gering war, was auch für die mathematischen Verfahren und Operationen gilt. Dagegen waren die notwendigen kognitiven Fähigkeiten anspruchsvoll, denn zur Bestimmung der Zielfunktion waren sowohl Analyse als auch Synthese erforderlich. Die heuristischen Anforderungen waren nicht zu gering, denn die Schüler mussten selbst Zusammenhänge zwischen den gegebenen Größen herstellen und einen Weg finden, die Zielfunktion zu entwickeln.

## Anhang 2.5 Analyse der Aufgabe Vektorraum der magischen Quadrate

Aufgabenstellung

Unter einem magischen Quadrat der Ordnung 3 versteht man eine Anordnung von 9 verschiedenen (zunächst rationalen) Zahlen in einem quadratischen Schema (3 Zeilen und drei Spalten), so dass die Summe der Zahlen in jeder Spalte, jeder Zeile und in jeder der beiden Diagonalen jeweils denselben Wert $S$ besitzt.

- Bilden Sie aus den Zahlen 1 bis 9 ein magisches Quadrat.
- Konstruieren Sie drei weitere magische Quadrate (beliebige Zahlen, beliebige Summe). Wie sind Sie vorgegangen? Warum?
- Definieren Sie eine geeignete Addition und eine skalare Multiplikation und untersuchen Sie, ob die Menge aller magischen Quadrate der Ordnung 3 mit den so definierten Verknüpfungen ein Vektorraum ist.
- Leiten Sie aus diesem Ergebnis weitere Konstruktionsmöglichkeiten für magische Quadrate ab und begründen Sie diese.

Mögliche Lösung

Magisches Quadrat aus den Zahlen 1 bis 9:
Da das magische Quadrat drei Spalten (auch drei Zeilen) hat und die Summe der Zahlen der Spalten für die drei Spalten gleich ist, ergibt sich die magische Summe $S$, wenn alle Ziffern des magischen Quadraten addiert und dann durch drei geteilt werden. Für das magische Quadrat aus 1 bis 9 ergibt sich $S = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{3} = \frac{45}{3} = 15$.

Damit kann durch Probieren das magische Quadrat aus den Zahlen 1 bis 9 erstellt werden.

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |

Konstruieren weiterer magischer Quadrate:
1. Möglichkeit:
Zu jeder Zahl des bestehenden magischen Quadrates wird die gleiche rationale Zahl $r$ addiert. Dadurch erhöht sich die magische Summe um $3r$. Die Eigenschaft, dass die Zeilen-, Spalten- und Diagonalensummen gleich sind, bleibt dabei erhalten.

Begründung: Für die magische Summe $S_1$ eines bestehenden magischen Quadrates gilt $S_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23}$ . Als Beispiel wird hier die Gleichheit der Summen der ersten und zweiten Zeile betrachtet. Dies kann genauso auf die anderen Zeilenpaare, alle Spaltenpaare und das Diagonalenpaar übertragen werden. Wird zu jeder Ziffer $r$ addiert, ergibt sich unter Verwendung des Kommutativgesetzes und des Assoziativgesetzes der Addition rationaler Zahlen für das neue magische Quadrat:

$$S_2 = b_{11} + b_{12} + b_{13} = a_{11} + r + a_{12} + r + a_{13} + r = 3\mathrm{r} + S_1 = 3\mathrm{r} + a_{21} + a_{22} + a_{23} =$$
$$a_{21} + r + a_{22} + r + a_{23} + r = b_{21} + b_{22} + b_{23}$$

Auch im neuen Quadrat sind die Summen der ersten und zweiten Zeile somit gleich.

Beispiel: $r = 10$, $S_2 = 45$

| | | |
|---|---|---|
| 16 | 11 | 18 |
| 17 | 15 | 13 |
| 12 | 19 | 14 |

2. Möglichkeit:

Ein magisches Quadrat entsteht auch, wenn jede Zahl eines bestehenden magischen Quadrates mit einem Skalar $p$ multipliziert wird. Die magische Summe wird dann ebenfalls mit $p$ multipliziert. Die Eigenschaft der Gleichheit von Zeilen-, Spalten- und Diagonalensumme bleibt erhalten. Grundlage dafür ist das Distributivgesetz für rationale Zahlen:

$$S_3 = b_{11} + b_{12} + b_{13} = pa_{11} + pa_{12} + pa_{13} = p(a_{11} + a_{12} + a_{13}) = pS_1 =$$
$$p(a_{21} + a_{22} + a_{23}) = pa_{21} + pa_{22} + pa_{23} = b_{21} + b_{22} + b_{23}$$

3. Möglichkeit:

Der dritte Weg, ein neues magisches Quadrat zu erzeugen, ist die Addition zweier vorhandener magischer Quadrate, wobei jeweils die Zahlen der sich entsprechenden Felder addiert werden. Dabei addieren sich auch die magischen Summen. Grundlage ist auch hier das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz der Addition rationaler Zahlen.

$$S_4 = c_{11} + c_{12} + c_{13} = a_{11} + b_{11} + a_{12} + b_{12} + a_{13} + b_{13} = (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + (b_{11} + b_{12} + b_{13}) = S_1 + S_2 =$$
$$(a_{21} + a_{22} + a_{23}) + (b_{21} + b_{22} + b_{23}) = a_{21} + b_{21} + a_{22} + b_{22} + a_{23} + b_{23} = c_{21} + c_{22} + c_{23}$$

Definition der Addition zweier magischer Quadrate:

Zwei magische Quadrate werden addiert, indem jeweils die Zahlen der sich entsprechenden Felder addiert werden (komponentenweise Addition):

$$Q_1 \oplus Q_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix}$$

Definition der Multiplikation eines magischen Quadrates mit einem (rationalen) Skalar $p$ :

$$p \cdot Q_i = p \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pa_{11} & pa_{12} & pa_{13} \\ pa_{21} & pa_{22} & pa_{23} \\ pa_{31} & pa_{32} & pa_{33} \end{bmatrix}$$

Untersuchung auf Vektorraumeigenschaften:

Nun wird untersucht, ob für die Menge $Q$ der magischen Quadrate der Ordnung 3 zusammen mit den oben definierten Verknüpfungen die Vektorraumaxiome gelten. Ist dies der Fall, ist $Q$ ein Vektorraum.

VR1) $(Q, \oplus)$ ist eine Abelsche Gruppe

a) $\oplus$ ist innerhalb $Q$ abgeschlossen, d. h. für $Q_1, Q_2 \in Q$ folgt $Q_1 \oplus Q_2 \in Q$. Dies ist mit der oben definierten Verknüpfung $\oplus$ gegeben. Bei der Addition zweier magischer Quadrate werden die magischen Summen addiert, die definierende Eigenschaft der Gleichheit von Zeilen-, Spalten- und Diagonalensumme bleibt dabei jedoch erhalten, wie gezeigt wurde. Die Summe zweier magischer Quadrate ist somit wieder ein magisches Quadrat. Allerdings können bei der komponentenweisen Addition zweier magischer Quadrate zwei gleiche Ziffern entstehen. Nach der in der Aufgabenstellung gegebenen Definition magischer Quadrate wäre die Summe kein magisches Quadrat mehr. Es liegt somit höchstens dann ein Vektorraum vor, wenn die Definition erweitert wird und gleiche Ziffern innerhalb eines magischen Quadrates zugelassen werden.

b) Es existiert ein neutrales Element $Q_0 \in Q$, so dass für alle magischen Quadrate $Q_i \in Q$ gilt: $Q_i + Q_0 = Q_i$. Auf Grund der oben definierten komponentenweisen Addition müssen alle Ziffern des „neutralen Quadrates“ Null sein: $Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dies ist nach der angegebenen Definition kein magisches Quadrat, da alle Elemente gleich sind. Ein neutrales Element kann für die Menge $Q$ somit nur konstruiert werden, wenn gleiche Ziffern innerhalb eines magischen Quadrates zugelassen werden.

Die folgenden Vektorraumaxiome werden unter der erweiterten Definition für magische Quadrate betrachtet, da sonst eine Fortführung der Untersuchung auf Vektorraumeigenschaften keinen Sinn macht.

c) Für alle $Q_i \in Q$ existiert ein inverses Element $Q_i^* \in Q$, so dass gilt $Q_i + Q_i^* = Q_0$, wobei $Q_0$ das neutrale Element ist. Diese Forderung wird erfüllt, wenn $Q_i^*$ an jeder Stelle das jeweils entgegengesetzte Element zum Element von $Q_i$ hat, d. h. $q_{ij}^* = -q_{ij}$. ($q_{ij}^* + q_{ij} = -q_{ij} + q_{ij} = 0$)

d) Es gelten das Kommutativ- und Assoziativgesetz für die Addition zweier magischer Quadrate: Auf Grund der definierten Verknüpfung $\oplus$ wird die Addition magischer Quadrate auf die übliche Addition rationaler Zahlen zurückgeführt. Da innerhalb der rationalen Zahlen beide Gesetze gelten, übertragen sie sich auch auf die Menge der magischen Quadrate. Exemplarisch wird das Kommutativgesetz formal nachgewiesen. Das Vorgehen für das Assoziativgesetz ist analog.

$$Q_1 \oplus Q_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \overset{Def \oplus.}{=} \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\overset{Komm.\,rat.\,Zahlenn}{=} \begin{bmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & b_{13}+a_{13} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & b_{23}+a_{23} \\ b_{31}+a_{31} & b_{32}+a_{32} & b_{33}+a_{33} \end{bmatrix} \overset{Def.\oplus}{=} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = Q_2 \oplus Q_1$$

VR2) Für alle $Q_i \in Q$ gilt $1 \cdot Q_i = Q_i$ (neutrales Element der skalaren Multiplikation):

$$1 \cdot Q_i = 1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a_{11} & 1a_{12} & 1a_{13} \\ 1a_{21} & 1a_{22} & 1a_{23} \\ 1a_{31} & 1a_{32} & 1a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = Q_i$$

VR3) Es gilt das Assoziativgesetz der skalaren Multiplikation, d. h. für alle rationalen Zahlen $r$, $s$ sowie $Q_i \in Q$ gilt $r \cdot (s \cdot Q_i) = (rs) \cdot Q_i$.

Dieses Axiom gilt, da die definierte skalare Multiplikation in $Q$ auf die Multiplikation rationaler Zahlen zurückgeführt wird, für die das Assoziativgesetz gilt. Der formale Nachweis erfolgt analog zum Nachweis der Kommutativität von $\oplus$.

VR4) Es gelten die Distributivgesetze in $Q$:

- Für alle rationalen Zahlen $r$, $s$ sowie $Q_i \in Q$ gilt $(r+s)\cdot Q_i = r\cdot Q_i \oplus s\cdot Q_i$ .
- Für alle rationalen Zahlen $r$ sowie für alle $Q_j \in Q$ und für alle $Q_k \in Q$ gilt $r\cdot(Q_j \oplus Q_k) = r\cdot Q_j \oplus r\cdot Q_k$ .

Auch die Distributivgesetze gelten auf Grund der Rückführung der Rechenoperationen in $Q$ auf die für rationale Zahlen und können ähnlich dem Kommutativgesetz nachgewiesen werden.

Somit bildet die Menge der magischen Quadrate dann einen Vektorraum, wenn ihre Definition erweitert wird und auch gleiche Ziffern innerhalb eines magischen Quadrates zugelassen werden.

Durch die definierten Verknüpfungen und vielfältigen möglichen Kombinationen und Hintereinanderausführungen der beiden Verknüpfungen lassen sich nun beliebig viele neue magische Quadrate erzeugen. Linearkombinationen magischer Quadrate ergeben immer wieder neue magische Quadrate (z. T. aber eben welche mit gleichen Ziffern).

Kompetenzspektrum

Grundkenntnisse: Vektorraum (Definition, Vektorraumaxiome, Verknüpfungen) (GW)
Herstellen von Zusammenhängen und Entwickeln geeigneter Lösungsstrategien (HE)
Beschreiben des Vorgehens (DI)
Mathematisch Argumentieren: Begründen, Prüfen/Nachweisen von Bedingungen (KA)
Ausführen formaler Operationen und Umformungen (FO)
Formal und fachsprachlich verbal Darstellen (DI)

**Analyse der Aufgabe nach den Kriterien an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen**

Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

*Bedingungen auf Grund der Beurteilungssituation*

Validität

Voraussetzung für die zur Beurteilung der mathematischen Kompetenzen des Kompetenzspektrums notwendigen Schüleraktivitäten ist, dass die Schüler die in der Aufgabenstellung formulierte Definition magischer Quadrate nachvollziehen können. Auf Grund der Dominanz fachsprachlicher Begriffe in der Beschreibung handelt es sich dabei um die

Interpretation einer verbalen Darstellung einer mathematischen Situation bzw. mathematischer Zusammenhänge und somit um eine darstellend-interpretative Kompetenz. In den Schülerarbeiten wird diese Kompetenz schwer von den heuristisch-experimentellen Kompetenzen trennbar sein (Überlagerung). Die Aktivitäten des Kompetenzspektrums dieser Aufgabe gehören zu den wichtigen in den EPA (KMK 2002) und den Bildungsstandards für das Fach Mathematik (KMK 2004) festgehaltenen mathematischen Kompetenzen.

Gerechtigkeit

Verständlichkeit: Die Aufgabenstellung enthält eine verbale fachsprachliche Beschreibung der Eigenschaften magischer Quadrate sowie eine Vielzahl fachsprachlicher Begriffe (z. B. Quadrat, Diagonale, Addition, Multiplikation etc.). Diese sind den Schülern jedoch zum großen Teil seit der Grundschule vertraut. Auch die Anweisungen („konstruieren Sie", „definieren Sie" etc.) entsprechen den Schülern bekannten Formulierungen.

Erwartungstransparenz: Die Anweisungen werden überwiegend explizit formuliert, auch zum Beschreiben des Vorgehens und zum Begründen wird explizit aufgefordert, um Aktivitäten zu bedingen, die eine Beurteilung der entsprechenden Kompetenzen erlauben. Einige Anweisungen, wie „untersuchen Sie", „leiten Sie ab", weisen indirekt darauf hin, den Lösungsweg auch darzustellen.

Ergebnisorientierung: Die Aufgabe ist in Teilaufgaben gegliedert, die sich wiederum aus Lösungsschritten und Aktivitäten zusammensetzen, die separat beurteilt werden können.

Schwierigkeit: Mit der Aufgabe wird ein neuer Inhalt erarbeitet und in das Begriffsnetz der Schüler eingeordnet. Ziel ist es, dem erarbeiteten Konzept des Vektorraumes mit der Zuordnung eines weiteren Repräsentanten Gestalt zu geben und die Definition des Vektorraumes durch Anwendung zu verinnerlichen. Die Aufgabe ist durchaus anspruchsvoll, wie die Analyse der Anforderungen der Aktivitätsbereiche (siehe unten) zeigt, und in der Anzahl und Vielzahl der einbezogenen mathematischen Aktivitäten komplex. Die notwendigen mathematischen Konzepte stehen den Schülern jedoch zur Verfügung. Es geht darum, einen bekannten Sachverhalt in einer neuartigen komplexen Situation anzuwenden.

Möglichkeit individueller Wege (Offenheit)

Für keine der Teilaufgaben wird ein Vorgehen benannt, die Aufgabe ist methodisch offen. Individuelle Zugänge sind möglich. Besonderheit der Aufgabe sind Teilaufgaben, bei denen Intuition und eine gute Idee gefragt sind und schneller zum Ziel führen als systematische Überlegungen. Der Schwerpunkt der Aufgabe, das Prüfen der Vektorraumeigenschaften, ist analytisch durch das systematische Prüfen der Axiome lösbar.

*Bedingungen durch Anspruch an Aufgabenqualität*

Individuelle und gesellschaftliche Bedeutung der Aufgabe: Die Aufgabe ist rein innermathematisch, hat keine direkte gesellschaftliche Bedeutung. Sie ist für die Schüler individuell insofern bedeutsam, als dass ein wichtiges mathematisches Konzept, genauer eine wichtige mathematische Struktur, verdeutlicht und verinnerlicht wird, indem ein Repräsentant ausführlich betrachtet wird. Außerdem kann der vielleicht aus Knobeleien bekannte Kontext der magischen Quadrate Interesse wecken.

Kognitive Forderung: Durch die Aufgabe werden unterschiedliche mathematische Inhalte und Konzepte verbunden, was der weiteren Ausdifferenzierung und Festigung des mathematischen Begriffsnetzes dient. Beispielsweise können durch die Übertragung von bekannten Gesetzen auf neue Mengen Strukturen aufgedeckt werden. Der abstrakte Begriff des Vektorraums wird an einem Repräsentanten konkretisiert und veranschaulicht. Neues kann mit Bekanntem verbunden werden. Eine methodische Förderung ergibt sich aus den vielseitigen einbezogenen Aktivitäten. Die Komplexität der Aufgabe macht eine gute Gliederung und Strukturierung des Vorgehens, aber auch eine reflektierende Sichtweise notwendig. Kognitive Fähigkeiten bis zur höchsten Stufe des Evaluierens können in die Bearbeitung der Aufgabe eingebracht werden.

*Kriterien verbunden mit dem Ziel des Ansprechens vielseitiger mathematischer Kompetenzen*

Darstellend-interpretative Aktivitäten: verbal beschreiben, formal darstellen, zwischen Darstellungen übersetzen, Darstellungen interpretieren

Heuristisch-experimentelle Aktivitäten: Zusammenhänge analysieren, geeignete Lösungsstrategien finden, analysieren, verallgemeinern, systematisch probieren

Formal-operative Aktivitäten: algebraische Operationen und Umformungen ausführen

Kritisch-argumentative Aktivitäten: begründen, Eigenschaften prüfen, schlussfolgern

**Fazit der Analyse der entscheidenden Kriterien: Die Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen werden im Wesentlichen erfüllt, allerdings sind Überlagerungen von Kompetenzen möglich, was die Validität einschränkt.**

Komplexitätsbeschreibende Merkmale von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

Komplexität der einbezogenen mathematischen Inhalte

Wissenseinheit/Stoffgebiet und curriculare Wissensstufe: Mit dieser Aufgabe aus dem Gebiet der linearen Algebra werden mehrere Wissenseinheiten verbunden: Vektorraum, Verknüpfungen, komponentenweise Addition und skalare Multiplikation, Abgeschlossenheit bezüglich einer Verknüpfung, Vektorraumaxiome bzw. im einzelnen Kommutativität, Assoziativität, Nullelement, inverses Element, Distributivität. Die Besonderheit dieser Aufgabe ist jedoch, dass eine neue Wissenseinheit konstruiert wird, die Wissenseinheit „magisches Quadrat“. Die Schüler lernen hier die Definition des Begriffes, seine Eigenschaften sowie Verbindungen zu anderen Wissenseinheiten, wie z. B. „Vektorraum“ kennen. Die Wissenseinheiten „Vektorraum“ und „Vektorraumaxiome“, welche den Kern der Aufgabe bilden, zählen zu den anspruchsvollen Themen der Sekundarstufe II.

Art des Wissens: Faktenwissen (z. B. Vektorraumaxiome, Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, Distributivgesetz.), prozedurales Wissen (z. B. komponentenweise Addition), konzeptuelles Wissen (z. B. Rechengesetze verallgemeinern/übertragen, (exaktes) Definieren).

Auf Grund der Vielzahl der einbezogenen Wissensinhalte und ihrer Komplexität entsprechen die Anforderungen dem Bereich 3.

Komplexität bezüglich spezifischer Aktivitätsbereiche

Anforderungen im heuristischen Bereich: Bei dieser Aufgabe ist eine innermathematische Modellierung auszuführen. Es ist eine geeignete Addition und skalare Multiplikation für die Verknüpfung magischer Quadrate zu entwickeln. Innerhalb der Aufgabenstellung wird kein Hinweis gegeben, wie dies erfolgen kann (zweite Komplexitätsstufe). Auch beim Prüfen der Vektorraumaxiome werden Modellierungsprozesse der zweiten Komplexitätsstufe erforderlich, z. B. beim Finden des neutralen und der inversen Elemente.
Zur Einschätzung der Offenheit der Aufgabe ist es sinnvoll, Teilaufgaben zu betrachten. Zunächst ist aus den Zahlen 1 bis 9 ein magisches Quadrat zu erstellen. Diese Teilaufgabe ist methodisch offen; es sind hier unterschiedlichste Herangehensweisen möglich: vom unstrukturierten Probieren bis zum analytischen Vorgehen. Die drei weiteren Quadrate können ebenfalls sehr verschieden sein. Dieser Aufgabenabschnitt ist sowohl in der Methode als auch im Ziel offen.

Auch der nächste Abschnitt ist methodisch offen formuliert. Die Schüler sollen kreativ sein und sich geeignete Verknüpfungen für magische Quadrate überlegen. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten, die komponentenweise Addition und skalare Multiplikation sind jedoch naheliegend. Die Aufforderung zur Untersuchung, ob die Menge der magischen Quadrate mit den definierten Verknüpfungen einen Vektorraum darstellt, ist eigentlich die Aufforderung zum Prüfen der Vektorraumaxiome. Dieser Aufgabenteil ist zwar methodisch offen formuliert, aber letztlich gibt es nur eine mögliche Herangehensweise (für eine angemessene Bearbeitung). Die eigenständige Anordnung bekannter Strategien in neuartigen, komplexen Zusammenhängen wird dem Anforderungsniveau 3 zugeordnet.

Anforderungen im formal-operativen Bereich: Zur Lösung dieser Aufgabe sind keine mathematischen Verfahren oder Algorithmen notwendig, dagegen eine Reihe algebraischer Operationen. Beim Erstellen der magischen Quadrate sind zur Kontrolle der magischen Summe Additionen auszuführen (Grundschulkenntnisse). Beim Prüfen der Vektorraumaxiome sind algebraische Termumformungen im Bereich der rationalen Zahlen auf allgemeiner Ebene auszuführen (Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetze). Da die „neuen“ Verknüpfungen auf die bekannten Rechenoperationen im Bereich der rationalen Zahlen zurückgeführt werden, sind insgesamt mathematische Routineoperationen ausreichend, die spätestens in der achten Klasse erworben werden: Anforderungsbereich 1.

Anforderungen im darstellend-interpretativen Bereich: Die erste Übersetzung ist bereits notwendig, um die Aufgabenstellung, insbesondere die verbal fachsprachliche Definition magischer Quadrate überhaupt zu verstehen. Die Beschreibung der Eigenschaften magischer Quadrate erfolgt in Textform, verbal bis auf einzelne Ziffern. Um eine Vorstellung von einem magischen Quadrat zu bekommen muss dieses und sei es in Gedanken in eine schematische Darstellung übersetzt werden. Bei der Erstellung magischer Quadrate wird auf der formal-schematischen Ebene gearbeitet. Das geforderte Beschreiben des Vorgehens kann verbal oder auch symbolisch erfolgen. Bei der Definition der Verknüpfungen kann die formale Sprache genutzt werden, ebenso bei der Untersuchung der Vektorraumaxiome. Für Schlussfolgerungen ist wieder eine Übersetzung in die verbale Darstellung notwendig. Die gefundenen Konstruktionsmöglichkeiten können verbal oder symbolisch beschrieben werden. Bei der Bearbeitung der Aufgabe sind somit viele Übersetzungen sowie verbale, schematische und formale Darstellungen vorzunehmen, wovon einige neuartig und eigenständig zu entwickeln sind: Anforderungsbereich 3.

Anforderungen im kritisch-argumentativen Bereich: In der Aufgabenstellung wurde durch explizite Aufforderungen Gewicht auf mathematische Argumentationen gelegt: Das Vorgehen bei der Konstruktion magischer Quadrate ist zu begründen. Die Untersuchung der Vektorraumeigenschaften entspricht bei exakter Ausführung dem Nachweis der Vektorraumaxiome bzw. dem Nachweis, dass diese nicht gelten. Beim Prüfen der einzelnen Axiome sind einfache Schlussfolgerungen zu ziehen. Weitere gefundene Konstruktionsmöglichkeiten sind zu begründen. Es werden somit eine Reihe von Argumentationen mit unterschiedlichen Anforderungen bezüglich der Stringenz und Exaktheit notwendig. Die Begründungen sollten fachsprachlich und mit mathematischen Argumenten erfolgen. Der Nachweis der Vektorraumaxiome entspricht einem Beweis mit entsprechenden formalen Anforderungen sowie Anforderungen bezüglich der Exaktheit und mathematischen Stringenz der Argumentation. Die zu den einzelnen Axiomen gezogenen einfachen Schlussfolgerungen können verbal oder symbolisch vollzogen werden. Die eigenständige, komplexe Argumentation wird dem Anforderungsniveau 3 zugeordnet.

**Analyse der umgesetzten Schüleraktivitäten**

Bei dieser Aufgabe gab es innerhalb der schulischen Erprobung Unterschiede zu den anderen Aufgaben, die ohne Kommentar als Hausaufgabe zur selbständigen Bearbeitung aufgegeben wurden, wodurch sich die realisierten Anforderungen nicht von den objektiven unterschieden. Deshalb erfolgt an dieser Stelle zunächst eine kurze Beschreibung der konkreten Situation des Einsatzes der Aufgabe.

Bei der Umsetzung der Aufgabe in der Untersuchungsklasse ergaben sich Schwierigkeiten auf Grund einer ungünstig gewählten Formulierung der Aufgabe. Die Schüler sollten nicht „untersuchen, ob“ ein Vektorraum vorliegt, sondern „nachweisen, dass“ ein Vektorraum vorliegt. Dies war jedoch mit der gegeben Definition nicht möglich, denn diese lies keine gleichen Ziffern innerhalb eines magischen Quadrates zu, was aber bei der Addition magischer Quadrate auftreten kann. Außerdem konnte mit der gegebenen Definition kein neutrales Element bezüglich der Addition gefunden werden. Dies erkannten die Schüler und äußerten ihre Schwierigkeiten und ihren (berechtigten) Frust, da sie keinen Ansatz für ihre Hausaufgaben fanden. Eine kurze Diskussion in der Klasse wurde durch die Lehrerin schließlich mit den Worten „Nun versucht mal, was geht und begründet, warum es nicht geht“ beendet, um nicht zu viel vorwegzunehmen. Dies war natürlich eine ungewohnte Aufgabenstellung für die Schüler, was bei der Bewertung der Ergebnisse berücksichtigt wurde. Die spontane Aufforderung der Lehrerin kommt der Aufforderung „Untersuchen Sie“, der hier vorgestellten Aufgabenformulierung nahe, weshalb eine Analyse der Schülerarbeiten dennoch für sinnvoll gehalten wird.

Intendierte Aktivitäten (Aktivitätsbereich, Häufigkeit der Umsetzung durch die 15 Schüler, welche die Aufgabe bearbeiteten):

- ein magisches Quadrat aus den Zahlen 1 bis 9 aufstellen (HE, DI, 15)
- einfache Berechnungen[120] ausführen (FO, 15)
- eine Konstruktionsidee finden: Addition aller Komponenten mit einem Skalar (HE, 6)
- begründen/formal prüfen, dass so wieder ein magisches Quadrat entsteht (KA, DI, FO)
- eine Konstruktionsidee finden: Multiplikation aller Komponenten mit einem Skalar (HE, 6)
- begründen/formal prüfen, dass so wieder ein magisches Quadrat entsteht (KA, DI, FO)
- eine Konstruktionsidee finden: Addition zweier magischer Quadrate (HE, 2)
- begründen/formal prüfen, dass so wieder ein magisches Quadrat entsteht (KA, DI, FO)
- Addition magischer Quadrate definieren (HE, 8)
- diese Verknüpfung formal darstellen (DI, 6)
- skalare Multiplikation magischer Quadrate definieren (HE, 8)
- diese Verknüpfung formal darstellen (DI, 6)
- ein geeignetes Verfahrens zur Untersuchung auf Vektorraumeigenschaften (bzw. eine geeignete Nachweisstrategie) finden: Prüfen der Vektorraumaxiome (HE, 5)
- begründen, dass die Menge der magischen Quadrate bezüglich der definierten komponentenweisen Addition nicht abgeschlossen ist (KA, 2)
- folgern, dass eine Erweiterung/Modifikation der Definition magischer Quadrate nötig ist, um einen Vektorraum zu erhalten (KA, 1)
- begründen, dass kein neutrales Element existiert (KA, 2)
- begründen, dass nur bei der erweiterten Definition magischer Quadrate auch inverse Elemente existieren (KA, 1)
- begründen/formal nachweisen, dass Assoziativ-, Kommutativgesetz gelten (KA, FO; 1)
- das neutrale Element bezüglich der skalaren Multiplikation formal darstellen (DI, 5)
- formal nachweisen, dass tatsächlich das neutrale Element gefunden wurde (KA, 1)

[120] Auf Grund der Einfachheit der Berechnungen zur Erstellung eines magischen Quadrates erfolgt eine Zusammenfassung der Berechnungen für alle Quadrate.

- begründen, dass für die skalare Multiplikation das Assoziativgesetz gilt (KA, 2)
- begründen, dass die Distributivgesetze gelten (KA)
- Zusammenhänge zu Linearkombination und Erzeugendensystem herstellen (HE, 3)
- beschreiben, wie weitere Konstruktionsmöglichkeiten durch die Vektorraumaxiome eröffnet werden (HE, DI, 1)

Die intendierte Lösung schließt neun heuristisch-experimentelle, acht darstellend-interpretative, fünf formal-operative und zehn kritisch-argumentative Kompetenzen ein. Von diesen Aktivitäten wurden nur zwei von allen Schülern ausgeführt. Auf Grund der Komplexität der Aufgabe und der methodischen Offenheit waren die Lösungen der Schüler sehr vielfältig und unterschieden sich z. T. deutlich von der Beispiellösung.

Insgesamt wurden von den Schülern 91 heuristisch-experimentelle, 78 darstellend-interpretative, 34 formal-operative und 33 kritisch-argumentative Aktivitäten ausgeführt. Der intendierte Schwerpunkt der heuristisch-experimentellen Aktivitäten konnte umgesetzt werden, der bezüglich kritisch-argumentativer Kompetenzen allerdings nicht.

Von den Schülern wurden durchschnittlich 16 Aktivitäten pro Bearbeitung ausgeführt. In der Beispiellösung wurden 44 verschiedene Aktivitäten unterschieden. Nur wenige Arbeiten kamen in Ausführlichkeit und Qualität den Erwartungen nahe. Dies unterscheidet die Aufgabe von den zuvor beschriebenen der Analysis, was vermutlich mit der höheren Komplexität der Aufgabe zusammenhängt.

**Vergleich verschiedener Lösungswege**[121]

Für die Beschreibung typischer Lösungsideen, ist es sinnvoll die Aufgabe in drei Teile zu gliedern. Im Folgenden werden Lösungswege vorgestellt, die von mehr als einem Schüler ausgeführt wurden. Die Analyse des dritten Teiles (Ableiten weiterer Konstruktionsmöglichkeiten) wird nicht dargestellt, weil diesen Teil nur wenige Schüler bearbeiteten.

[121] Da sich die Lösungswege inhaltlich sowie in Umfang und Qualität deutlich unterschieden, waren auf den ersten Blick kaum Lösungstypen erkennbar. Dennoch konnten ausgehend von der offenen Interpretation der Schülerarbeiten nach einer starken Strukturierung und Abstraktion individueller Besonderheiten Gruppen ähnlicher Lösungswege gefunden werden.

1. Teil: Konstruktion magischer Quadrate und Beschreiben des Vorgehens

*Strategie 1: Das erste magische Quadrat wird durch Probieren erhalten, die weiteren durch Verknüpfungen (5 Schüler)*

Fünf Schüler haben das erste magische Quadrat vermutlich durch Probieren erhalten. Da das Vorgehen nicht beschrieben, sondern nur das magische Quadrat angegeben wurde, können auch analytische Überlegungen eingeflossen sein. Weitere magische Quadrate wurden durch folgende Verknüpfungen vorhandener magischer Quadrate erstellt:

- Multiplikation aller Komponenten eines magischen Quadrates mit einem Skalar,
- Addition aller Komponenten eines magischen Quadrates mit einem Skalar,
- (komponentenweise) Addition zweier magischer Quadrate,
- Kombination der genannten Verknüpfungen.

Diese Verknüpfungen wurden verbal oder schematisch beschrieben. Die Schüler wiesen nicht nach, dass durch diese Verknüpfungen tatsächlich (immer) ein magisches Quadrat entsteht, sondern gaben sich mit der Überprüfung ihres Beispiels zufrieden, was durch Bestimmung und Angabe der magischen Summe geschah. Teilweise haben die Schüler analysiert und beschrieben, wie sich bei der Verknüpfung die magische Summe ändert.

Ausgeführte Aktivitäten:

- ein magisches Quadrat aus den Zahlen 1 bis 9 aufstellen (HE, 5)
- einfache Berechnungen ausführen (FO, 5)
- eine Konstruktionsidee finden: Addition einer Zahl zu allen Komponenten (HE, DI, 5)
- eine Konstruktionsidee finden: Addition zweier magischer Quadrate (HE, DI, 1)
- entdecken, dass sich bei der Addition zweier magischer Quadrate auch die magischen Summen addieren (HE, 1)
- eine Konstruktionsidee finden:. Multiplikation mit einem Skalar (HE, DI, 4)
- Veränderungen der magischen Summe bei der Addition mit einem Skalar analysieren und eine Formel aufstellen (HE, DI, 1)
- begründen, dass diese Verknüpfungen gewählt wurden, weil vermutet wird, dass es sich bei der Menge der magischen Quadrate um einen Vektorraum handelt (KA, 1)
- veranschaulichen, dass die Bedingung für magische Quadrate erfüllt ist (DI, 1)
- Konstruktionsidee finden: Kombination zweier Verknüpfungen (HE, DI, 1)

Den Schwerpunkt bildeten bei diesem Lösungsweg die heuristisch-experimentellen Aktivitäten, gefolgt von den darstellend-interpretativen Aktivitäten. Die formal-operativen Aktivitäten haben hier Werkzeugcharakter und wurden auf Grund der Einfachheit dieser elementaren Berechnungen innerhalb des Aufstellens und Prüfens magischer Quadrate zu einer Aktivität zusammengefasst. Die kritisch-argumentativen Aktivitäten spielten entgegen den Intentionen eine geringe Rolle. Keiner der Schüler begründete die allgemeine Gültigkeit der aufgestellten Konstruktionsprinzipien.

*Strategie 2: Darstellen eines eigenen, allgemeinen Konstruktionsprinzips (3 Schüler)*

Drei Schüler haben beschrieben, wie sie bei der Konstruktion des magischen Quadrates aus 1 bis 9 vorgegangen sind. Diese von ihnen aufgestellten Regeln entsprechen einem allgemeinen Konstruktionsprinzip, da sie unabhängig vom speziellen magischen Quadrat formuliert wurden. Das gefundene Lösungsprinzip wurde zur Erstellung der weiteren Beispiele genutzt.

Ausgeführte Aktivitäten:
- Analyse der Anzahl von Kombinationen dreier Zahlen zwischen 1 und 9, so dass deren Summe 15 ist (HE, 1)
- die magische Summe bestimmen (allgemein und konkret) (HE, FO, 1)
- die gefundenen Tripel in einer Tabelle auflisten (DI, 1)
- die Häufigkeit des Auftretens einer Zahl bestimmen (HE, FO, 1)
- auf den Platz bestimmter Zahlen schließen (KA, 1)
- drei magische Quadrate nach dem aufgestellten Prinzip berechnen (FO,3)
- ein magisches Quadrat durch systematisches Probieren/analytisches Denken aufstellen (HE, 2)
- das Vorgehens analysieren und allgemeine Regeln aufstellen (HE, 2)
- die allgemeinen Regeln verbal formulieren (DI, 2)

Heuristische Aktivitäten bildeten auch bei diesem Lösungsweg den Schwerpunkt, hier gefolgt von den formal-operativen Aktivitäten und den darstellend-interpretativen Aktivitäten. Auch bei diesem Lösungsansatz wurde nur eine kritisch-argumentative Aktivität ausgeführt, d. h. auch hier wurde die (allgemeine) Gültigkeit des Ansatzes nicht begründet.

*Strategie 3: Angabe eines allgemeinen Konstruktionsschemas (3 Schüler)*

Weitere drei Schüler gaben ein allgemeines Schema zur Konstruktion magischer Quadrate an, welches sie verbal erläuterten. Vermutlich wurde die Matrix im Internet gefunden. Ein Schüler hat dies auch angegeben, ein weiterer „gestand“ das Schema bei einer „Recherche“

gefunden zu haben, ein dritter wies nicht auf eine verwendete Quelle hin. Ein Schüler beschrieb das gefundene Schema sehr gut mit eigenen Worten, wodurch er wirkliches Verstehen verdeutlichte und nicht nur Gefundenes „blind" anwendete. Dieser Schüler prüfte auch, ob durch dieses Schema tatsächlich ein magisches Quadrat erzeugt wird.

Ausgeführte Aktivitäten:

- ein magisches Quadrat aufstellen, wahrscheinlich durch systematisches Probieren oder analytisches Denken (HE, 3)
- das magische Quadrat analysieren und eine allgemeine Idee zur Bestimmung der magischen Summe entwickeln (HE, 1)
- ein allgemeines Konstruktionsprinzip verbal beschreiben (DI, 3)
- weitere magische Quadrate nach diesem Konstruktionsprinzip berechnen (FO, 3)
- die Konstruktionsmatrix formal darstellen (DI, 3)
- Zusammenhänge analysieren (HE, 1)
- eine (Internet-)Recherche durchführen (HE, 2)
- prüfen, ob die Bedingungen an magische Quadrate durch das allgemeine Konstruktionsprinzip erfüllt werden (KA, 1)
- bestimmen der magischen Summe auf allgemeinem Niveau (FO, 1)

Auch bei diesem Lösungsweg dominierten die heuristischen Aktivitäten, gefolgt von den darstellend-interpretativen Aktivitäten und den formal-operativen Aktivitäten und auch hier wurde nur eine argumentative Tätigkeit ausgeführt.

Obwohl die einzelnen Lösungsstrategien unterschiedliche heuristische Ansätze verfolgen, ist die relative Beteiligung der einzelnen Aktivitätsbereiche ähnlich: Bei allen drei Strategien dominieren die heuristisch-experimentellen Aktivitäten und die kritisch-argumentativen Tätigkeiten wurden vernachlässigt.

<u>2. Teil: Definition der Verknüpfungen und Untersuchung auf Vektorraumeigenschaften</u>

Die Mehrheit der Schüler (12 von 15) konnte eine geeignete Definition für die Addition und die skalare Multiplikation magischer Quadrate angeben. Eine solche selbst aufgestellte Definition enthält eine heuristische (schöpferische) und eine darstellerische Komponente.

Für die Untersuchung der Menge der magischen Quadrate auf ihre Vektorraumeigenschaften hin gab es sechs verschiedene Lösungstypen, die sich in der Qualität der Bearbeitung aber auch in der Folgerung bezüglich des Vorliegens eines Vektorraums (Ergebnis) unterschieden.

- Zwei Schüler begründeten, dass ein Vektorraum vorliegt, indem sie die magischen Quadrate auf ihre magische Summe reduzierten. Die Menge der magischen Summen entspricht so einer Teilmenge der rationalen Zahlen. Dass diese Menge der magischen Summen tatsächlich einen Untervektorraum des Vektorraums der rationalen Zahlen bildet, wurde jedoch nicht nachgewiesen.
- Zwei Schüler erkannten, dass die Addition innerhalb der Menge der magischen Quadrate nicht abgeschlossen ist oder dass diese Menge kein neutrales Element besitzt. Die Vektorraumaxiome wurden jedoch nicht untersucht. Eine Entscheidung bezüglich des Vorliegens eines Vektorraums fehlt bei diesen Lösungen.
- Zwei Schüler zogen die Schlussfolgerung, dass kein Vektorraum vorliegt, da keine Addition gefunden werden kann, welche die Forderungen erfüllt.
- Zwei Schüler stellten die Behauptung auf, dass ein Vektorraum vorliegt, begründeten dies aber nicht vollständig. Sie erkannten nicht, dass nicht alle Vektorraumaxiome erfüllt werden können.
- Zwei Schüler untersuchten die Vektorraumeigenschaften nicht.
- Fünf Schüler gingen bezüglich dieser Teilaufgabe den Weg, dem die höchste Qualität zugeordnet werden kann. Ihnen gelang das Nachvollziehen, teilweise sogar Nachweisen aller Vektorraumaxiome. Auf Grund ihrer Ergebnisse (Addition nicht abgeschlossen und/oder kein neutrales Element konstruierbar und/oder keine inversen Elemente bildbar) zogen sie den Schluss, dass ein eingeschränkter Vektorraum vorliegt. Dieser Lösungsweg wird im Folgenden genauer beschrieben.

Den Beginn der Untersuchung bildete die Vermutung, dass die Menge der magischen Quadrate ein Vektorraum ist. Beim Prüfen der Vektorraumaxiome entdeckten die Schüler jedoch, dass es kein neutrales Element bezüglich der Addition gibt, welches mit der gegebenen Definition magischer Quadrate vereinbar ist. Teilweise wurde auch erkannt, dass bei der definierten Addition Elemente entstehen können, die laut Definition keine magischen Quadrate mehr sind, weil nicht alle Ziffern verschieden voneinander sind. Die Abgeschlossenheit der Addition konnte somit nicht gezeigt werden. Eine Schülerin erkannte sogar, dass zwar Gegenelemente konstruiert werden können, aber auf Grund eines fehlenden neutralen Elementes keine inversen Elemente existieren. Diesen Widerspruch zwischen der selbst definierten Verknüpfung und der gegebenen Definition für die magischen Quadrate lösten die Schüler indem sie von einem „eingeschränkten Vektorraum" schrieben. Einmal wurde auch die Definition erweitert, so dass gleiche Ziffern innerhalb eines magischen Quadrates möglich sind. Die Vektorraumaxiome wurden überwiegend nachvollzogen, teilweise formal ausgeführt. Nur eine Bearbeitung entspricht tatsächlich einem Nachweis.

Aktivitäten dieses Lösungsweges, die mehrfach ausgeführt wurden[122]:

- Zusammenhängen herstellen, einen geeigneten Ansatz zur Untersuchung der Vektorraumeigenschaften finden (HE, 5)
- die skalare Multiplikation mit 1 formal darstellen (DI, 5)
- das Assoziativgesetz der Multiplikation formal nachweisen (FO, DI, 4)
- das erste Distributivgesetz formal nachweisen (FO, DI 5)
- das zweite Distributivgesetz formal nachweisen (FO, DI, 2)
- begründen, dass nur ein eingeschränkter Vektorraum vorliegt (KA, 3)
- veranschaulichen, dass durch Addition zweier magischer Quadrate ein neues entsteht, anhand eines Beispiels (DI, HE, 2)

Von den Aktivitäten, die nur von einem Schüler ausgeführt wurden, war ein großer Teil kritisch-argumentativ. Insgesamt wurden bei diesem Lösungsweg am häufigsten darstellend-interpretative Aktivitäten ausgeführt (25). Aber auch eine beträchtliche Anzahl kritisch-argumentativer Aktivitäten (16) wurde beobachtet. Formal-operative Aktivitäten (11) wurden weniger häufig ausgeführt als erwartet, weil die Schüler die Vektorraumaxiome nicht formal nachwiesen. Die Anzahl heuristisch-experimenteller Aktivitäten (12) entsprach in etwa den Intentionen.

Die anderen Lösungsansätze für diese Teilaufgabe waren nicht mit einer angemessenen Bearbeitung verbunden. Hier wurden deutlich weniger Aktivitäten ausgeführt. Der Anteil kritisch-argumentativer Aktivitäten war auch dabei vergleichsweise hoch, auf Grund von Begründungsversuchen oder Begründungsansätzen. Die unangemessene Ausführung war verbunden mit seltenen formal-operativen und darstellend-interpretativen Aktivitäten.

[122] Da bei diesem Lösungsteil sehr viele verschiedene Aktivitäten nur einmal ausgeführt wurden, soll sich die Darstellung der Aktivitäten auf die mehrfach ausgeführten beschränken.

### Ausgeführte Schüleraktivitäten und objektive Aufgabenparameter

*Wenige Aktivitäten wurden häufig ausgeführt*

Nur zwei der intendierten Aktivitäten wurden von vielen Schülern ausgeführt. Beide betrafen die Erstellung des magischen Quadrates aus den rationalen Zahlen 1 bis 9. Diese erste Teilaufgabe konnte mit einfachen heuristischen Methoden (Probieren, systematisches Probieren) und mit mathematischen Operationen auf Grundschulniveau gelöst werden. Allen Schülern war somit ein Zugang möglich, die Lösung eine Frage der Ausdauer. Die Teilaufgabe ist methodisch offen, eine Lösung konnte auf unterschiedlichen kognitiven Niveaus gefunden werden. Mathematische Konzepte und Fachwissen sind nicht notwendig, ebenso keine Modellierung und mathematische Argumentation. Eine weitere Ursache kann aber auch mit der Motivation, die durch den Knobeleffekt dieser Teilaufgabe hervorgeht, verbunden sein oder damit, dass es die erste Teilaufgabe war.

Bei dieser Aufgabe gab es deutliche Differenzen zwischen den intendierten und ausgeführten Aktivitäten und es gab eine große Anzahl individueller Aktivitäten der Schüler, die nicht in der objektiven Analyse herausgestellt wurden. Als Ursachen werden die offenen Aufgabenteile, die zu unterschiedlichen Wegen einladen, und der hohe heuristische Anspruch, der kein einheitliches Vorgehen nach bekannten Verfahren zulässt, gesehen. Es wurden insgesamt 93 verschiedene individuelle Aktivitäten gezählt, von denen hier nur ein Teil dargestellt werden konnte. Diese Aktivitäten wurden überwiegend von nur einem Schüler ausgeführt.

*Hoher Anteil heuristischer Aktivitäten*

Der Anteil der heuristischen Aktivitäten in den Bearbeitungen der Schüler war höher als in der objektiven Lösung. Die heuristischen Aktivitäten stellten in der Umsetzung der Aufgabe durch die Schüler, wie in den Intentionen, einen Schwerpunkt dar.
Mögliche Ursachen dafür könnten sein:

- Bei der Bearbeitung dieser Aufgabenstellung sind eine Reihe innermathematische Modellierungsprozesse der zweiten Stufe notwendig, d. h. weder mathematische Operationen noch Schlüsselkonzepte werden spezifiziert. Ein Zugang kann nur durch eigene Überlegungen gefunden werden.
- Das notwendige Fachwissen ist komplex, mehrere Wissenseinheiten sind zu aktivieren und zu verbinden. Diese betrafen jedoch die letzten Unterrichtsstunden der Untersuchungsklasse und sollten den Schülern gut zugänglich gewesen sein oder es handelte

sich um Konzepte, welche den Schülern seit der Grundschule vertraut sind. Schließlich gibt es Teilaufgaben, die durch Intuition und Kreativität gelöst werden konnten, ohne etablierte mathematische Konzepte und Verfahren.

- Der interessante innermathematische Kontext könnte die Schüler motiviert haben, eigene Ansätze zu kreieren und anzugehen, teilweise konnten diese dann aber nicht umgesetzt werden, denn nur wenige Schüler bearbeiteten die Aufgabe vollständig.
- In der objektiven Analyse der Aufgabe wurden hohe Anforderungen bezüglich der notwendigen intellektuellen Fähigkeiten herausgestellt, bei einigen Teilaufgaben war jedoch ein Zugang auf unterschiedlichem kognitiven Niveau möglich, so dass viele Schüler die Chance bekamen, die Aufgabe anzugehen.

*Gute Umsetzung darstellend-interpretativer Aktivitäten*

Neben den heuristischen Aktivitäten war der Anteil der darstellenden Aktivitäten der Schüler hoch. Das Potenzial der Aufgabe, verschiedene Darstellungsformen zu nutzen und zwischen diesen zu übersetzen war hoch. Die verbale Aufgabenpräsentation überlies alle Übersetzungen den Schülern und hob die formale Darstellung nicht hervor. Schließlich waren an vielen Stellen unterschiedliche Darstellungsformen einsetzbar, so dass die Schüler nach ihren Neigungen und Fähigkeiten arbeiten konnten.

*Geringe Umsetzung formal-operativer Aktivitäten*

Durchschnittlich wurde pro Schülerlösung nur etwa die Hälfte der intendierten formal-operativen Aktivitäten ausgeführt. Die intendierten algebraischen Operationen, welche die Überprüfung der Vektorraumaxiome betrafen, wurden von den Schülern nicht vorgenommen. Die Schüler sahen entweder keine Notwendigkeit, die Vektorraumaxiome zu prüfen oder keinen Weg, wie dies geschehen könnte. Bezüglich des Anteils formaler Aktivitäten gab es eine gute Übereinstimmung mit den Intentionen, das Trainieren formaler Fertigkeiten war nicht Anliegen dieser Aufgabe. Die einfachen Operationen auf Grundschulniveau und die Termumformungen auf dem Niveau der achten Klasse hatten „Werkzeugcharakter“, d. h. sie waren Mittel zum Zweck der Erstellung magischer Quadrate und deren struktureller Untersuchung. Deshalb wurden innerhalb der Auswertung die formalen Aktivitäten grob zusammengefasst.

*Umsetzung argumentativer Tätigkeiten deutlich unter den Erwartungen*

Von zehn intendierten kritisch-argumentativen Kompetenzen wurden pro Aufgabenlösung durchschnittlich nur etwa zwei ausgeführt. Die Aufforderungen zur Argumentation wurden teilweise explizit formuliert, teilweise implizit. Beispielsweise enthält die Aufforderung „Untersuchen Sie“ implizit die Aufforderung zu folgern und zu begründen. Die Fragestellung „Warum“ wurde von den Schülern ignoriert, nicht als Aufforderung zum Begründen ihres Vorgehens gesehen. Neben diesen Schwierigkeiten bei der Deutung der Aufgabenstellung, die sicherlich durch die beschriebenen Probleme bei der Aufgabenformulierung verstärkt wurden, können die teilweise hohen Anforderungen und der Umfang der Aufgabe Ursache dafür sein, dass die Umsetzung kritisch-argumentativer Aktivitäten nicht den Erwartungen entsprach.

## Anhang 2.6 Analyse der Aufgabe Basis eines Vektorraums

Aufgabenstellung

a) Untersuchen Sie, ob das Erzeugendensystem {(1,2,8),(1,3,5),(2,4,5)} des Vektorraumes $IR^3$ eine Basis *B* ist. Stellen Sie den Vektor $\vec{v} = (1,2,3)$ gegebenenfalls durch die Basis *B* dar.
b) Geben Sie drei linear unabhängige Vektoren aus dem Vektorraum der Polynome höchstens zweiten Grades (mit den üblichen algebraischen Verknüpfungen für die Addition und die skalare Multiplikation) an. Zeigen Sie, dass diese tatsächlich linear unabhängig sind. Wie könnte eine einfache Basis für diesen Vektorraum aussehen?

Anmerkung: Falls Ihr Beispiel schon der einfachsten Basis entspricht, geben Sie bitte eine weitere mögliche Basis an.

Mögliche Lösung

a) Um zu prüfen, ob das Erzeugendensystem $E = \{(1,2,8),(1,3,5),(2.4.5)\}$ des Vektorraumes $IR^3$ eine Basis *B* des $IR^3$ ist, ist zu untersuchen, ob die drei Vektoren linear unabhängig sind. Ist ein Erzeugendensystem linear unabhängig, bildet es eine Basis des erzeugten Vektorraumes.

Sei $\vec{x} = (1,2,8)$, $\vec{y} = (1,3,5)$, $\vec{z} = (2,4,5)$. Dann gilt bei linearer Unabhängigkeit der drei Vektoren: Aus $a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = \vec{0}$ folgt stets $a = b = c = 0$ bzw. das homogene lineare Gleichungssystem $a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = \vec{0}$ hat nur die triviale Lösung $\vec{0}$. Letzteres wird nun geprüft.

| *a* | *b* | *c* | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 0 | I |
| 2 | 3 | 4 | 0 | II |
| 8 | 5 | 5 | 0 | III |
| 1 | 1 | 2 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | II'=II-(2·I) |
| 0 | -3 | -11 | 0 | III'=III-(8·I) |

Aus II' folgt $b = 0$ und somit (mit III' und I) auch $c = 0$ und $a = 0$.

Folglich hat das homogene lineare Gleichungssystem nur die triviale Lösung $\vec{0}$ und das Erzeugendensystem $E = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ ist wegen der linearen Unabhängigkeit der drei Vektoren auch eine Basis des $IR^3$.

Nun soll $\vec{v} = (1,2,3)$ durch $B = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ dargestellt werden. Dafür sind die Koeffizienten *m, n, l* so zu ermitteln, dass gilt $\vec{v} = m\vec{x} + n\vec{y} + l\vec{z}$. Die Koeffizienten *m, n, l* werden anhand eines inhomogenen linearen Gleichungssystems bestimmt.

| *m* | *n* | *l* | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | I |
| 2 | 3 | 4 | 2 | II |
| 8 | 5 | 5 | 3 | III |
| 1 | 1 | 2 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | II'=II-(2·I) |
| 0 | -3 | -11 | -5 | III'=III-(8·I) |

Aus II' folgt $n = 0$. Dies eingesetzt in III', ergibt $l = \frac{5}{11}$. *n* und *l* eingesetzt in I, ergibt $m = \frac{1}{11}$. Die Darstellung des Vektors $\vec{v}$ durch die Basis *B* ist somit $\vec{v} = \frac{1}{11}\vec{x} + \frac{5}{11}\vec{z}$.

Probe: $\frac{1}{11}\begin{pmatrix}1\\2\\8\end{pmatrix} + \frac{5}{11}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

b) Elemente aus dem Vektorraum[123] der Polynome höchstens zweiten Grades besitzen die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sie werden, wie auch die Zeilenvektoren des $IR^3$, bestimmt durch

[123] Dass tatsächlich ein Vektorraum vorliegt, müsste im Unterricht oder in einer weiteren selbständigen Aufgabe gezeigt werden.

drei Koeffizienten $a, b, c \in IR$ und können analog als Vektoren betrachtet werden. Überträgt man den Begriff der Linearen Unabhängigkeit auf den Vektorraum der Polynome höchstens zweiten Grades, sind drei Polynome $p_1, p_2, p_3$ linear unabhängig, wenn gilt: Aus $mp_1(x) + np_2(x) + lp_3(x) = 0$ für alle $x \in IR$ folgt $m = n = l = 0$. Die Koeffizienten $a_1$, $b_1$, $c_1$ von $p_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$ von $p_2$, und $a_3$, $b_3$, $c_3$ von $p_3$ sind so zu wählen, dass dies zutrifft. Geprüft werden kann dies wiederum mit einem homogenen linearen Gleichungssystem, denn $m(a_1x^2 + b_1x + c_1) + n(a_2x^2 + b_2x + c_2) + l(a_3x^2 + b_3x + c_3) = 0$ gilt für alle $x \in IR$ nur, wenn gilt

$ma_1 + na_2 + la_3 = 0$ und

$mb_1 + nb_2 + lb_3 = 0$ und

$mc_1 + nc_2 + lc_3 = 0$.

Begründung: Zwei Polynome sind gleich, wenn sie in allen Koeffizienten übereinstimmen.

Versuch[124]: $a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = 3$

$a_2 = 4, b_2 = 5, c_2 = 6$

$a_3 = 7, b_3 = 8, c_3 = 0$

Probe:

| $m$ | $n$ | $l$ | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 0 | I |
| 4 | 5 | 6 | 0 | II |
| 7 | 8 | 0 | 0 | III |
| 1 | 2 | 3 | 0 | |
| 0 | -3 | -6 | 0 | II'=II-(4·I) |
| 0 | -6 | -21 | 0 | III'=III-(7·I) |
| 1 | 2 | 3 | 0 | |
| 0 | -3 | -6 | 0 | |
| 0 | 0 | -9 | | III''=III'-(2·II') |

$\Rightarrow n = l = m = 0$

[124] Naheliegend ist hier die Angabe der Koeffizienten entsprechend den drei Vektoren aus a), für die gesichert ist, dass die triviale Lösung die einzige des entsprechenden homogenen linearen Gleichungssystems ist.

Somit sind die drei Vektoren $p_1(x)=x^2+2x+3$, $p_2(x)=4x^2+5x+6$, $p_3(x)=7x^2+8x$ linear unabhängig und bilden eine Basis des dreidimensionalen Vektorraumes der Polynome höchstens zweiten Grades.

Gesucht ist weiterhin eine besonders einfache Basis des gegebenen Vektorraumes. Die einfachste Basis des $IR^3$ ist die euklidische Basis $B_E=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Die drei Koeffizienten der Polynome höchstens zweiten Grades können ebenfalls in dieser Zeilenvektorform dargestellt werden. Überträgt man die Koeffizienten, würden die folgenden Polynome der euklidischen Basis entsprechen und die einfachste Basis des Vektorraumes der Polynome höchstens zweiten Grades bilden: $p_1(x)=x^2$, $p_2(x)=x$, $p_3(x)=1$. In der Tat können bei Angabe der Koeffizienten $a,b,c\in IR$ durch die Basis $B_P=\{p_1,p_2,p_3\}$ alle Polynome der Form $ax^2+bx+c$ dargestellt werden: $ap_1(x)+bp_2(x)+cp_3(x)$.

Kompetenzspektrum

Grundwissen: Basis, lineare Unabhängigkeit, Polynome (GW)
Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)
Ausführen formaler Verfahren und Operationen (FO)
Kreatives mathematisches Denken (HE)
Mathematisch Argumentieren (KA)
Fachsprachlich verbal und formal Darstellen (DI)

**Analyse der Aufgabe nach den Kriterien an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen**

Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

*Bedingungen auf Grund der Beurteilungssituation*

Validität

Die Aktivitäten des Kompetenzspektrums dieser Aufgabe gehören zu den wichtigen in den Bildungsstandards (KMK 2004) und den EPA (KMK 2002) festgehaltenen mathematischen Aktivitäten. Es gibt keine Anzeichen dafür, dass sich diese überlagern oder von anderen, nichtmathematischen Aktivitäten überlagert werden. Den ausgewählten Kompetenzen sind entsprechende Schüleraktivitäten zugeordnet, die zu beurteilbaren Ergebnissen führen sollten. Voraussetzung ist auch bei dieser Aufgabe, dass die Schüler das unten benannte Grundwissen besitzen und ihre Lösungswege nachvollziehbar darlegen.

Gerechtigkeit

Verständlichkeit: Die Aufgabe enthält eine ganze Reihe fachsprachlicher Begriffe. Diese wurden in den vorhergehenden Unterrichtsstunden der linearen Algebra eingeführt, sind den Schülern somit bekannt, wenn auch noch nicht vertraut. Mit dem Begriff der Polynome arbeiten die Schüler bereits seit der neunten Klasse.

Erwartungstransparenz: Die Anweisungen an die Schüler werden explizit formuliert. Aufforderungen wie „untersuchen Sie“ und „zeigen Sie“ sind ihnen vertraut und sie kennen die damit verbundenen Erwartungen. Die letzte Frage ist offen formuliert, unterschiedliche Reaktionen sind möglich. Das kreative mathematische Denken ist hier aber gerade Beurteilungsschwerpunkt.

Ergebnisorientierung: Die Aufgabe enthält Teilaufgaben und Lösungsschritte, die separat beurteilt werden können.

Schwierigkeit: Mit der Aufgabe wird der neu erarbeitete Begriff der Basis eines Vektorraumes erstmals selbständig umgesetzt, indem er zunächst für einen bekannten Vektorraum konkretisiert und anschließend auf einen neuen Vektorraum übertragen wird. Diese Steigerung der Schwierigkeiten ist für die profilierte Klasse angemessen.

Möglichkeit individueller Wege (Offenheit)

Für keine der Teilaufgaben wird ein Vorgehen benannt, die Aufgabe ist methodisch offen. Alle Teilaufgaben erlauben einen individuellen Zugang und eine Bearbeitung nach individuellen Möglichkeiten. Bei den Untersuchungen auf lineare Unabhängigkeit bietet sich ein lineares Gleichungssystem als effektive Lösungsstrategie an. Wenn der Gaußalgorithmus zu diesem Zeitpunkt noch nicht als Routineverfahren zur Verfügung steht, kann dieses immer noch mit den verschiedenen aus Klasse 9 bekannten Lösungsverfahren bearbeitet werden. Die Suche nach einer Basis für den Vektorraum der Polynome bietet noch mehr Spielraum, sowohl in der Herangehensweise als auch im Ergebnis und dessen Darstellung.

*Bedingungen durch Anspruch an Aufgabenqualität*

Individuelle und gesellschaftliche Bedeutung der Aufgabe: Die Aufgabe ist rein innermathematisch, hat keine direkte gesellschaftliche Bedeutung. Sie ist für die Schüler individuell insofern bedeutsam, dass der Begriff der Basis zu den grundlegenden Begriffen der linearen Algebra gehört und deshalb für die Schüler der profilierten Klasse, welche sich wahrscheinlich über die Schule hinaus mit Mathematik beschäftigen werden, wichtig ist.

Kognitive Forderung: Die Aufgabe dient der Vertiefung und Festigung erworbener mathematischer Konzepte, indem diese erstmals selbständig auf andere Situationen übertragen werden. Herausforderung ist das kreative mathematische Denken, indem zu einem Begriff selbst Beispiele gefunden werden. Die Aufgabe ist umfangreich, eine selbständige Planung und Kontrolle des Vorgehens ist notwendig. Schließlich werden neue Inhalte mit bekannten verknüpft, das Begriffsnetz wird erweitert. Bei einer umfassenden Bearbeitung können kognitive Fähigkeiten bis zur höchsten Stufe, dem Evaluieren, eingebracht werden.

*Kriterien verbunden mit dem Ziel des Ansprechens vielseitiger mathematischer Kompetenzen*

Darstellend-interpretative Aktivitäten: verbal beschreiben, formal darstellen, zwischen Darstellungen übersetzen

Heuristisch-experimentelle Aktivitäten: Zusammenhänge analysieren, geeignete Lösungsstrategien finden, Beispiele mit gegebenen Eigenschaften finden

Formal-operative Aktivitäten: algebraische Operationen ausführen, formale Verfahren ausführen

Kritisch-argumentative Aktivitäten: mathematisch argumentieren, nachweisen

**Fazit der Analyse der entscheidenden Kriterien: Die Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen werden erfüllt.**

<u>Komplexitätsbeschreibende Merkmale von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen</u>

Komplexität der einbezogenen mathematischen Inhalte

Wissenseinheit/Stoffgebiet und curriculare Wissensstufe: Mit dieser Aufgabe aus dem Gebiet der linearen Algebra werden Wissenseinheiten aus der linearen Algebra mit Wissenseinheiten aus dem Gebiet der Analysis verbunden: Erzeugendensystem/Basis/lineare Unabhängigkeit, Vektorraum/Vektoren, Polynome (höchstens zweiten Grades). Bis auf den Begriff der Polynome wurden diese Elemente in den bisherigen Stunden der linearen Algebra thematisiert. Polynome lernen die Schüler bereits Ende der Sekundarstufe I kennen.

Art des Wissens: Faktenwissen (Definitionen für Erzeugendensystem, Vektorraum, Basis, linear unabhängig, formale Darstellung von Polynomen (zweiten Grades)), prozedurales

Wissen (z. B. Lösen linearer Gleichungssysteme, komponentenweise Addition), konzeptuelles Wissen (z. B. Beziehungen zwischen Basis und Vektorraum, algebraische Strukturen)

Zur Bearbeitung der Aufgabe ist Faktenwissen zu mehreren mathematischen Begriffen notwendig in einer so umfassenden Form, die Definition, Eigenschaften und Anwendbarkeit einschließt, dass der Übergang zu konzeptuellem Wissen fließend erscheint. Da auch (umfangreiches) prozedurales und konzeptuelles Wissen notwendig ist, liegt eine hohe Komplexität des notwendigen Fachwissens vor: Anforderungsniveau 3.

Komplexität bezüglich spezifischer Aktivitätsbereiche

Anforderungen im heuristischen Bereich: In keiner der Teilaufgaben ist das Lösungsverfahren direkt gegeben, sie sind methodisch offen. Da es für einige Aufgabenteile jedoch naheliegende Verfahren gibt, sind die Erwartungen bezüglich der Lösungsvielfalt zwischen den Teilaufgaben unterschiedlich hoch. Zunächst ist ein Untersuchungsverfahren für die Analyse des in a) gegebenen Erzeugendensystems zu finden. Der Vergleich der Definitionen der Begriffe „Erzeugendensystem“ und „Basis“ bietet sich an. Zu prüfen bleibt die lineare Unabhängigkeit der drei Vektoren, was, wie auch im Unterricht, anhand eines homogenen linearen Gleichungssystems erfolgen kann. Für die Darstellung des gegebenen Vektors durch die Basis $B$ ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystems hilfreich, was ebenfalls schon im Unterricht durchgeführt wurde. Die heuristischen Anforderungen liegen überwiegend im Teil b) in der Betrachtung des Vektorraums der Polynome. Die Schüler müssen hier zielgerichtet schöpferisch tätig sein, indem sie zunächst drei linear unabhängige Vektoren und dann eine, sogar einfache, Basis finden. Hier sind eigene Ideen notwendig, unterschiedliche Herangehensweisen werden erwartet. Beispielsweise könnten Parallelen zur euklidischen Basis gezogen werden, aber auch zu der in a) gefundenen Basis oder aber es wird weiter in der Darstellung der Polynome gearbeitet. In diesem Aufgabenteil ist somit das Ziel (die Basis) und die Methode (den Weg, die Basis zu finden) tatsächlich offen. Der Nachweis der linearen Unabhängigkeit kann analog zu a) anhand eines homogenen linearen Gleichungssystems erfolgen, wenn eine geeignete Darstellung für die Polynome als Vektoren gefunden wird. Der Transfer bekannter Verfahren auf neuartige Situationen ist dem Anforderungsbereich 2, das eigenständige kreative Denken dem Anforderungsbereich 3 zuzuordnen.

Anforderungen im formal-operativen Bereich: Bei dieser Aufgabe werden Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme (inhomogener und homogener) zur Anwendung kommen. Die Schüler kennen zum Zeitpunkt der Aufgabenstellung noch nicht den Gaußalgorithmus in seiner kompletten Form, haben aber Vorkenntnisse zur Lösung dreidimensionaler linearer Gleichungssysteme aus Klasse 9. Die mathematischen Operationen, die innerhalb der Lösung linearer Gleichungssysteme auftreten, stellen Routineanforderungen der Sekundarstufe I dar, Die selbständige Anwendung und Kombination[125] bekannter Verfahren/Operationen in neuartigen Zusammenhängen hoher Komplexität entspricht Anforderungsniveau 3.

Anforderungen im darstellend-interpretativen Bereich: Die folgenden Übersetzungen und Darstellungen werden bereits durch die Aufgabenstellung notwendig: Darstellung des Nullvektors durch die in a) gegebenen drei Vektoren, Darstellung des Vektors $\vec{v}$ durch die gegebene Basis, Darstellung der drei unabhängigen Vektoren aus dem Vektorraum der Polynome höchstens zweiten Grades, Übersetzungen von funktionalen Polynomdarstellungen in Vektordarstellungen, Darstellung der Basis für den Vektorraum der Polynome höchstens zweiten Grades. Weitere individuelle Darstellungen sind denkbar und wahrscheinlich. Das Potenzial der Aufgabe zur Förderung darstellender Aktivitäten ist somit hoch, wobei auch die kognitiven Anforderungen, vor allem auf Grund der Neuartigkeit der Darstellungen hoch sind: Anforderungsbereich 3.

Anforderungen im kritisch-argumentativen Bereich: Nur an einer Stelle der Aufgabenformulierung wird explizit eine Argumentation gefordert: Die Schüler haben die lineare Unabhängigkeit der gefundenen Basis zu zeigen. Zur Lösung der Aufgabe sind einfache Schlussfolgerungen aus den formalen Verfahren zu ziehen, die Interpretationen des formalen Ergebnisses gleichkommen. Auch in b) sind (verbale) Begründungen sinnvoll. Die Auswahl, evtl. auch die Darstellung der Vektoren sollte begründet werden. Wird die euklidische Basis als einfache Basis angegeben, so ist zu begründen, warum dies möglich ist, denn eine Basis kann nicht ohne weiteres auf einen anderen Vektorraum übertragen werden. Werden überwiegend einfache Schlussfolgerungen gezogen, entspricht dies Anforderungsbereich 1. Die eigenständige, neuartige Argumentation bei einer vollständigen Bearbeitung von b) kann aber sogar dem Anforderungsbereich 3 entsprechen.

[125] Dabei wird davon ausgegangen, dass der Gaußalgorithmus noch nicht als Standardverfahren zur Verfügung steht.

**Analyse der umgesetzten Schüleraktivitäten**

Intendierte Aktivitäten (Aktivitätsbereich, Häufigkeit der Umsetzung von den 14 Schülern, welche die Aufgabe bearbeiteten):

- Verbindungen zwischen mathematischen Konzepten (Erzeugendensystem und Basis) herstellen (HE, 8)
- diese Zusammenhänge verbal beschreiben (DI,1)
- Zusammenhang zur linearen Unabhängigkeit herstellen/eine Nachweisstrategie finden (HE, 10)
- die Bedingung für lineare Unabhängigkeit formal darstellen (DI, 5)
- den Nullvektor durch das gegebene Erzeugendensystem formal darstellen (DI, 9)
- ein homogenes lineares Gleichungssystem aufstellen (DI, 10)
- formale Verfahren ausführen (z. B. Gaußalgorithmus) (FO, 10)
- algebraische Umformungen ausführen (FO, 10)
- argumentieren und schlussfolgern, dass tatsächlich eine Basis vorliegt (KA, 9)
- $\vec{v}$ durch $B$ allgemein darstellen (DI, 4)
- den Zusammenhang zum inhomogenen linearen Gleichungssystem herstellen/eine Strategie zur Bestimmung der Koeffizienten der allgemeinen Darstellung finden (HE, 10)
- ein lineares Gleichungssystem aufstellen (DI, 10)
- formale Verfahren ausführen (FO, 10)
- algebraische Operationen ausführen (FO, 10)
- die Lösung interpretieren/ $\vec{v}$ durch $B$ konkret darstellen (DI, 7)
- die Elemente des Vektorraums der Polynome höchstens zweiten Grades allgemein formal darstellen (DI, 2)
- erläutern, wann zwei Polynome linear unabhängig sind (DI, HE)
- begründen, dass dies wieder anhand eines homogenen linearen Gleichungssystems geprüft werden kann (KA)
- die Bedingung für lineare Unabhängigkeit formal darstellen (DI)
- eine Vermutung für drei linear unabhängige Vektoren aufstellen (HE, 6)
- das homogene lineare Gleichungssystem aufstellen (DI, 9)
- formale Verfahren ausführen (FO, 6)
- formale Operationen ausführen (FO, 6)
- die formale Lösung interpretieren, auf lineare Unabhängigkeit schließen (DI, KA, 8)

- den Zusammenhang zur euklidischen Basis herstellen (HE, 6)
- erklären, dass die Koeffizienten in Zeilenvektorform darstellbar sind (HE, DI)

Von den zahlreichen intendierten Aktivitäten sind sieben heuristisch-experimentell, zwölf darstellend-interpretativ, sechs formal-operativ und drei kritisch-argumentativ. Der Schwerpunkt dieser Aufgabe liegt auf den darstellend-interpretativen und heuristisch-experimentellen Aktivitäten.

Die häufig ausgeführten Aktivitäten gehören überwiegend zum formal-operativen sowie zum darstellend-interpretativen und heuristisch-experimentellen Tätigkeitsbereich. Keine kritisch-argumentative Aktivität wurde häufig ausgeführt. Bei Teilaufgabe b) wurde keine der intendierten Aktivitäten häufig ausgeführt, eine deutliche Anzahl intendierter Aktivitäten wurde dort nicht umgesetzt. Generell wurden bei Aufgabe 11B9.1, wie schon bei Aufgabe 11B8.1, von den Schülern im Mittel pro Lösung deutlich weniger (15) Aktivitäten ausgeführt als intendiert waren (36).

Insgesamt wurden von den Schülern 64 heuristisch-experimentelle, 93 darstellend-interpretative, 55 formal-operative und 25 kritisch-argumentative Aktivitäten ausgeführt. Die darstellend-interpretativen Aktivitäten stellten auch in der Umsetzung den Schwerpunkt dar. Die kritisch-argumentativen Aktivitäten machten, wie nach der objektiven Analyse befürchtet, einen geringen Anteil der Aktivitäten bei der Aufgabenbearbeitung aus.

**Vergleich verschiedener Lösungswege**

Zur Bearbeitungen der Teilaufgabe a) wählten die Schüler drei unterschiedliche Ansätze:
- Nachweisen der linearen Unabhängigkeit der drei Vektoren auf Grund der ausschließlich trivialen Darstellung des Nullvektors, wobei drei Qualitätsstufen der Darstellung auftraten, die unten beschrieben werden (11 Schüler),
- Nachweisen, dass sich keine der drei Komponenten der eventuellen Basis durch die beiden anderen darstellen lässt und deshalb die drei Vektoren linear unabhängig sind (1 Schüler),
- Verbal begründen, dass das Erzeugendensystem eine Basis des $IR^3$ sein muss, weil es sonst nur den $IR^2$ aufspannen würde (2 Schüler).

Die überwiegende Mehrheit der Schüler wählte somit den formalen Nachweis der linearen Unabhängigkeit der drei gegebenen Vektoren, vergleichbar der Beispiellösung. Nur zwei Schüler führten eine begriffliche Argumentation. Von diesen zwei Schülern argumentierte einer anschaulich, der zweite zog einen Satz heran, der zwar geeignet ist, im Unterricht jedoch nicht behandelt und bewiesen wurde. Bei diesem Lösungsweg wurden heuristische und argumentative Aktivitäten ausgeführt.

Die drei qualitativen Stufen der formalen Bearbeitung des ersten Aufgabenteils unterscheiden sich vor allem in der Argumentation und Darlegung der Zusammenhänge:

- Bei einer vollständigen Darstellung der Lösung wird der Unterschied zwischen den Begriffen Erzeugendensystem und Basis eines Vektorraums – im Wesentlichen anhand der Definition einer Basis - herausgestellt und daraus geschlossen, dass die lineare Unabhängigkeit der drei Vektoren zu zeigen bleibt. (7 Schüler)
- Anschließend, von 5 Schülern jedoch sofort und ohne jegliche verbale Erläuterung (zweite Qualitätsstufe), wurde auf die formale Definition der linearen Unabhängigkeit zurückgegriffen und der Nullvektor formal durch die drei Vektoren dargestellt.
- Schließlich – einmal sogar sofort (dritte Qualitätsstufe) wurde das lineare homogene Gleichungssystem aufgestellt und gelöst (11 Schüler). Aus dem Ergebnis wurde gefolgert, dass der Nullvektor nur durch die triviale Linearkombination darstellbar ist, die drei Vektoren daher linear unabhängig sind und das gegebene Erzeugendensystem eine Basis ist. Meist erfolgte dies formal ohne Begründung und Darstellung der Zusammenhänge.

Bei diesem Lösungsweg wurden Aktivitäten aller vier Aktivitätsbereiche einbezogen. Die Qualität der Lösung stand in Zusammenhang mit der Anzahl heuristischer und argumentativer Aktivitäten.

Um den gegebenen Vektor durch die Basis $B$ darstellen zu können, wurde von allen Schülern ein inhomogenes lineares Gleichungssystem aufgestellt und gelöst.

Bei Teilaufgabe b) gab es, insbesondere bezüglich des Findens einer einfachen Basis des neuen Vektorraumes, im Wesentlichen zwei unterschiedliche Lösungen:

- Zehn Schüler gaben die euklidische Basis als einfachste Basis oder eine andere Basis des $IR^3$ (drei Zeilenvektoren) an, ohne zu begründen, warum es möglich und sinnvoll ist eine Basis des $IR^3$ auch für diesen Vektorraum zu verwenden.
- Fünf Schüler gaben eine Basis an, deren Komponenten Polynome sind. Drei Schüler erläuterten verbal, dass sich die beiden Vektorräume $IR^3$ und $IP_2$ aufeinander abbilden lassen oder verdeutlichten dies symbolisch. Effektiver Weise verwendete ein Schüler die in a) als linear unabhängig herausgestellten Vektoren.

Die Mehrheit der Schüler (10) führte den formalen Nachweis der linearen Unabhängigkeit der angegebenen Vektoren analog zu dem in Aufgabenteil a) verwendetem Verfahren durch.

Bei der Analyse der individuellen Lösungswege wurden neben den intendierten Aktivitäten 17 individuelle Aktivitäten der Schüler aufgedeckt, die nicht in der Beispiellösung auftauchen. Diese wurden überwiegend jeweils von nur einem Schüler ausgeführt und entstammen allen Aktivitätsbereichen.

**Ausgeführte Schüleraktivitäten und objektive Aufgabenparameter**

Die Umsetzung aller Aktivitätsbereiche entsprach bei dieser Aufgabe nicht den Erwartungen, wenngleich der Anteil der Aktivitätsbereiche in der Umsetzung den Intentionen gleichkam. Insbesondere die darstellend-interpretativen und kritisch-argumentativen Aktivitäten wurden nicht wie erwartet ausgeführt. Zu argumentativen Aktivitäten wurde in der Aufgabenstellung nicht explizit aufgefordert. Die Schüler nutzten Anlässe, ihre eigenen Ideen einzubringen, haben jedoch noch wenig Gespür dafür, wann Erläuterungen und Begründungen ihrer Lösungsschritte angebracht sind. Sehr deutlich sind die unterschiedlichen Umsetzungen der beiden Aufgabenteile.

*Homogenes Herangehen beim Nachweis der linearen Unabhängigkeit*

Es hat sich die Erwartung erfüllt, dass bei den Nachweisen der linearen Unabhängigkeit kaum unterschiedliche Herangehensweisen auftreten. Nur zwei Schüler haben begrifflich argumentiert. Die überwiegende Mehrheit wählte den formalen Nachweis. Somit ist Aufgabenteil a) in der Umsetzung nicht als offen anzusehen. Die Schüler wählten das im Unterricht behandelte formale Nachweisverfahren, auch wenn die begriffliche Argumentation weitaus kürzer ausfallen kann. Aufgabenteil a) ist heuristisch nicht anspruchsvoll, es liegt eine den Schülern bekannte Aufgabenstellung vor.

*Große Anzahl intendierter Aktivitäten für Aufgabenteil b) wurde nicht umgesetzt*

Diese von den Schülern nicht ausgeführten Aktivitäten waren überwiegend darstellerischer Art und zu einem geringeren Teil heuristisch-experimentell und kritisch-argumentativ. Die Aktivitäten der Schüler waren auch hier überwiegend Standardaktivitäten, die in Analogie zu Aufgabenteil a) ausgeführt wurden (Nachweis der linearen Unabhängigkeit), sowie heuristische Aktivitäten, wie das Auswählen der Basisvektoren. Dagegen wurde nicht begründet oder erläutert, warum die angegebene einfache Basis sinnvoll ist. So wurde die euklidische Basis als einfache Basis für den Vektorraum der Polynome höchstens zweiten Grades angegeben, ohne zu begründen, warum diese auf den neuen Vektorraum übertragen werden kann. Die intendierten Aktivitäten, welche die Darstellung und Begründung der Zusammenhänge zwischen den beiden Vektorräumen betrafen, wurden nicht ausgeführt. Für die teilweise recht oberflächlichen Bearbeitungen dieser Teilaufgabe können motivationale Aspekte eine Rolle spielen (Schuljahresende). Auf jeden Fall lag aber eine den Schülern ungewohnte Aufgabenstellung vor, welche das Übertragen von Kenntnissen auf eine neuartige Situation erforderte. Im Gegensatz zu Aufgabenteil a) waren die Anforderungen bezüglich heuristischer, argumentativer und darstellender Kompetenzen hoch.

Zusammenfassend stellten sich in der Analyse der Schülerarbeiten deutliche Unterschiede zwischen den beiden Aufgabenteilen heraus, die gut mit unterschiedlichen Anforderungen einhergehen. So finden sich in b) nicht nur die heuristischen Anforderungen, hier war, durch Einbeziehung von Wissenseinheiten aus dem Gebiet der Analysis auch die Komplexität des Fachwissens höher und es wurden intellektuelle Fähigkeiten höherer Kategorien gefordert: In a) war Anwenden ausreichend, in b) auch Analyse und Synthese erforderlich.

## Anhang 2.7 Analyse der Aufgabe Verpflegung einer Expedition

Aufgabenstellung

Die Verpflegung einer Expedition ist zusammenzustellen aus Konserven der Art I, II, III und IV. Den jeweiligen Vitamingehalt (in geeigneten Einheiten) gibt folgende Tabelle an.

| Vitamin | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 2 | 3 | 1 |
| B | 3 | 3 | 0 | 4 |
| C | 4 | 5 | 4 | 2 |

Ein Expeditionsteilnehmer wird während des gesamten Unternehmens (wie man auf Grund medizinischer Hochrechnungen weiß) 128, 192 bzw. 320 Einheiten an Vitamin A, B bzw. C benötigen.

In welchem Rahmen lassen sich Sonderwünsche einzelner Teilnehmer bei der Aufstellung der Vorratsliste berücksichtigen?

Natürlich ist dabei zu beachten, dass der Vitaminbedarf der Expedition gedeckt wird, andererseits soll auch keine Überdosierung erfolgen.

<u>Mögliche Lösung:</u>

Sei $x$ die Anzahl der Konserven vom Typ I, $y$ die Anzahl der Konserven vom Typ II, $z$ die Anzahl der Konserven vom Typ III und $w$ die Anzahl der Konserven vom Typ IV. Dann müssen die folgenden Gleichungen erfüllt sein, damit der Bedarf an Vitamin A, B, C gedeckt wird: $x + 2y + 3z + w = 128$, $3x + 3y + 4w = 192$, $4x + 5y + 4z + 2w = 320$. Um die notwendigen Anzahlen $x, y, z, w$ an Konserven unter den in der Aufgabenstellung gegebenen Bedingungen zu ermitteln, wird dieses lineare Gleichungssystem gelöst.

| $x$ | $y$ | $z$ | $w$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 128 | I |
| 3 | 3 | 0 | 4 | 192 | II |
| 4 | 5 | 4 | 2 | 320 | III |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 128 | |
| 0 | -3 | -9 | 1 | -192 | II'=II-(3·I) |
| 0 | -3 | -8 | -2 | -192 | III'=III-(4·I) |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 128 | |
| 0 | -3 | -9 | 1 | -192 | |
| 0 | 0 | 1 | -3 | 0 | III''=III'-II' |

$\Rightarrow z = 3w$

Es kann keine eindeutige Lösung gefunden werden. Die Lösungsmenge kann nur in Abhängigkeit von einem freien Parameter $t$ dargestellt werden.

Sei $w = t$ beliebig, dann ergibt sich $z = 3\text{t}$, $y = 64 - \frac{26}{3}t$ und $x = \frac{22}{3}t$.

Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems lautet somit

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 64 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{3} \begin{pmatrix} 22 \\ -26 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| t \in IR \right\}$$

Da im Kontext dieser Aufgabe die Variablen $x, y, z, w$ Anzahlen darstellen, müssen sie ganzzahlig und positiv sein. Deshalb muss $t$ eine natürliche Zahl und durch 3 teilbar sein (Bedingung 1) und es muss gelten: $64 - \frac{26}{3}t \geq 0$, woraus folgt $t \leq 7{,}38$ (Bedingung 2). (Für die anderen Komponenten ist die Bedingung positiver Werte mit $t \in IN$ erfüllt.).

Werden die beiden Bedingungen an eine im Ausgangskontext sinnvolle Lösung zusammengefasst, muss die mögliche Lösungsmenge wie folgt eingeschränkt werden:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 64 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{3} \begin{pmatrix} 22 \\ -26 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| t \in IN, t \in \{0, 3, 6\} \right\}.$$

Sonderwünsche sind somit nur im Rahmen $t = 0 \vee t = 3 \vee t = 6$ möglich.

*t* kann Null sein, dann kann mit 64 Dosen der Sorte II der Vitaminbedarf gedeckt werden. Dies wäre aber eine sehr eintönige Ernährung und wird wohl kaum den Vorstellungen der Teilnehmer entsprechen. Wahrscheinlich wird *t*=3 oder *t*=6 gewählt werden.

Die Anzahlen der Dosen wären bei den beiden Menüs wie folgt:

| | | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|---|
| „Menü" 1 | *t*=3 | 22 | 38 | 9 | 3 |
| „Menü" 2 | *t*=6 | 44 | 12 | 18 | 6 |

Es kommt also vor allem darauf an, ob den Teilnehmern die Sorte I oder II gut schmeckt, denn diese haben die größten Anzahlen.

Kompetenzspektrum

Übersetzen (Mathematisieren) (DI)

Finden geeigneter Lösungsstrategien (HE)

Ausführen formaler Verfahren (FO)

Ausführen formaler Operationen und Umformungen (FO)

Interpretieren (DI)

Mathematisch Argumentieren (KA)

Formal und fachsprachlich verbal Darstellen (DI)

**Analyse der Aufgabe nach den Kriterien an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen**

Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen

*Bedingungen auf Grund der Beurteilungssituation*

Validität

Die Kompetenzen des Kompetenzspektrums dieser Aufgabe gehören zu den in den Bildungsstandards (KMK 2004) und den EPA (KMK 2002) aufgeführten wichtigen mathematischen Kompetenzen. Zu jeder Kompetenz gehören eine Reihe mit der Aufgabe verbundener Aktivitäten, so dass sich Indikatoren für die Beurteilung finden. Es gibt keine Anzeichen dafür, dass sich diese überlagern oder von anderen, nichtmathematischen Aktivitäten überlagert werden. Trotz anwendungsbezogener Aufgabe sind keine kontextbezogenen Kenntnisse notwendig. Für die kontextbezogenen Interpretationen sind Alltagsvorstellungen ausreichend. Die Kompetenzen sind jedoch nicht beurteilbar, wenn die Schülern eine ergebniszentrierte Darstellung wählen und den Lösungsweg nicht dokumentieren.

Gerechtigkeit

Verständlichkeit: Die Aufgabe enthält keine fachsprachlichen Begriffe. Sie ist in der Sprache des außermathematischen Kontextes formuliert, also hier in der Alltagssprache der Schüler. Die Erläuterungen und die Fragestellung sind verständlich formuliert. Zum Zwecke der Übersichtlichkeit wurde eine Tabellenform für die Angabe des Vitamingehaltes der jeweiligen Konservenart gewählt, die von den Schülern gut verstanden werden sollte.

Erwartungstransparenz: Die Aufgabenstellung enthält keine Anweisungen, sondern eine kontextbezogene Fragestellung. Diese lässt einen großen Spielraum innerhalb der Darstellung des Lösungsweges und der Lösung zu. Transparenz der Anforderungen wird hier nicht durch die Aufgabenstellung gegeben, den Schülern müssen die Regeln der Darstellung des Lösungswegs aus dem Unterricht bekannt sein. Dies gilt insbesondere für die mathematische Argumentation, die nicht explizit gefordert ist, für eine vollständige und angemessene Bearbeitung aber erwartet wird.

Ergebnisorientierung: Die Aufgabe ist nicht in Teilaufgaben gegliedert. Die Bearbeitungen der Schüler können jedoch in Lösungsschritte aufgefächert werden, die separat beurteilt werden können.

Schwierigkeit: Die Aufgabe dient der außermathematischen Anwendung linearer Gleichungssysteme und des Gaußalgorithmus. Das Verfahren haben die Schüler im Unterricht erarbeitet, aber noch nicht außermathematisch angewendet. Schwierigkeit der Aufgabe ist jedoch mehr als die Anwendung des komplexen Verfahrens die Interpretation der Lösung im Kontext, denn die formale Lösung macht nur unter gewissen Eingrenzungen Sinn.

Möglichkeit individueller Wege (Offenheit)

Auf Grund der kontextbezogenen Fragestellung ist die Aufgabe offen, sowohl bezüglich der Methode als auch bezüglich des Ziels. Individuelle Ansätze sind möglich. Die Lösung mittels linearen Gleichungssystems und Gaußalgorithmus ist jedoch naheliegend und effektiv. Individuelle Wege sind bei der Interpretation der formalen Lösung möglich und sinnvoll, hier kann nach Neigung und Fähigkeit z. B. analysiert oder probiert werden.

*Bedingungen durch Anspruch an Aufgabenqualität*

Individuelle und gesellschaftliche Bedeutung der Aufgabe: Die Aufgabe ist eine außermathematische Anwendung des wirkungsvollen Mathematisierungsmusters Lineares Gleichungssystem bzw. Gaußalgorithmus. Die Beschreibung voneinander abhängiger Größen durch Gleichungen und Gleichungssysteme hat ohne Zweifel gesellschaftliche Bedeutung. Für die Schüler sollte es interessant sein zu sehen, dass sie auch in Alltagssituationen Anwendung findet. Die Situation Expedition dient der Motivierung, Situationen mit mathematisch ähnlicher Struktur finden die Schüler auch in ihrem Alltag.

Kognitive Forderung: Die Aufgabe dient der Vertiefung und Festigung erworbener mathematischer Konzepte, indem diese erstmals selbst auf andere Situationen übertragen werden. Herausforderung ist wie bereits beschrieben die Interpretation der formalen Lösung im außermathematischen Kontext, was die Schüler bisher selten ausgeführt haben. Die Verknüpfungen zwischen Kontext und mathematischer Struktur stellen heuristische und argumentative Anforderungen und solche bezüglich der Darstellung. Sie erhöhen die Flexibilität im Umgang mit den mathematischen Konzepten.

*Kriterien verbunden mit dem Ziel des Ansprechens vielseitiger mathematischer Kompetenzen*

Darstellend-interpretative Aktivitäten: verbal beschreiben, formal darstellen, zwischen Darstellungen übersetzen, die formale Lösung interpretieren

Heuristisch-experimentelle Aktivitäten: Zusammenhänge zwischen Kontext und mathematischem Modell finden und analysieren, geeignete Lösungsstrategien finden

Formal-operative Aktivitäten: algebraische Operationen ausführen, formale Verfahren ausführen

Kritisch-argumentative Aktivitäten: begründen, erläutern, schlussfolgern

**Fazit der Analyse der entscheidenden Kriterien: Die Bedingungen an Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen werden erfüllt, bis auf die Erwartungstransparenz, die nur gegeben ist, wenn die Schüler mit Anforderungen an die Darstellung der Lösungsfindung vertraut sind.**

<u>Komplexitätsbeschreibende Merkmale von Aufgaben zur differenzierten Beurteilung mathematischer Kompetenzen</u>

Komplexität der einbezogenen mathematischen Inhalte

Wissenseinheit/Stoffgebiet und curriculare Wissensstufe: Zur Lösung dieser Aufgabe ist nur eine mathematische Wissenseinheit notwendig: das Lösen linearer Gleichungssysteme, z. B. mit dem Gaußalgorithmus. Diese Wissenseinheit gehört zu den Standardinhalten der Sekundarstufe II. Der Anspruch der Aufgabe liegt nicht in der Verknüpfung unterschiedlicher Wissenseinheiten, sondern in der außermathematischen Modellierung.

Art des Wissens: prozedurales Wissen (Gaußalgorithmus bzw. anderes Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit drei Gleichungen und vier Unbekannten, Äquivalenzumformungen), konzeptuelles Wissen (Darstellung von Zusammenhängen durch lineare Gleichungen, Verwendung freier Parameter zur Beschreibung von Freiheitsgraden innerhalb von Systemen).

Zur Bearbeitung der Aufgabe sind umfassende Kenntnisse zum Lösen linearer Gleichungssysteme und Verständnis des Konzeptes der Linearen Gleichungssysteme notwendig, einschließlich z. B. der sinnvollen Interpretation eines freien Parameters bzw. der nichteindeutigen Lösung. Somit sind anspruchsvolle Kenntnisse der gymnasialen Oberstufe gefordert, die sich auf eine Stoffeinheit begrenzen: Anforderungsbereich 2.

Komplexität bezüglich spezifischer Aktivitätsbereiche

Anforderungen im heuristischen Bereich: Der Anspruch der Aufgabe liegt in der Modellierung einer außermathematischen Situation. Das mathematische Modell wird innerhalb der Aufgabenstellung nicht spezifiziert (zweite Stufe der kontextuellen Komplexität). Möglicherweise erinnert die gewählte schematische Darstellung mittels einer Tabelle jedoch an die Matrizendarstellung linearer Gleichungssysteme. Neben dem Finden eines geeigneten Mathematisierungsmusters liegen weitere heuristische Anforderungen in der Analyse der Bedingungen, die durch den Kontext an die Lösung gestellt werden. Hier sind Zusammenhänge zwischen mathematischen Objekten und ihrer Bedeutung im Kontext herzustellen und zu deuten. Die Übertragung bekannter Strategien und Konzepte in neue Zusammenhänge entspricht Anforderungsbereich 2.

Anforderungen im formal-operativen Bereich: Vermutlich wird von den Schülern zur Lösung des aufgestellten linearen Gleichungssystems der neu erlernte Gaußalgorithmus eingesetzt. Dabei sind innerhalb der Äquivalenzumformungen eine Reihe algebraischer Umformungen zu tätigen, Diese entsprechen Routineoperationen, welche die Schüler seit der achten Klasse beherrschen. Die Anwendung eines bekannten, noch nicht vertrauten, komplexen Verfahrens wird Anforderungsbereich 2 zugeordnet.

Anforderungen im darstellend-interpretativen Bereich: Bei der Lösung der Aufgabe auf mathematischer Ebene wird die formale Darstellungsweise überwiegen: Gleichungen, verschiedene formale Darstellungen von Gleichungssystemen, Darstellungen der formalen Lösung. Bei der Übersetzung aus dem Kontext in die mathematische Darstellung und bei der Rückübersetzung werden verbale Interpretationen und Argumentationen notwendig. Insgesamt wird eine Vielzahl von Darstellungen und Übersetzungen erwartet, die selbständig auszuwählen, z. T. auch selbst zu entwickeln bzw. der neuartigen Anwendung anzupassen sind: Anforderungsbereich 2.

Anforderungen im kritisch-argumentativen Bereich: Eine mathematische Argumentation wird innerhalb der Aufgabenstellung nicht explizit gefordert. Begründete Schlussfolgerungen sind hier jedoch insbesondere bei der Interpretation der formalen Lösung innerhalb des Ausgangskontextes einschließlich der Analyse der durch den Kontext gegebenen Bedingungen an eine sinnvolle Lösung notwendig. Auch bei der weiteren Ausdeutung der formalen Lösung in mögliche Sonderwünsche sind Argumentationen sinnvoll, die jedoch weniger mathematisch, sondern eher anschaulich-plausibilisierend sein werden. Durch die Wechselwirkung zwischen mathematischem Konzept und Kontextgebundenheit innerhalb dieser Aufgabenstellung werden auch die Argumentationen eine besondere Form annehmen, die mathematisch-stringente und lebensweltlich-anschauliche Argumente und Argumentationsformen verbindet. Dies sollte hier erlaubt und unterstützt werden. Die selbständige komplexe Argumentation in neuartigen Zusammenhängen wird Anforderungsbereich 3 zugeordnet.

**Analyse der umgesetzten Schüleraktivitäten**

Alle Schüler wählten als Mathematisierungsmuster ein lineares Gleichungssystem und fanden damit die formale Lösung. In der folgenden Auflistung wird dokumentiert, mit welcher Häufigkeit die intendierten Aktivitäten ausgeführt wurden. Insgesamt konnten jedoch nur 13 Schülerarbeiten ausgewertet werden. Nach Aussage der Fachlehrerin ist die Ursache dieser geringen Anzahl angemessener Bearbeitungen in der sinkenden Motivation der Schüler zum Schuljahresende zu sehen.

Intendierte Aktivitäten (Aktivitätsbereich, Anzahl der Umsetzungen dieser Aktivität durch die Schüler):

- Variablen für die gesuchten Größen definieren (DI, 4)
- Zusammenhänge zwischen Daten analysieren, in Gleichungen übersetzen (HE, DI, 13)
- eine Lösungsstrategie finden: lineares Gleichungssystem/Gaußalgorithmus (HE, 13)
- den Gaußalgorithmus ausführen (FO, 13)
- algebraische Umformungen ausführen (FO, 13)
- die Dreiecksform analysieren und auf eine frei wählbare Komponente folgern (HE, KA, 7)
- gesuchte Variablen in Abhängigkeit vom freien Parameter bestimmen (FO, 11)
- die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems formal darstellen (DI, 7)
- Bedingungen analysieren, die durch den Kontext an eine sinnvolle Lösung gestellt werden: $t$ muss Vielfaches von 3 sein (HE, 10)
- Bedingungen analysieren, die durch den Kontext an eine sinnvolle Lösung gestellt werden: Ergebnisse müssen positiv sein (HE, 8)
- die Bedingungen begründen (KA, 6)
- Schlussfolgerungen ziehen: Eingrenzung der Lösungsmenge (KA, 4)
- den Fall $t$=0 diskutieren und interpretieren (KA, DI)
- die Anzahlen an Konservendosen für die Fälle $t$=3. $t$=6 bestimmen (FO, 7)
- die Lösungsmenge tabellarisch darstellen (DI, 4)
- weiterführendes Interpretieren der Lösung, Zusammenhänge zu den Sonderwünschen herstellen, Schlussfolgerungen ziehen (HE, DI, KA, 7)

In der Beispiellösung wurden sechs heuristisch-experimentelle, sechs darstellend-interpretative, vier formal-operative und fünf kritisch-argumentative Aktivitäten separiert, wobei die formal-operativen Kompetenzen von größerem Umfang sind, sich z. B. auf die Ausführung einer größeren Anzahl algebraischer Umformungen oder auf die Ausführung eines komplexen Algorithmus beziehen. Die vier Aktivitätsbereiche können somit mit der Aufgabe potenziell ausgewogen und umfassend umgesetzt werden.

Häufig (von mindestens 8 Schüler) wurden vier heuristisch-experimentelle und drei formal-operative Aktivitäten sowie eine darstellend-interpretative Aktivität ausgeführt. Die anderen Aktivitäten übten nur vier bis sieben Schülern aus. Die darstellend-interpretativen und kritisch-argumentativen Aktivitäten in Zusammenhang mit der Diskussion des Falls $t$=0 wurden von keinem Schüler ausgeführt.

Auch unter den Aktivitäten, welche die Schüler ausführten, die aber nicht in der „objektiven“ Lösung auftraten, waren alle Aktivitätsbereiche vertreten, die meisten dieser sehr individuellen Tätigkeiten waren darstellend-interpretativ.

Insgesamt wurden von den Schülern 62 heuristisch-experimentelle, 44 darstellend-interpretative, 49 formal-operative und 21 kritisch-argumentative Aktivitäten ausgeführt. Schöpferische Aktivitäten bilden in den Aufgabenbearbeitungen der Schüler den Schwerpunkt, die kritisch-argumentativen Aktivitäten wurden in der Umsetzung vernachlässigt.

**Vergleich unterschiedlicher Lösungswege**

Die Schüler wendeten im Wesentlichen die in der Beispiellösung skizzierte Lösungsstrategie an. Unterschiede zwischen den Arbeiten zeigten sich in der Intensität der Modellierung, d. h. darin, wie die Schüler die Übersetzung des Kontextes in die formale mathematische Darstellung vornahmen (z. B. Definition der Variablen), wie sie die formale Lösung im Ausgangskontext interpretierten (z. B. Zusammenhang Parameter - Sonderwünsche) und vor allem ob und wie intensiv sie die Lösung im Zusammenhang mit dem Ausgangskontext analysierten, um die beiden Bedingungen (ganzzahlig und positiv) zu erkennen, die erst der Lösung im Kontext Sinn geben. Aus diesem Grunde werden im Folgenden nicht verschiedene Lösungsstrategien untersucht, sondern unterschiedliche Niveaus der Modellierung zu einem zu Grunde liegenden Mathematisierungsmuster.

- Die Übersetzung in die formale Darstellung, einschließlich Definition der verwendeten Variablen wurde von 4 Schülern explizit dargestellt. Dabei wurden heuristisch-experimentelle und darstellend-interpretative Aktivitäten, bei einer Begründung des Vorgehens auch argumentative Tätigkeiten ausgeführt.
- Alle 13 Schüler stellten ein lineares Gleichungssystem auf und lösten dies, wobei sie eine einparametrige Lösung erhielten und diese in Parameterdarstellung präsentierten. Hierbei wurden formal-operative und darstellend-interpretative, in geringerer Zahl auch heuristisch experimentelle Aktivitäten ausgeführt, jedoch keine Argumentationen.
- Zehn Schüler analysierten die Lösung in Zusammenhang mit dem spezifischen Ausgangskontext und folgerten auf eine notwendige Ganzzahligkeit der Lösung bzw. auf die Bedingung, dass der freie Parameter ein Vielfaches von Drei sein muss.
- Acht Schüler erkannten auch die zweite Bedingung an eine sinnvolle Lösung (positiv), was zur Eingrenzung $t \in \{0,3,6\}$ für den freien Parameter $t$ führte.

Bei den beiden letztgenannten Lösungsschritten wurden überwiegend kritisch-argumentative Tätigkeiten ausgeführt (schlussfolgern und begründen). Das Analysieren selbst zählt zu den schöpferischen Tätigkeiten.

- Von 7 Schülern wurden die Anzahlen an Konserven für die möglichen „Menüs" berechnet und die beiden Möglichkeiten dargestellt. Dabei wurden formal-operative und darstellende Aktivitäten ausgeführt.
- Nur 5 Schüler interpretierten die Lösung noch im Ausgangskontext und gingen dabei insbesondere auf den Zusammenhang zwischen formaler Lösung und den möglichen Menüs sowie auf den Punkt „Sonderwünsche" ein. Sie führten dabei heuristisch-experimentelle und darstellend-interpretative Tätigkeiten aus.

Die hier unterschiedenen Lösungsschritte entsprechen im Wesentlichen den Schritten eines Modellierungsprozesses:

- Finden eines Mathematisierungsmusters, Übersetzen in die mathematische Darstellung
- Lösen des Problems auf mathematischer Ebene
- Interpretieren der formalen Lösung im Ausgangskontext/Rückinterpretation

Der vierte Schritt

- Evaluieren des verwendeten Modells

wurde von den Schülern nicht ausgeführt. Dazu gab es keine explizite Aufforderung und die Schüler sind mit eigenständigen Modellierungen nicht so vertraut, dass sie eine solche Evaluation von sich aus durchgeführt hätten.

Die Analyse der Schülerarbeiten zu dieser Aufgabe unterstützt die zunächst theoretisch vorgenommene Vermutung, dass die Schritte des Modellierungsprozesses mit ganz bestimmten Aktivitätstypen verbunden sind (vgl. 1.3.2). Es ist jedoch festzustellen, dass keine einfache Zuordnung vorgenommen werden kann, sondern auch die einzelnen Schritte einer wirklichen Modellierung komplex bezüglich der auszuführenden Aktivitäten sind. So können im ersten Schritt heuristisch-experimentelle, darstellend-interpretative aber auch kritisch-argumentative Aktivitäten auftreten. Die Lösung auf mathematischer Ebene muss keineswegs rein formal sein, sondern kann wie hier heuristich-experimentelle und darstellend-interpretative Aktivitäten einbeziehen. Die Rückübersetzung und Interpretation der formalen Lösung kann sogar Aktivitäten aller Bereiche integrieren. Auf jeden Fall wird bestätigt, dass anhand einer Modellierung eines realen Problems eine Vielzahl unterschiedlicher mathematischer Aktivitäten gefordert und der Erwerb entsprechender Kompetenzen gefördert werden kann[126].

**Ausgeführte Schüleraktivitäten und objektive Aufgabenparameter**

Bei der Bewertung der Ergebnisse bezüglich der Umsetzung ist zu beachten, dass nur 13 von 22 Schülern überhaupt aktiv waren und die Aufgabe bearbeiteten. Ursache der niedrigen Lösungsquote kann die sinkende Motivation der Schüler zu Schuljahresende sein. Auch Merkmale der Aufgabenstellung könnten die Schüler beeinflusst haben. Eine Klärung kann nicht anhand der vorliegenden Daten erfolgen, hierfür wären Schülerinterviews notwendig. Wurden bei dieser Aufgabe heuristisch-experimentelle und formal-operative Aktivitäten gut umgesetzt, gilt dies erneut nicht für kritisch-argumentative Aktivitäten.

*Darstellung der Modellierung insgesamt unzureichend*

Die Übersetzung in ein mathematisches Modell ist bei dieser Aufgabe nicht komplex. Die tabellarische Angabe der Daten in der Aufgabenstellung nimmt bereits einen Schritt der Übersetzung in die formale Darstellung ab. Dennoch sollte der Übergang zum mathematischen Modell nachvollziehbar dokumentiert sein. Insbesondere sind die verwendeten Variablen zu definieren, was nur von vier Schülern vorgenommen wurde. Es gab keine explizite Aufforderung zur Darstellung der Modellierung, weil dies der gewollten Realitätsnähe widerspricht. Da die Schüler wenig Sicherheit im Umgang mit Modellierungsaufgaben haben, insbesondere mit den Anforderungen an die Darstellung nicht vertraut sind, ist aus Gründen der Transparenz der Aufgabenanforderungen in Beurteilungssituationen die explizite Aufforderung vorzuziehen. Für Lernaufgaben, die nicht mit Beurteilungen verbunden sind, ist dagegen eine offene Fragestellung möglich. Werden dabei Kriterien der Darstellung der Modellierung umgesetzt und diskutiert, gewöhnen sich die Schüler schrittweise an diese Anforderungen.

*Geringe Umsetzung kritisch-argumentativer Aktivitäten*

Einfache Schlussfolgerungen, wie die auf einen freien Parameter wurden von den meisten Schülern gezogen. Die argumentativen Aktivitäten zur Interpretation der formalen Lösung wurden von weit weniger Schülern ausgeführt. Insbesondere wurde der im Kontext beson-

---

[126] Die einzelnen Schritte der Modellierung wurden nicht von allen Schülern durchgeführt. Der Anteil einer breiten, tiefgehenden Bearbeitung, einschließlich Interpretationen und Argumentationen war jedoch überraschend hoch, dagegen nicht die Absolutzahl. Wahrscheinlich haben vor allem die leistungsstarken Schüler die Aufgabe ausgeführt und entsprechend ihrem Leistungsstand auch auf hohem Niveau.

dere Fall $t$=0 von den Schülern nicht diskutiert. Die Analyse und Begründung der Sinnhaftigkeit einer formalen Lösung ist für die Schüler eine neuartige, ungewohnte Anforderung. Die hier auch dem Anforderungsbereich 3 zugeordnet wurde. Nicht nur die Anforderungen bezüglich der Argumentation sind dabei hoch, sondern auch die bezüglich der Vernetzung von Inhalten, genauer von mathematischen Objekten, und der kontextuellen Einbettung. Zur Argumentation gab es, wie bei offenen, kontextbezogenen Fragestellungen üblich, keine explizite Aufforderung. Auf Grund der geringen Umsetzung argumentativer Aktivitäten wäre es für die Validität und Erwartungstransparenz jedoch wichtig, dass bei Beurteilungsaufgaben explizit zur Argumentation aufgefordert wird, bis diese Anforderungen hinreichend durch offenere Lernaufgaben verinnerlicht wurden.

*Alle Schüler fanden einen geeigneten Zugang zur Aufgabe*

Allen Schülern gelang es, die Angaben der Aufgabenstellung in geeignete Gleichungen zu übersetzen. Da alle Schüler einen Zugang zur Aufgabe fanden, war die Schwierigkeit der Modellierung geringer als erwartet. Möglicherweise entsprach die tabellarische Angabe der Daten doch einer Spezifizierung des geeigneten mathematischen Konzeptes der linearen Gleichungssysteme. Der Zugang könnte aber auch durch die Anschaulichkeit der lebensweltlichen Problemstellung erleichtert worden sein.

Insgesamt waren die Arbeiten der Schüler zu dieser Aufgabe sehr zufriedenstellend. Die hohe Lösungsquote (im Gegensatz zur geringen Bearbeitungsquote) kann mit der geringen Komplexität der mathematischen Konzepte zusammenhängen. denn es wird nur eine Wisseneinheit angesprochen. Die kognitiven Anforderungen der anderen Dimensionen wurden jedoch einem mittleren Niveau zugeordnet und auch anspruchsvolle intellektuelle Fähigkeiten, wie Analysieren und Synthetisieren, wurden einbezogen. Dies unterstützt eher die Vermutung, dass die hohe Lösungsquote damit zu begründen ist, dass überwiegend leistungsstarke und motivierte Schüler die Aufgabe bearbeiteten.

*Gute Beachtung des speziellen Kontextes*

Zehn Schüler analysierten die Bedingungen, welche durch den Kontext an eine sinnvolle Lösung gestellt wurden. Auch weiterführende Interpretationen der Lösung wurden von sieben Schülern vorgenommen. Der spezielle Kontext der Aufgabenstellung wurde somit gut beachtet. Möglicherweise wurden die Schüler durch den anschaulichen lebensweltlichen Kontext angesprochen und die Situierung war motivierend gewählt. Genauso kann aber auch die umfassende Bearbeitung damit zusammen hängen, dass vor allem leistungsorientierte Schüler die Aufgabe lösten.